E. Fabri *aprile 2014*

Frenamento di uno specchio in moto in un campo di radiazione nera

Il problema e il metodo di soluzione

Calcolare la forza di frenamento che risente uno specchio che si muove (perpendicolarmente alla sua superficie) in un campo di radiazione nera.

Ricordo che la radianza spettrale della radiazione nera è

$$I_\nu(\nu, T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{1}$$

e quella integrata sulla frequenza:

$$I(T) = \frac{2\,\pi^4 k^4}{15\,c^2 h^3}\, T^4. \tag{2}$$

Entrambe sono da intendersi come riferite all'elemento di angolo solido attorno a una data direzione. Poiché la radiazione nera è isotropa per definizione, la direzione non ha importanza; ma ne avrà in seguito.

Sia v la velocità dello specchio (modulo). Il procedimento che seguirò è quello di passare nel riferimento K' di quiete dello specchio, determinare la distribuzione della radiazione in questo rif., calcolare la quantità di moto ceduta allo specchio nella riflessione, e infine ritrasformare indietro la q. di moto da K' al rif. K "del laboratorio," ossia quello in cui la radiazione è isotropa e ha la forma data.

Leggi di trasformazione

Come detto, lo specchio si muove perpendicolarmente alla sua superficie: prendo questa direzione come asse z, col verso della velocità. Indico con ϑ l'angolo polare di una direzione generica; l'azimut φ non entrerà mai in gioco.

Un fotone che arriva dalla direzione ϑ nel piano (x, z) ha in K il 4-impulso

$$p = \frac{h\nu}{c}\,(1,\, -\sin\vartheta,\, 0,\, -\cos\vartheta)$$

mentre in K' avremo

$$p' = \frac{h\nu'}{c}\,(1,\, -\sin\vartheta',\, 0,\, -\cos\vartheta')$$

con ovvio significato dei simboli. La trasf. di Lorentz fornisce

$$\nu = \nu' \, \gamma \, (1 - \beta \cos \vartheta'). \tag{3}$$

Un'altra legge di trasformazione si ricava dall'invarianza di I_ν / ν^3 (v. per es. *Gravitation*, 22.6 alla fine). Ciò significa che per una fissata direzione (ϑ, φ in K, ϑ', φ in K$'$) avremo

$$\frac{I_\nu(\nu, T)}{\nu^3} = \frac{I'_\nu(\nu', T')}{\nu'^3}.$$

Occorre assumere che anche T si trasformi, altrimenti l'invarianza con l'espressione (1) sarebbe impossibile. Anzi, si vede che deve essere

$$\frac{\nu}{T} = \frac{\nu'}{T'}.$$

Dunque *in ogni data direzione* la radiazione in K$'$ ha lo spettro di Planck, ma con temperatura dipendente dalla direzione, stante la (3). Ne segue anche che la (2) vale pure in K$'$, ma con T dipendente da ϑ':

$$T'(\vartheta') = \frac{T}{\gamma \, (1 - \beta \cos \vartheta')}.$$

La quantità di moto

La radiazione che incide sullo specchio e si riflette cede una q. di moto che ha solo la componente z. Se S è l'area dello specchio, la sezione trasversale offerta alla radiazione è $S \cos \vartheta'$, e quindi la q. di moto ceduta per un dato elemento di angolo solido vale

$$\frac{2S}{c} \, I(T') \, \cos^2\vartheta' \, d\Omega' = \frac{2S}{c} \, I(T') \, \cos^3\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'$$

e la q. di moto totale ceduta per unità di tempo sarà

$$\begin{aligned} F'_1 = \frac{4\pi S}{c} \int_0^{\pi/2} I(T') \, \cos^3\vartheta' \, d\vartheta' &= A \int_0^{\pi/2} T'^4 \cos^3\vartheta' \, d\vartheta' = A \, \frac{T^4}{\gamma^4} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3\vartheta'}{(1 - \beta \cos \vartheta')^4} \, d\vartheta' \\ &= A \, \frac{T^4}{\gamma^4} \int_0^1 \frac{u^2 \, du}{(1 - \beta u)^4} = A \, \frac{T^4}{\gamma^4} \, \frac{1}{3(1-\beta)^3} \end{aligned}$$

dove ho posto per semplicità

$$A = \frac{8 \, \pi^5 k^4 S}{15 \, c^3 h^3}.$$

Ho usato il simbolo F'_1 perché si tratta di una forza, e l'indice $_1$ ricorda che ho considerato solo *una* faccia dello specchio. Notare che F'_1 denota il *modulo* della forza, che è diretta nel verso negativo dell'asse z.

Se anche l'altra faccia è riflettente, il calcolo si fa allo stesso modo, cambiando solo il segno di β. Sempre per il modulo si ottiene

$$F'_2 = A\,\frac{T^4}{\gamma^4}\,\frac{1}{3(1+\beta)^3}.$$

Ovviamente F'_2 è diretta nel verso positivo.

La forza risultante è

$$F' = F'_1 - F'_2 = \tfrac{2}{3}\,A\,T^4\,\beta\,\frac{3+\beta^2}{1-\beta^2}. \tag{4}$$

Espressione finale e commento

La (4) si riferisce a K′, ma la trasformazione a K è banale, perché una forza parallela alla velocità relativa dei due rif. è invariante. Abbiamo dunque la forma finale:

$$F = \frac{16\,\pi^5 k^4}{45\,c^3 h^3}\,S\,T^4\beta\,\frac{3+\beta^2}{1-\beta^2}. \tag{5}$$

L'espressione (5) della forza cercata mostra una dipendenza da T^4, che è ragionevole, visto che la densità di energia nella cavità ha la stessa dipendenza dalla temperatura. La forza è dispari in v, il che è ovvio per simmetria; va a ∞ quando $v \to c$, e anche questo era prevedibile. Infine la forza è (ovviamente) proporzionale all'area dello specchio.

Non era prevedibile l'esatta dipendenza da v, né il coefficiente. Non so se questa espressione sia già presente in letteratura.