E. Fabri *dicembre 2017*

Il teorema "center of energy"

Nota: Gli indici greci vanno da 0 a 3; quelli latini da 1 a 3.

Partiamo dal tensore energia impulso $T^{\lambda\mu}$, le cui proprietà di cui avremo bisogno sono:

– simmetria: $T^{\lambda\mu} = T^{\mu\lambda}$

– conservazione: ${T^{\lambda\mu}}_{,\mu} = 0$.

Assumo di aver a che fare con un sistema limitato nello spazio e isolato. Ciò vuol dire che a ogni tempo esiste una superficie chiusa $\mathcal{S}_t$, tale che $T^{\lambda\mu} = 0$ fuori di $\mathcal{S}_t$. Più esattamente assumo che esista nello spazio-tempo un *tubo* $\mathcal{T}$, la cui sezione a un dato t chiamo $\mathcal{S}_t$, e che sia

$$T^{\lambda\mu} = 0 \quad \text{fuori di } \mathcal{T}.$$

Indico con $\mathcal{V}_t$ la regione 3D racchiusa da $\mathcal{S}_t$.

Definiamo le P^λ:

$$P^\lambda = \int_{\mathcal{V}_t} T^{0\lambda} d\mathcal{V}_t.$$

Stando alla definizione, P^λ potrebbe dipendere da t. Si dimostrano però le seguenti proprietà:

1) le P^λ sono costanti del moto (non dipendono da t)
2) sono le componenti di un 4-vettore (di tipo tempo, se si assumono opportune ipotesi addizionali per $T^{\lambda\mu}$)
3) P^0 non è mai nulla.

L'interpretazione fisica delle P^λ è chiara: P^0 è l'energia del sistema, P^i la quantità di moto.

Definiamo ora le grandezze X^i come segue:

$$X^i = \frac{1}{P^0} \int_{\mathcal{V}_t} x^i \, T^{00} \, d\mathcal{V}_t.$$

Le X^i in generale dipendono dal tempo. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\dot{X}^i &= \frac{1}{P^0} \int_{\mathcal{V}_t} x^i \, {T^{00}}_{,0} \, d\mathcal{V}_t = -\frac{1}{P^0} \int_{\mathcal{V}_t} x^i \, {T^{0k}}_{,k} \, d\mathcal{V}_t \\
&= \frac{1}{P^0} \int_{\mathcal{V}_t} \delta^i_k \, T^{0k} \, d\mathcal{V}_t = \frac{1}{P^0} \int_{\mathcal{V}_t} T^{0i} \, d\mathcal{V}_t = \frac{P^i}{P^0}.
\end{aligned}$$

Dunque le $\dot{X}^i$ sono *costanti*, e si possono interpretare come le componenti della velocità di un punto materiale di energia P^0 e impulso P^i. Questo giustifica la denominazione "coordinate del centro dell'energia" (anche se personalmente preferisco chiamarlo "centro di massa (sottinteso relativistico)."

Abbiamo dimostrato che la X^i hanno una semplice dipendenza dal tempo:

$$X^i(t) = X^i(0) + v^i\, t$$

avendo posto $v^i = P^i/P^0$ (le v_i sono costanti). In parole: il centro dell'energia si muove di moto rettilineo uniforme.

Inoltre, essendo P^λ di tipo tempo, esiste sempre un rif. in cui le P^i si annullano e le X^i sono costanti: il rif. del centro di massa.