E. Fabri *giugno 2019*

Trasporto parallelo sulla sfera

Argomento

Voglio studiare il trasporto parallelo di un vettore su una superficie sferica; in particolare lungo un parallelo. Si tratta di un (semplice) esercizio. Mi baserò su `afrel11.pdf` e `afrel13.pdf`.

Impostazione

Uso come al solito coordinate (ϑ, φ). La curva è un parallelo, parametrizzato come segue:

$$\vartheta = \vartheta_0 \qquad \varphi = \lambda \qquad \varphi(0) = 0.$$

I coefficienti di connessione sono dati dalle (13–4):

$$\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\vartheta} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} = \operatorname{cotg}\vartheta$$

(i rimanenti sono nulli).

Le equazioni del trasporto parallelo sono

$$\frac{dv^\mu}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,v^\varrho = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} \frac{dv^\vartheta}{d\lambda} + \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{d\lambda}\,v^\vartheta + \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\lambda}\,v^\varphi = 0 \\ \frac{dv^\varphi}{d\lambda} + \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi}\,\frac{d\vartheta}{d\lambda}\,v^\varphi + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta}\,\frac{d\varphi}{d\lambda}\,v^\vartheta = 0 \end{aligned}$$

che diventano

$$\begin{aligned} \frac{dv^\vartheta}{d\lambda} - v^\varphi \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 = 0 \\ \frac{dv^\varphi}{d\lambda} + v^\vartheta \operatorname{cotg}\vartheta_0 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Soluzione

Deriviamo la prima delle (1) rispetto a λ e sostituiamo dalla seconda:

$$\frac{d^2v^\vartheta}{d\lambda^2} - \frac{dv^\varphi}{d\lambda}\,\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 = 0$$

$$\frac{d^2v^\vartheta}{d\lambda^2} + v^\vartheta \cos^2\!\vartheta_0 = 0. \tag{2}$$

L'integrale generale della (2) è

$$v^\vartheta(\lambda) = \alpha\,\cos(\lambda\cos\vartheta_0) + \beta\,\sin(\lambda\cos\vartheta_0).$$

Come condizioni iniziali prendiamo

$$v^\vartheta(0) = 0 \qquad v^\varphi(0) = 1.$$

Allora $\alpha = 0$. Risolvendo la prima delle (1) rispetto a v^φ abbiamo

$$v^\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0}\,\frac{dv^\vartheta}{d\lambda} = \frac{\beta}{\sin\vartheta_0}\,\cos(\lambda\cos\vartheta_0)$$

e per $\lambda = 0$

$$1 = \frac{\beta}{\sin\vartheta_0}$$
$$\beta = \sin\vartheta_0.$$

La soluzione è quindi

$$\begin{aligned} v^\vartheta(\lambda) &= \sin\vartheta_0\sin(\lambda\cos\vartheta_0) \\ v^\varphi(\lambda) &= \cos(\lambda\cos\vartheta_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Angolo di rotazione

La (3) deve rappresentare una rotazione. Verifichiamo in primo luogo che la lunghezza di $\mathbf{v}$ resta invariata. Si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|^2 &= g_{\vartheta\vartheta}\,(v^\vartheta)^2 + g_{\varphi\varphi}\,(v^\varphi)^2 = (v^\vartheta)^2 + \sin^2\!\vartheta_0\,(v^\varphi)^2 \\ &= \sin^2\!\vartheta_0\,\sin^2(\lambda\cos\vartheta_0) + \sin^2\!\vartheta_0\,\cos^2(\lambda\cos\vartheta_0) = \sin^2\!\vartheta_0. \end{aligned}$$

Quanto all'angolo di rotazione esso sarà definito da

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v^\vartheta}{v^\varphi\sin\vartheta_0} = \operatorname{tg}(\lambda\cos\vartheta_0) \tag{4}$$
$$\gamma = \lambda\cos\vartheta_0.$$

Per l'intero parallelo l'angolo di rotazione vale $\gamma = 2\,\pi\cos\vartheta_0$ ed è connesso all'area della calotta dalla relazione

$$A = 2\pi - \gamma.$$

Se il parallelo è l'equatore ($\vartheta_0 = \pi/2$), che è una geodetica, $\gamma = 0$ e $A = 2\pi$.

Nota: Occorre tener presente che ϑ cresce dal polo nord al polo sud. Quindi $v^\vartheta > 0$ indica una rotazione *oraria* rispetto al parallelo. Lo stesso vale per γ definito dalla (4).