E. Fabri *luglio 2018*

Terzo principio e campo e.m.

La situazione

Allo scopo di dimostrare che in ambito e.m. il terzo primcpio della dinamica non vale, si considera la seguante situazione (si tratta di un approfondimento di ciò che si legge in Q16, pag. 151).

Abbiamo due particelle cariche (chiamiamole 1 e 2) che si muovono di moto rettilineo uniforme su traiettorie tra loro ortogonali. Prendiamo l'asse x coincidente con la traiettoria di 1, e stesso verso; l'asse y con la traiettoria di 2. Le leggi orarie delle due particelle sono dunque:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_0 + v_1\, t \qquad && x_2 = z_2 = 0 \\ &y_1 = z_1 = 0 && y_1 = v_2\, t. \end{aligned} \tag{1}$$

Si dovrà prendere $x_0 \neq 0$ affinché le particelle non si scontrino; per fissare le idee, prendiamo $x_0 > 0$, $v_1 > 0$, $v_2 > 0$. Siano poi q_1, q_2 le cariche.

Il paradosso delle forze

Esaminiamo che cosa succede al tempo $t = 0$. La particella 1 produce un campo elettrico, che nella posizione di 2 è diretto come x; produce anche un campo magnetico, che però è nullo sull'asse x. Ne segue che la forza agente su 2 è diretta come x (il verso non interessa).

Anche la particella 2, che a quell'istante si trova nell'origine, produce un campo elettrico, che nei punti dell'asse x è diretto come x; produce però anche un campo magnetico, che nella posizione di 1 ($x_1 = x_0 > 0$) è diretto come le z negative. Tale campo produce su 1 una forza di Lorentz diretta come le y positive.

Conclusione: mentre la forza su 2 è diretta come x, quella su 1 ha anche una componente y non nulla. Quindi *il terzo principio non vale.*

Soluzione del paradosso

Dire che le due forze non sono opposte, equivale a dire che la q. di moto delle due particelle *non si conserva.* La soluzione sta nel tener conto anche della q. di moto del campo e.m. delle cariche: dovremo dimostrare che tale q. di moto non si conserva e compensa esattamente quella delle particelle.

Occorre però una precisazione. Nell'enunciato del problema abbiamo posto le particelle in *moto prestabilito*: quello descritto dalle (1). Ma se è così, esiste un vincolo esterno, il sistema "due particelle + campo" non è isolato, e non abbiamo motivo di far conservare la q. di moto!

Dobbiamo quindi emendare il paradosso. Se le cariche sono in moto asseganto i loro campi si calcolano facilmente, e così pure le forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ applicate alle particelle. Se il moto delle particelle è uniforme, sappiamo che le reazioni vincolari sono $-\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_2$.

Dunque $-(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)$ è la risultante delle forze applicate al sistema "particelle + campo." D'altra parte la q. di moto delle particelle è costante; dovremo quindi verificare che

$$\dot{\mathbf{Q}} = -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \tag{2}$$

essendo $\mathbf{Q}$ la q. di moto totale del campo e.m.

Calcolo di Q

Indichiamo con $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$ i campi prodotti dalla particella 1, che saranno funzioni di (t, x, y, z); analogamente per $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{B}_2$. L'espressione di $\mathbf{Q}$ (unità di Gauss) è

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \frac{1}{4\pi c}\int dV\,(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \\ &= \frac{1}{4\pi c}\int dV\,(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2) \end{aligned}\tag{3}$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

Osserviamo che nella (3) il primo e l'ultimo termine esprimono risp. la q. di moto del campo prodotto della carica 1 in assenza della 2, e viceversa. Dato che le cariche sono in moto uniforme, questi campi variano nel tempo in un punto fisso, ma la loro distribuzione viene semplicemente traslata nello spazio da un istante all'altro. Pertanto gli integrali (le q. di moto dei due campi separati) restano costanti nel tempo, e possiamo trascurarli nel calcolo. Scriveremo quindi, al posto di (3), l'espressione semplificata

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{4\pi c}\int dV\,(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1) \tag{3$'$}$$

dove l'uguaaglianza è da intendersi a meno di una costante.

Calcoliamo $\dot{\mathbf{Q}}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{4\pi c}\int dV\,(\dot{\mathbf{E}}_1 \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{E}_1 \times \dot{\mathbf{B}}_2 + \dot{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_2 \times \dot{\mathbf{B}}_1) \\ &= \frac{1}{4\pi c}\int dV\,\big[c\,(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_2 - 4\,\pi\,\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_2 - c\,\mathbf{E}_1 \times (\nabla \times \mathbf{E}_2) + {} \\ &\qquad c\,(\nabla \times \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}_1 - 4\,\pi\,\mathbf{j}_2 \times \mathbf{B}_1 - c\,\mathbf{E}_2 \times (\nabla \times \mathbf{E}_1)\big]. \end{aligned}\tag{4}$$

Lo sviluppo di (4) richiede di usoare due volte l'identità

$$\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}. \tag{5}$$

Una prima volta su $\mathbf{E}_1 \times (\nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathbf{E}_2 \times (\nabla \times \mathbf{E}_1)$, che diventa

$$\nabla(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) - (\mathbf{E}_1 \cdot \nabla)\mathbf{E}_2 - (\mathbf{E}_2 \cdot \nabla)\mathbf{E}_1.$$

Il primo termine integrato sul volume si riduce a un integrale di superficie all'infinito, che è nullo perché i campi di cariche in moto uniforme vanno come $1/r^2$. Il secondo termine, integrato per parti (anche qui l'integrale di superficie si annulla) diventa

$$4\,\pi\,\varrho_1\,\mathbf{E}_2$$

e il terzo allo stesso modo dà

$$4\,\pi\,\varrho_2\,\mathbf{E}_1.$$

Quanto ai termini in $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}_1 \times (\nabla \times \mathbf{B}_2) + \mathbf{B}_2 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1)$$

procedendo allo stesso modo danno 0 perché $\nabla\cdot\mathbf{B}_1 = \nabla\cdot\mathbf{B}_2 = 0$.

Riassumendo:

$$\dot{\mathbf{Q}} = -\int dV \left[(\varrho_1\,\mathbf{E}_2 + \varrho_2\,\mathbf{E}_1) + \frac{1}{c}\,(\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{j}_2 \times \mathbf{B}_1)\right].$$

Le espressioni di $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ sono:

$$\mathbf{F}_1 = q_1\left(\mathbf{E}_2 + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2\right) \qquad q_2\left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1\right)$$

e d'altra parte per cariche puntiformi

$$\int dV\;\varrho_1\,\mathbf{E}_2 = q_1\,\mathbf{E}_2 \qquad \int dV\,\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_2 = q_1\,\mathbf{v}_1 \times \mathbf{E}_2$$

e analoghe per q_2.

Pertanto la (2) è dimostrata.