E. Fabri *settembre 2016*

Riflessine su uno specchio in moto

Il problema

Sono interessato a onde e.m. piane monocromatiche, che si propagano nel vuoto in una direzione che prendo come asse x. L'onda viaggia nel verso delle x positive e si riflette su uno specchio in moto uniforme (velocità v nel verso positivo). Voglio trovare la relazione fra l'intensità S_i dell'onda incidente sullo specchio e quella S_r dell'onda riflessa.

Calcolo solo valori medi nel tempo di tutte le grandezze: energia, impulso forza... Uso unità di Gauss, quindi avrò densità di energia $U = E^2/4\pi$ e corrente di energia $S = c\,U$. Indicherò con A l'area dello specchio.

Primo metodo: trasf. di Lorentz

Siano E_i, E_r i moduli del campo elettrico incidente e riflesso (nel rif. K del laboratorio). Userò l'apice per indicare le grandezze calcolate nel rif. K$'$ dello specchio.

La legge di trasformazione dei campi, per un'onda piana diretta come x, è

$$E'_y = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c}\,B_z\right) \tag{1}$$

e inoltre $B_z = E_y$ per l'onda incidente (mentre $B_z = -E_y$ per quella riflessa). Quindi

$$E'_\mathrm{i} = k\,E_\mathrm{i} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{2}$$

Poi

$$E_\mathrm{r} = \gamma \left(E'_\mathrm{r} - \frac{v}{c}\,B'_\mathrm{r}\right) = k\,E'_\mathrm{r}. \tag{3}$$

Qui il segno "$-$" deriva da un doppio cambiamento di segno rispetto alla (1):
- la velocità di K rispetto a K$'$ è $-v$
- il diverso segno di B_z rispetto a E_y, di cui ho già detto.

Dalla (2) e dalla (3), esendo $E'_\mathrm{r} = E'_\mathrm{i}$:

$$E_\mathrm{r} = k^2 E_\mathrm{i} \qquad S_\mathrm{r} = k^4 S_\mathrm{i}.$$

Secondo metodo: quantistico

Indico con n_i, n_r il numero di fotoni che arrivano e tornano per unità di tempo, con ε_i, ε_r le rispettive energie. Abbiamo

$$S_\mathrm{i} = n_\mathrm{i}\,\varepsilon_\mathrm{i}/A \qquad S_\mathrm{r} = n_\mathrm{r}\,\varepsilon_\mathrm{r}/A.$$

Per l'energia (come per la frequenza) la legge di trasformazione è $\varepsilon_\mathrm{r} = k^2 \varepsilon_\mathrm{i}$ (effetto Doppler). Inoltre i numeri di fotoni si trasformano allo stesso modo (effetto Doppler sulle frequenze di emissione e ricezione). Quindi

$$S_\mathrm{r} = k^4 S_\mathrm{i}$$

come col primo metodo.

Terzo metodo: bilancio dell'energia

Supponiamo che al tempo $t = 0$ lo specchio sia in $x = 0$. Dopo un certo tempo T si troverà in $x = v\,T$. Voglio fare il bilancio dell'energia che in questo intervallo di tempo entra ed esce nella regione di spazio $x \geq 0$.

L'energia che nell'intervallo di tempo considerato attraversa il piano $x = 0$ propagandosi verso destra, è quella che inizialmente occupa un volume tra $x = 0$ e $x = -c\,T$, e vale $c\,T\,A\,U_\mathrm{i}$. Alla fine dell'intervallo quest'energia si trova in parte nello spazio tra $x = 0$ e $x = v\,T$; per il resto è stata assorbita dallo specchio. La quantità di energia assorbita è quindi

$$\mathcal{E}_\mathrm{i} = (c - v)\,T\,A\,U_\mathrm{i}. \tag{4}$$

Nello stesso intervallo di tempo della radiazione viene emessa verso sinistra dallo specchio. Alla fine dell'intervallo questa occupa lo spazio fra $x = -c\,T$ e $x = v\,T$ (posizione finale dello specchio). La quantità di energia in questione è

$$\mathcal{E}_\mathrm{r} = (c + v)\,T\,A\,U_\mathrm{r}. \tag{5}$$

In totale lo specchio ha ricevuto un'energia pari a $\mathcal{E}_\mathrm{i} - \mathcal{E}_\mathrm{r}$: dov'è finita quest'energia? Occorre tener presente che lo specchio si muove di moto uniforme, sebbene risenta una *pressione di radiazione* che fra breve calcoleremo. Quindi lo specchio dev'essere *frenato*, e l'energia ricevuta viene appunto dissipata dal freno. Se F è la forza dovuta alla pressione di radiazione, l'energia dissipata vale

$$\mathcal{E}_\mathrm{d} = F\,v\,T.$$

Calcoliamo F. Questo si fa osservando che la radiazione assorbita e quella emessa dallo specchio *trasportano q. di moto*: $\mathcal{E}_\mathrm{i}/c$ quella assorbita, $-\mathcal{E}_\mathrm{r}/c$ quella emessa (il segno meno perché la seconda è diretta verso sinistra). Pertanto la q. di moto acquistata dallo specchio è $(\mathcal{E}_\mathrm{i} + \mathcal{E}_\mathrm{r})/c$ che eguaglia $F\,T$. Ne concludo che l'energia ceduta al freno è

$$\mathcal{E}_\mathrm{d} = (\mathcal{E}_\mathrm{i} + \mathcal{E}_\mathrm{r})\,\frac{v}{c}.$$

Riassumendo:

$$\mathcal{E}_\mathrm{i} - \mathcal{E}_\mathrm{r} = (\mathcal{E}_\mathrm{i} + \mathcal{E}_\mathrm{r})\,\frac{v}{c}$$

$$\mathcal{E}_\mathrm{r} = \frac{c-v}{c+v}\,\mathcal{E}_\mathrm{i}$$

$$U_\mathrm{r} = \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^2 U_\mathrm{i} = k^4\,U_\mathrm{i}$$

che concorda col risultato ottenuto con gli altri due metodi.

Commento

Per quanto semplici, tutti e tre i metodi hanno dei punti delicati che andrebbero chiariti o approfonditi.

a) Le grandezze U e S per un'onda e.m. piana monocromatica non sono costanti né nel tempo né nello spazio: è per questo che ho parlato di media nel tempo (per tempi lunghi rispetto al periodo).

Consideriamo l'onda progressiva verso destra. Se si fissa un volumetto piccolo rispetto alla lunghezza d'onda, l'energia in esso contenuta oscilla con frequenza doppia dell'onda, tra un valore vicino a 0 e un massimo. Parallelamente anche il vettore di Poynting $\vec{S}$ oscilla, pur conservando sempre il verso della propagazione. Naturalmente il teorema di Poynting ci assicura che il flusso entrante di $\vec{S}$ eguaglia a ogni istante la derivata rispetto al tempo dell'integrale di volume di U.

Lo stesso accade per l'onda che va verso sinistra. Un'ulteriore complicazione si presenta quando le due sono presenti insieme: infatti esse hanno frequenze e lunghezze d'onda diverse; i campi si sommano, ma il campo risultante non ha in generale andamento periodico. Dato che $\vec{S}$ e U sono quadratici nei campi, anche se il teorema di Poynting continua a valere non è facile capire quello che succede. Intuitivamente accade questo: il quadrato di $\vec{E}$ è la somma di tre termini, che sono i quadrati dei campi delle due onde e il doppio del prodotto scalare. I primi due sono sempre positivi e mediati nel tempo danno il contributo separato delle due onde, per es. a U. Invece il terzo è oscillante e la sua media nel tempo è nulla. Quindi dal punto di vista energetico il contributo delle due onde, *se mediato nel tempo*, è additivo.

b) Qui il punto delicato sta nel collegamento tra la visione classica e quella quantistica. Il ragionamento che ho fatto tratta l'onda cone una pioggia di fotoni indipendenti, di cui infatti ho usato il numero e la frequenza degli arrivi.

In realtà un'onda piana monocromatica è tutt'altro che una "pioggia di fotoni": la sua traduzione quantistica è piuttosto uno *stato coerente* del campo quantizzato, nel quale il numero di fotoni non è neppure definito. Al contrario, lo stato del campo è una *sovrapposizione* di autostati del numero di fotoni, e non è quindi per niente ovvio come si possa giustificare il ragionamento fatto.

Infatti quel ragionamento è piuttosto valido in una situazione diversa: un *insieme statistico* di fotoni abbstanza localizzati ciascuno nello spazio e nel tempo per poterli trattare come particelle classiche. La fortuna è che la legge dell'intensità dell'onda riflessa ha validità così generale da potersi applicare a casi molto diversi; il che da un lato giustifica la trattazione, ma dall'altro richiederebbe un sostanzioso approfondimento del problema.

c) Il bello del terzo ragionamento sta nella sua universalità. Le ipotesi richieste sono minime (ma non banali): che le energie delle onde incidenti e riflesse siano additive; che si possa ragionare su energia, forza, lavoro come in un comune problena di meccanica.

Osserviamo anche che in questo approccio non entrano affatto le leggi di trasformazione relativistiche: di fatto non abbiamo mai cambiato rif., come invece si è fatto negli altri due casi. Il carattere intrinsecamente relativistico del problema appare solo nella relazione fra energia e q. di moto: $P = \mathcal{E}/c$. Anche per questo lo trovo un approccio più "fisico," più significativo.