E. Fabri *ottobre 2001*

Vettori covarianti e controvarianti: perché?

Premessa

Capita spesso che studenti chiedano chiarimenti circa vettori, tensori, distinzione tra "covariante" e "controvariante." Si tratta di argomenti trattati nei corsi di matematica e usati abbondantemente nei corsi di fisica, ma con un certo "scollamento" fra i due ambiti, sì che non di rado accade che certe cose, importanti per capire, restino non dette.

Quanto segue è una parziale risposta a tali domande. I presupposti sono le conoscenze di un corso di geometria del biennio di fisica o ingegneria; il destinatario tipo è qualcuno che stia cercando di capire la relatività (ristretta) e si sia appunto imbattuto nei termini e concetti che ho detto. Ma forse la possibile "audience" potrebbe essere anche più ampia...

Voglio concludere questa premessa con una considerazione didattica. Qual è la ragione delle difficoltà che si presentano nel nostro contesto? A mio parere si tratta di questo: ci sono due possibili (e tradizionali) approcci al tema:

– Quello "del matematico," che parte dal generale per arrivare al particolare, per successivo arricchimento della struttura. Il vantaggio è che si coglie bene l'ambito di validità di ciascun concetto e risultato, senza vincolarlo a condizioni e ipotesi non necessarie. Lo svantaggio è che tale approccio riesce difficile a molti studenti, e comunque rimane a lungo privo di aggancio ad applicazioni.

– Quello "del fisico," che procede esattamente all'inverso. Usa le strutture matematiche col grado di generalità minimo indispensabile, senza preoccuparsi di possibili generalizzazioni, almeno finché non si rendano necessarie (v. relatività o meccanica quantistica). Il vantaggio di tale approccio è la maggior concretezza e la diretta applicabilità; lo svantaggio è che lo studente si può abituare a considerare "naturali," per non dire addirittura "oggettive," "date nella realtà" le strutture con cui è divenuto familiare, e fa fatica a staccarsene.

Temo che non esista una ricetta risolutiva. Certo sarebbe auspicabile che entrambi i tipi di docente avessero una qualche familiarità con l'altro punto di vista, in modo da potere all'occasione "lanciare dei ponti," almeno per far riflettere gli studenti... Ma poiché questo alla prova dei fatti riesce difficile, forse l'unica soluzione pratica è di portare gli studenti a ripensare successivamente a ciò che hanno appreso, spingendoli a collegare e avvicinare i due punti di vista, esaminando ragioni, vantaggi, motivazioni di ciascuno. È quello che (immodestamente) mi sono proposto, entro l'ambito ristretto di questa nota.

Vettori

Suppongo dunque che chi legge sappia benissimo che cos'è un vettore nel senso elementare, ma lo ripresento a modo mio (poi si capirà perché). Siamo (per ora) nell'ordinario spazio fisico tridimensionale, che trattiamo come *spazio affine*: questo vuol dire che sappiamo che cos'è uno *spostamento* da un punto a un altro, e dal concetto di spostamento ricaviamo quello di vettore.

Sappiamo anche come si sommano i vettori, e che cos'è il multiplo di un vettore con un fattore scalare ("scalare" in questo contesto è sinonimo di "numero reale"). Invece non voglio far uso della struttura euclidea, ossia della lunghezza di segmenti (e vettori) e degli angoli. In particolare ne segue che non voglio per ora pensare di aver definito il prodotto scalare. L'insieme dei vettori è uno *spazio vettoriale* (tridimensionale, nel nostro caso); lo indicherò con $\mathcal{V}$.

Debbo far notare che nel modo come lo sto presentando, un vettore *non è* una terna (o una n-pla) di numeri: quella è solo una "rappresentazione" del vettore in una data base. Questo è in realtà un discorso piuttosto delicato e complesso: a mio modo di vedere (da fisico, ma direi in linea col più corrente pensiero matematico) i vettori, in quanto matematizzazione di oggetti del mondo fisico, esistono *prima* delle loro componenti. Posso parlare di velocità senza bisogno di aver scelto un sistema di coordinate: occorre e basta che io abbia un *sistema di riferimento*, ossia un complesso di strumenti coi quali misuro tempi, posizioni, ecc.

I vettori e la fisica

Quali oggetti della fisica sono rappresentati da vettori? La risposta può sembrare ovvia, ma non lo è tanto. Sicuramente è un vettore lo *spostamento*: questo per definizione. Lo è di certo la *velocità*, che si ottiene dividendo uno spostamento per uno scalare (l'intervallo di tempo). Lo è anche l'*accelerazione*, per lo stesso motivo.

Ma la forza? È così ovvio che si tratti di un vettore? La mia risposta è no. Non basta dire che ogni forza ha grandezza, direzione e verso. Occorre mostrare che si può dare una definizione *fisica* di *somma* di due forze, e che questa somma ha le proprietà richieste alla somma di vettori. Non posso soffermarmi oltre: faccio solo notare che si tratta di un *fatto sperimentale* (che ha dovuto essere scoperto e capito); non si tratta affatto di una semplice definizione.

Se la forza è un vettore, ne segue il carattere vettoriale del *campo elettrico*, del *campo gravitazionale*, ecc. Nella meccanica compaiono però anche altri vettori: la velocità angolare, il momento di una forza, il campo magnetico... Qui le cose si complicano, e per ora almeno preferisco sorvolare.

Basi, cambiamenti di base

Assumo anche noto il concetto di *base* di uno spazio vettoriale: semplicemente tre vettori $\{\mathbf{e}_i\}$ linearmente indipendenti (tre perché tante sono le dimensioni, n in generale). Si chiama "base" perché ogni vettore si può scrivere come combinazione lineare: $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$.

Notazione: Quando si trova ripetuto lo stesso indice, una volta in alto e una in basso, è sottintesa la somma su quell'indice: convenzione di Einstein.

Nell'espressione appena scritta, gli $\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base, mentre v^i sono i moltiplicatori scalari, che si chiamano le "componenti di $\mathbf{v}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$." Per ragioni che saranno chiare fra poco, un vettore $\mathbf{v}$ si chiama anche vettore "controvariante," ovvero "tensore di tipo $\binom{1}{0}$."

Supponiamo ora di avere una seconda base $\{\mathbf{f}_i\}$; potremo anche scrivere

$$\mathbf{v} = w^i\,\mathbf{f}_i$$

e nasce il problema: che relazione c'è fra le componenti nelle due basi? La risposta è nota, ma la riassumo per chiarezza. I nuovi vettori $\mathbf{f}_i$ sono combinazioni lineari dei vecchi:

$$\mathbf{f}_i = A_i{}^k \mathbf{e}_k \tag{1}$$

per cui:

$$\mathbf{v} = w^i A_i{}^k \mathbf{e}_k \quad \text{insieme con} \quad \mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k$$

e questo significa che

$$v^k = w^i A_i{}^k. \tag{2}$$

Si vede dunque che le componenti si trasformano "al rovescio" della base: la matrice A è la stessa, ma mentre A fa passare (per i vettori base) dalla base "vecchia" alla "nuova," per le componenti fa invece passare dalla nuova alla vecchia. È per questo che si dice "controvariante": le componenti del vettore $\mathbf{v}$ si trasformano "in senso opposto" di come si trasforma la base.

Posso anche usare al posto di A la matrice trasposta B, definita da

$$B^k{}_i = A_i{}^k$$

e allora

$$v^k = B^k{}_i\, w^i.$$

La matrice B ha come colonne, ossia per i fissato, le componenti dei vettori $\mathbf{f}_i$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_k\}$.

Vettori e coordinate

Tradizionalmente le coordinate sono un punto di partenza nella formulazione matematica della fisica. Invece fin qui non se n'è parlato: dove sono finite? Come vedremo, non ne avrò bisogno, ma in fondo sono implicite in quanto già detto.

Se abbiamo uno spazio affine, scelto un punto arbitrario O come origine, si può arrivare in ogni altro punto P con uno spostamento $\mathbf{x}$, che è un vettore.

Assunta una base $\mathbf{e}_i$, avremo $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$, e le x^i sono le *coordinate* di P associate all'origine O e alla base $\mathbf{e}_i$.

Perciò cambiamenti di base e trasformazioni di coordinate sono strettamente legati e non c'è niente di nuovo da dire. Cambiare sistema di coordinate equivale a cambiare base in $\mathcal{V}$ (ed eventualmente anche l'origine O). Osservo solo che per cambiamento di base *le coordinate si trasformano come componenti controvarianti.* Di solito si dice l'inverso: si definisce controvariante un vettore (inteso come componenti) che si trasforma come le coordinate. Ma la sostanza resta la stessa.

C'è anche da dire che non siamo abituati al genere di coordinate così introdotte: data l'arbitrarietà della base, possiamo scegliere vari sistemi di coordinate, legate le une alle altre da relazioni come le (2), che sono arbitrarie trasformazioni lineari (senza contare poi le traslazioni dovute al cambiamento di origine). Invece noi siamo avvezzi, direi quasi "fin dalla più tenera età," a usare solo coordinate ortogonali. Questo ha a che fare con la mia scelta d'ignorare all'inizio la struttura euclidea (la introdurrò più avanti) per mettere meglio in evidenza un aspetto importante, legato proprio alla distinzione tra "covariante" e "controvariante."

In realtà in una meccanica più avanzata si prende l'abitudine a coordinate più generali (le "coordinate lagrangiane"). Fin troppo generali, tanto che non ho intenzione di occuparmene... Nella meccanica elementare forse qualche volta potrebbe anche essere conveniente usare coordinate "oblique," ma non mi sembra di averne mai visto nessun esempio. Si usano invece le coordinate polari, ma anche queste, nella loro relazione coi vettori, fanno nascere un ordine di complicazioni che qui non voglio affrontare.

Vettori duali

Sicuramente chi legge si starà chiedendo perché adottare notazioni così complicate, con quegli indici in alto e in basso: la ragione arriva subito. Prima però dobbiamo introdurre il concetto di *spazio duale.* Nelle mie ipotesi dovrei supporlo noto, ma lo richiamo.

Consideriamo una funzione lineare definita su $\mathcal{V}$, ossia un'applicazione $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})$ che a ogni vettore $\mathbf{v}$ fa corrispondere uno scalare (reale) con le condizioni:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}')$$

$$\boldsymbol{\sigma}(a\mathbf{v}) = a\,\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \quad (a \text{ scalare}).$$

L'insieme di queste funzioni lineari costituisce lo "spazio duale" di $\mathcal{V}$, che s'indica con $\mathcal{V}^*$. Evito di dimostrare che si tratta di uno spazio vettoriale anch'esso, di dimensione n come $\mathcal{V}$. Per la funzione $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})$ è anche in uso (e molto comoda) la notazione $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle$.

È importantissimo capire che $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$ *sono spazi distinti*: non c'è nessuna ragione *intrinseca* per identificarli, anche se sono equidimensionali, quindi isomorfi (questo è piuttosto banale, ma comunque si dimostra nei corsi di geometria e non sto a ripeterlo).

Anche $\mathcal{V}^*$ avrà delle basi: sia $\{\boldsymbol{\omega}^i\}$ una base, avremo

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_i\,\boldsymbol{\omega}^i.$$

Non sarà sfuggito che stavolta ho messo in alto l'indice dei vettori della base, e in basso quello delle componenti: perché mai? Guardate questo giochetto:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = \sigma_i\,\langle \boldsymbol{\omega}^i, \mathbf{v} \rangle = \sigma_i v^k \langle \boldsymbol{\omega}^i, \mathbf{e}_k \rangle \tag{3}$$

per cui possiamo calcolare tutte le $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle$ se conosciamo solo un numero finito di risultati: $\langle \boldsymbol{\omega}^i, \mathbf{e}_k \rangle$. Questi dipendono dalle due basi, e le cose si semplificano molto se le basi sono così scelte da avere

$$\langle \boldsymbol{\omega}^i, \mathbf{e}_k \rangle = \delta^i_k \tag{4}$$

dove δ^i_k è la cosiddetta "delta di Kronecker."

Una coppia di basi in $\mathcal{V}$ e in $\mathcal{V}^*$ per cui vale la (4) si chiamano "duali," e da qui in poi assumeremo sempre di lavorare con basi duali. In tal caso la (3) diventa

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = \sigma_i\,v^i$$

che *somiglia* a un prodotto scalare, ma non lo è, per due buone ragioni:

– $\boldsymbol{\sigma}$ e $\mathbf{v}$ appartengono a spazi diversi
– comunque non abbiamo mai definito il prodotto scalare, neppure in $\mathcal{V}$.

Visto il vantaggio di disporre gli indici come ho fatto?

Un altro pregio delle basi duali è il seguente:

$$\langle \boldsymbol{\omega}^i, \mathbf{v} \rangle = v^k \langle \boldsymbol{\omega}^i, \mathbf{e}_k \rangle = v^i. \tag{5}$$

Quindi la componente v^i si ottiene calcolando $\langle \boldsymbol{\omega}^i, \mathbf{v} \rangle$. Simmetricamente:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_k \rangle = \sigma_k. \tag{6}$$

Domanda: come si trasformano le componenti di $\boldsymbol{\sigma}$ se cambio la base in $\mathcal{V}$? La nuova base $\{\mathbf{f}_i\}$ avrà una duale $\{\boldsymbol{\chi}^k\}$ in $\mathcal{V}^*$, e avrò

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau_i\,\boldsymbol{\chi}^i \quad \text{accanto a} \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_i\,\boldsymbol{\omega}^i.$$

Ma

$$\tau_i = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f}_i \rangle \quad \text{(per la (6))} \quad = \sigma_k\,\langle \boldsymbol{\omega}^k, \mathbf{f}_i \rangle = \sigma_k\,A_i{}^j\,\langle \boldsymbol{\omega}^k, \mathbf{e}_j \rangle = A_i{}^k\,\sigma_k$$

(ho usato la (4)).

Si vede che questa volta la trasformazione fra le componenti è la stessa di quella fra le basi di $\mathcal{V}$: ecco perché i vettori $\boldsymbol{\sigma}$ di $\mathcal{V}^*$ si chiamano "covarianti," o anche "tensori di tipo $\binom{0}{1}$."

I vettori covarianti e la fisica

È naturale la domanda: esistono in fisica i vettori covarianti? Una parte della risposta arriverà più avanti; ora vorrei solo introdurre un "elemento di dubbio."

Supponiamo di voler spostare un corpo in un campo gravitazionale (uniforme). Sappiamo che in generale dovremo spendere dell'energia (magari col segno meno ...). Con qualche esperimento possiamo mostrare che l'energia necessaria dipende linearmente dallo spostamento $\mathbf{s}$, e scrivere quindi

$$L = \langle \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{s} \rangle.$$

Più in dettaglio, potremo scoprire che c'è tutto un piano in cui L vale zero, ecc.

Immagino già un'obiezione corale: "ma che bella scoperta! si sapeva che il lavoro in questione è il prodotto scalare della forza di gravità per lo spostamento, cambiato di segno!"

Infatti: solo che io mi ero vietato di parlare di prodotto scalare, ed è quindi interessante scoprire che di lavoro si può parlare ugualmente, vedendolo legato a un vettore covariante. Però ritiro subito la proposta, perché è sommamente artificiosa, visto che in realtà lo spazio ha una struttura euclidea, esiste il prodotto scalare, e non si vede quindi perché si dovrebbe far finta di non conoscerlo...

Però: e se accadesse che in qualche situazione si debba parlare di lavoro senza avere a disposizione il prodotto scalare? Guarda caso, è proprio ciò che capita in termodinamica... Ma non insisto: in effetti finché si resta nello spazio della fisica classica non c'è modo né necessità di tirare in ballo dei vettori covarianti che servano alla fisica. Fra poco vedremo meglio perché.

Il prodotto scalare

Abbiamo dunque visto che esistono due tipi di vettori: quelli di $\mathcal{V}$ sono controvarianti, quelli di $\mathcal{V}^*$ sono covarianti. Ovviamente chiunque abbia studiato fisica classica e non oltre, si chiederà: come mai non ne avevo mai sentito parlare prima? Ecco la spiegazione.

Nello spazio ordinario (quello della fisica, per intendersi) esiste qualcosa in più della struttura affine: come ho ricordato più volte, esiste la distanza fra due punti, la lunghezza dei vettori, quindi il prodotto scalare (suppongo noto che tutti questi concetti sono intimamente connessi).

Che cos'è un prodotto scalare in uno spazio vettoriale? Ne do una definizione diversa da quelle che probabilmente conoscete: non lo definisco né come "prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso" né come "somma dei prodotti delle componenti."

Invece dico (non io: qualunque libro di matematica dice così ...) che in uno spazio vettoriale è definito un *prodotto scalare* se è assegnata un'applicazione *bilineare simmetrica* $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, che quindi a ogni coppia di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ fa corrispondere un reale, che posso indicare con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

"Bilineare" vuol dire "lineare in entrambi gli argomenti"; "simmetrica" significa che non cambia scambiando gli argomenti: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

Per una corretta definizione di prodotto scalare occorre che l'applicazione non sia *degenere*, ossia che se $\mathbf{u}$ non è il vettore nullo non accade mai $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ per ogni $\mathbf{v}$; in altre parole, se trovo che per un dato $\mathbf{u}$ è sempre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, allora $\mathbf{u} = 0$.

Di solito si aggiunge un'altra condizione: che il prodotto scalare sia *definito positivo*, ossia $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ solo se $\mathbf{u} = 0$. Ma quest'ultima condizione non vale in relatività: ci torneremo.

Conviene vedere la definizione di prodotto scalare in un altro modo, scrivendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, dove $\mathbf{g}$ è il simbolo dell'applicazione che dicevo sopra. Il $\mathbf{g}$ così definito si chiama *tensore metrico*. È un "tensore simmetrico di tipo $\binom{0}{2}$": quella data (funzione bilineare ecc.) è una delle possibili definizioni di questo tipo di tensore.

Da controvariante a covariante e viceversa

Ma la cosa più importante è un'altra: fissiamo $\mathbf{u}$, e guardiamo $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ come funzione di $\mathbf{v}$. Questa è una funzione lineare, che a ogni $\mathbf{v}$ fa corrispondere lo scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$; ossia è un caso di vettore del duale.

In dettaglio: a ogni $\mathbf{u}$ di $\mathcal{V}$, attraverso il prodotto scalare, viene a corrispondere *in modo naturale* un $\boldsymbol{\sigma}$ di $\mathcal{V}^*$, tramite la relazione:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{7}$$

Ed è anche vero il viceversa. Provando a dimostrarlo si vedrebbe che è essenziale che il prodotto scalare non sia degenere, mentre non occorre che sia definito positivo.

Ecco il punto: se è definito il prodotto scalare, dei vettori duali *non ce n'è bisogno*, perché possono sempre esser sostituiti da vettori di $\mathcal{V}$, grazie alla (7). Questo spiega perché si possa vivere senza distinguere tra covarianti e controvarianti, visto che ogni vettore covariante ne genera uno controvariante, e viceversa.

Ma la semplificazione non è finita. Scelta una base $\mathbf{e}_i$, si ha

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^i v^k \, \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = g_{ik} \, u^i v^k$$

dove ho posto

$$g_{ik} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k.$$

La matrice g_{ik} è simmetrica per definizione, ed è definita positiva se lo è il prodotto scalare. Inoltre, dato che il prodotto scalare non è degenere, il determinante della matrice non è nullo.

Scriviamo ora la (7) in componenti.

$$\sigma_k v^k = g_{ik} u^i v^k \tag{8}$$

(ricordate che usiamo basi duali in $\mathcal{V}$ e in $\mathcal{V}^*$). Dalla (8), valida per ogni $\mathbf{v}$, segue

$$\sigma_k = g_{ik} u^i \tag{9}$$

che ci dice come ottenere le componenti di $\boldsymbol{\sigma}$ da quelle di $\mathbf{u}$, "abbassando gli indici." La (9) si può invertire, e così si esprimono le componenti di $\mathbf{u}$ mediante quelle di $\boldsymbol{\sigma}$, "innalzando gli indici" con la matrice inversa g^{ik}.

Basi ortonormali

Sappiamo che g_{ik} è simmetrica; se è anche definita positiva, sussiste un importante teorema: *con un cambiamento di base si può sempre portarla alla forma* $g_{ik} = \delta_{ik}$. Una tale base soddisfa dunque

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} \tag{10}$$

ossia è una base *ortonormale.*

Di regola si usano basi ortonormali, e allora succede che se $\boldsymbol{\sigma}$ e $\mathbf{u}$ sono legati dalla (7), e quindi le componenti dalla (9), *le loro componenti sono uguali.* In queste condizioni non c'è proprio senso a distinguere i due tipi di vettori: non soltanto sono in corrispondenza, grazie alla (7), ma hanno le stesse componenti. Finisce così che li si considera *lo stesso vettore* e non ci si pensa più.

Però ricordate: perché questo sia vero, occorre

a) che esista un prodotto scalare definito positivo

b) che si lavori sempre in una base ortonormale.

Relatività = metrica indefinita

Che succede in relatività? Succede che il prodotto scalare esiste, ma *non è* definito positivo. Allora non esiste una base che soddisfi la (10); al più si può ottenere che la matrice g_{ik} sia diagonale, con elementi diagonali uguali a 1 o a -1 (tre positivi e uno negativo o viceversa, a seconda delle convenzioni). Si usa ancora chiamare "ortonormale" questa base, ma bisogna ricordare la complicazione dei segni.

Stando così le cose, si possono ancora alzare o abbassare gli indici, ma c'è sempre qualche cambiamento di segno (uno o tre, a seconda della convenzione). Perciò non è indifferente usare un vettore covariante o controvariante: se li si confonde, si sbaglia di certo a causa di quei segni che abbiamo fra i piedi.

Riassumendo

Detto in breve:

1. Nella fisica newtoniana, elettromagnetismo incluso, non c'è alcuna ragione per distinguere co- e contro-varianza.
2. In relatività (ristretta ma anche generale) si può sempre convertire un vettore controvariante in covariante e viceversa, ma c'è almeno un gioco di segni.
3. Perciò ha senso dire che (quadri)velocità, corrente, accelerazione, impulso nascono come controvarianti. Lo stesso è vero, di conseguenza, per il (quadri)potenziale.

Questo che ho scritto è l'essenziale per restare alla RR, come avevo detto. Anche in quell'ambito, ci sarebbe da parlare di tensori di vario tipo, e ci sarebbe da trattare gli aspetti differenziali. Poi ci si potrebbe avventurare in mari più ampi, come la meccanica analitica, la termodinamica, e soprattutto la RG; ma ho scritto fin troppo...

Ben diverso sarebbe il discorso in una varietà generica, dove coordinate e vettori si trovano in una relazione più complicata, che lasciamo da parte.

P.S. Ovviamente tutti i commenti e critiche sono benvenuti...