E. Fabri *febbraio 2021*

Verifica di un calcolo di Einstein

Introduzione

Voglio verificare la dimostrazione data da Einstein in [1] che le eq. di Maxwell nel vuoto sono invarianti per trasf. di Lorentz. Al posto delle scomode notazioni di E. userò notazioni moderne.

E. parte dalle eq. scritte per componenti (unità di Gauss):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\,\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \qquad && \frac{1}{c}\,\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\
&\frac{1}{c}\,\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} && \frac{1}{c}\,\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\
&\frac{1}{c}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} && \frac{1}{c}\,\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Non sono scritte, ma serviranno, le eq. per le divergenze:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (2).$$

Usa poi le trasf. di Lorentz:

$$\begin{aligned}
&t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right) \qquad && t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}\,x'\right) \\
&x' = \gamma\,(x - vt) && x = \gamma\,(x' + vt') \\
&y' = y && y = y' \\
&z' = z && z = z'.
\end{aligned} \tag{3}$$

Dà il risultato della trasf. senza passaggi.

Interpretazione

Assumo che il primo passaggio sia di esprimere le componenti di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{B}$ in funzione delle coord. trasformate t', x', y', z'. Per chiarezza indicherò le componenti espresse nelle coord. trasformate con $\bar{E}_t$ ecc.:

$$\bar{E}_x(t', x', y', z') = E_x(t(t', x'), x(t', x'), y', z').$$

Allora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial t'} &= \frac{\partial E_x}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial E_x}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t'} = \gamma\,\frac{\partial E_x}{\partial t} + \gamma\,v\,\frac{\partial E_x}{\partial x} \\
&= c\,\gamma\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) - \gamma\,v\left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\
&= c\,\gamma\,\frac{\partial}{\partial y}\left(B_z - \frac{v}{c}\,E_y\right) - c\,\gamma\,\frac{\partial}{\partial z}\left(B_y + \frac{v}{c}\,E_z\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Osserviamo che
$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y'} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z'}$$
e analoghe; pertanto la (4) si può scrivere
$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial t'} = \gamma\,\frac{\partial}{\partial y'}\left(\bar{B}_z - \frac{v}{c}\,\bar{E}_y\right) - \gamma\,\frac{\partial}{\partial z'}\left(\bar{B}_y + \frac{v}{c}\,\bar{E}_z\right) \tag{5}$$
che coincide con la prima delle eq. in fondo a pag. 907 di [1]. Le altre si ricavano in modo analogo.

Invarianza

Il principio di relatività — osserva E. — richiede che nel nuovo rif. inerziale le eq. di Maxwell valgano inalterate, ossia che
$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial E'_{x'}}{\partial t'} = \frac{\partial B'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial B'_{y'}}{\partial z'} \tag{6}$$
e seguenti. La (6) per confronto con la (5) fornisce la legge di trasf. di alcune componenti dei campi:
$$E'_{x'} = \bar{E}_x$$
$$B'_{y'} = \gamma\left(\bar{B}_y + \frac{v}{c}\,\bar{E}_z\right) \qquad B'_{z'} = \gamma\left(\bar{B}_z - \frac{v}{c}\,\bar{E}_y\right).$$
Le rimanenti si ottengono completando il calcolo con le altre equazioni.

[1] A. Einstein, *Ann. d. Physik*, **17** (1905), 891–921.