E. Fabri *agosto 2023*

Rettangolo geodetico in coordinate di Rindler

Problema e notazioni

Voglio costruire (con `gnuplot`) la figura di un rettangolo formato da due geodetiche di tipo tempo e due di tipo spazio. Più precisamente, se (ct, z) sono coord. di Minkowski, e (u, w) coord. di Rindler, il rettangolo ha due lati $z = \text{cost.}$ ($z = z_1$ e $z = z_2$, $z_1 < z_2$) e due lati $t = \text{cost.}$ ($t = -t_1$ e $t = t_1$, $t_1 > 0$).

Indicherò con 1,2,3,4 i vertici, in senso antiorario partendo da

$$1 : t = t_1, \quad z = z_1.$$

Scelgo per semplicità un rettangolo simmetrico rispetto all'asse $c\,t$.

Equazioni dei lati

Le trasf. di coord. da Rindler (u, w) a Minkowski $(c\,t, z)$ sono

$$\begin{aligned} c\,t &= w \sinh \frac{g\,u}{c^2} \\ z &= w \cosh \frac{g\,u}{c^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Le equazioni delle geodetiche sono

$$\begin{aligned} \text{tipo tempo}: &\quad w\,\cosh \frac{g\,u}{c^2} = \text{cost.} \\ \text{tipo spazio}: &\quad w\,\sinh \frac{g\,u}{c^2} = \text{cost.} \end{aligned}$$

e quindi le eq. dei lati:

$$\begin{aligned} \text{lato 12}: &\quad w = \frac{c\,t_1}{\sinh(gu/c^2)} \\ \text{lato 23}: &\quad w = \frac{z_2}{\cosh(gu/c^2)} \\ \text{lato 34}: &\quad w = -\frac{c\,t_1}{\sinh(gu/c^2)} \\ \text{lato 41}: &\quad w = \frac{z_1}{\cosh(gu/c^2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

In realtà le (2) non sono sufficienti, perché non danno il campo di variazione di u. Questo si ottiene dalle (1) tenendo presenti gli intervalli in cui variano z

per le geodetiche di tipo tempo e ct per quelle di tipo spazio, che sono:

$$\begin{aligned}
&\text{lato 12}: \quad z_1 \le z \le z_2 \\
&\text{lato 23}: \quad -c\,t_1 \le c\,t \le c\,t_1 \\
&\text{lato 34}: \quad z_1 \le z \le z_2 \\
&\text{lato 41}: \quad -c\,t_1 \le c\,t \le c\,t_1.
\end{aligned}$$

Traduzione per `gnuplot`

In `gnuplot` conviene scrivere le equazioni in forma parametrica, assumendo come parametro $t \in [-1, 1]$, ponendo $x = g\,u/c^2$ e $y = w$. Per i lati 12 e 34 definiremo

$$z = f(t) = \tfrac{1}{2}\,[z_1 + z_2 + t\,(z_2 - z_1)]$$

mentre per i lati 23 e 41

$$c\,t = h(t) = c\,t_1\,t.$$

Le eq. per i lati si ottengono dividendo tra loro le (1):

$$\frac{c\,t}{z} = \mathrm{tgh}\,x$$

e risolvendo rispetto a x:

$$x = \tfrac{1}{2}\,\log\frac{z + c\,t}{z - c\,t}.$$

L'eq. per y si ottiene risolvendo rispetto a w l'una o l'altra delle (1). Ne segue per i 4 lati risp.

$$\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{2}\,\log\frac{z + c\,t_1}{z - c\,t_1} & y &= \frac{c\,t_1}{\sinh x} \\
x &= \tfrac{1}{2}\,\log\frac{z_2 + c\,t}{z_2 - c\,t} & y &= \frac{z_2}{\cosh x} \\
x &= \tfrac{1}{2}\,\log\frac{z - c\,t_1}{z + c\,t_1} & y &= -\frac{c\,t_1}{\sinh x} \\
x &= \tfrac{1}{2}\,\log\frac{z_1 + c\,t}{z_1 - c\,t} & y &= \frac{z_1}{\cosh x}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Nelle (3) i parametri liberi sono 3: $c\,t_1$, z_1, z_2 con la condizione $c\,t_1 < z_1 < z_2$.

In pratica converrà definire

$$F(a, b) = \tfrac{1}{2}\,\log\frac{a + b}{a - b}$$

e poi definire per i 4 lati 4 funzioni per la x:

$$
\begin{aligned}
G_1(t) &= F(f(t), c\,t_1) \\
G_2(t) &= F(z_2, h(t)) \\
G_3(t) &= F(f(t), -c\,t_1) \\
G_4(t) &= F(z_1, h(t))
\end{aligned}
$$

e 4 per la y

$$
\begin{aligned}
H_1(t) &= c\,t_1/\sinh[G_1(t)] \\
H_2(t) &= z_2/\cosh[G_2(t)] \\
H_3(t) &= -c\,t_1/\sinh[G_3(t)] \\
H_4(t) &= z_1/\cosh[G_4(t)].
\end{aligned}
$$