Il lato fisico della probabilità

E. Fabri

Dipartimento di Fisica dell'Università – Pisa

———— ∘ ————

Relazione al Convegno sulla Didattica della Matematica
Viareggio, 11 settembre 1990

———— ∘ ————

Da alcuni anni l'argomento "probabilità" è entrato a far parte dei programmi di matematica della nostra scuola, a tutti i livelli. Non si può che giudicare positivamente tale innovazione, che consente di colmare una lacuna nella formazione dei giovani. È ben noto che l'introduzione della probabilità è stata accompagnata da un ampio dibattito, tra i matematici che lavorano in ambito didattico, sulle scelte di contenuti, sui metodi didattici, ecc.; dibattito che ha certo contribuito a evidenziare — e in molti casi risolvere — i problemi inerenti, e a sensibilizzare gli insegnanti, fornendo altresì loro validi strumenti di lavoro.

Dopo questa doverosa premessa, debbo però aggiungere che a mio parere il dibattito avrebbe forse guadagnato da un allargamento a studiosi di altre discipline, che della probabilità fanno uso, e che perciò possono considerarla da punti di vista diversi da quello più naturale al matematico. A posteriori, mi sembra di poter dire che in effetti sia nei programmi, sia nei testi, sia — per quanto ne so — nella pratica dell'insegnamento sono rimasti in secondo piano alcuni aspetti, e non risolti alcuni problemi. Il possibile risultato è che l'educazione "probabilistica" degli allievi riceva un taglio un po' unilaterale, che potrebbe sminuirne l'efficacia pratica e il valore formativo. È a questi aspetti, visti dal punto di osservazione — limitato e sicuramente parziale — di un fisico, che intendo dedicare il mio intervento.

L'esempio della geometria

Per introdurre il discorso sulla probabilità conviene trattare brevemente un esempio più "canonico": la geometria. È pacifico (credo) che la geometria ha un fondamento empirico nell'esperienza fisica; questo fatto è sempre stato ben presente ai matematici:

> "In altri termini, la geometria non può essere separata dalla fisica se non per astrazione: bisogna risolvere la concezione astratta nella visione concreta di una geometria che faccia corpo con la fisica e trovi il suo prolungamento naturale in questa disciplina." [1]

Tuttavia questa relazione ha avuto momenti diversi. Grosso modo fino alla fine del '700 è prevalsa una visione di "necessità a priori": la geometria non poteva essere che quella, e l'accordo coi fatti veniva risolto in termini generalmente metafisici. La scoperta delle geometrie non euclidee, e la progressiva affermazione della matematica come sistema ipotetico-deduttivo (culminata alla fine del secolo scorso con l'assiomatizzazione di Hilbert della geometria) ha modificato il rapporto: sono possibili quante geometrie si vuole, col solo obbligo della coerenza logica; l'accordo con la realtà è questione a parte, di natura fisica, e non matematica. Poco dopo, la relatività generale mostrava che in effetti la geometria dello spazio fisico (meglio: dello spazio-tempo) non è euclidea, se non approssimativamente su piccole regioni: già nel sistema solare le deviazioni sono oggi misurabili.

Ormai esiste un accordo, credo generale, sul fatto che il rapporto fra teoria e realtà — in qualsiasi parte della fisica — consiste di quattro momenti:

– costruzione di un sistema assiomatico, i cui assiomi sono basati sull'esperienza, ma ne sono logicamente indipendenti
– elaborazione matematica della teoria
– formulazione dei "postulati interpretativi," che permettono di correlare gli oggetti astratti della teoria con le osservabili
– controllo sperimentale, con eventuale revisione degli assiomi, ecc. (in un ciclo potenzialmente infinito).

È perciò bene distinguere due accezioni del termine "geometria": quello di una teoria matematica completamente autonoma (le varie "geometrie" che sono materie d'insegnamento universitario) e quello di una teoria fisica con un'essenziale parte matematica (la si potrebbe chiamare "fisica dello spazio," se il termine non fosse già occupato). In questo secondo senso la geometria non differisce dalla meccanica, dall'elettrostatica, dalla termodinamica, ecc. Mi sembra opportuno fissare bene questo punto, in quanto se è vero che i fisici spesso tendono a sottovalutare il ruolo (che non è solo di strumento di calcolo, ma almeno di "strumento di pensiero") che ha la matematica, è anche vero che i matematici tendono a considerare la parte matematica di una teoria come autosufficiente (il che è corretto, come abbiamo visto, ma in un senso ben determinato) e a lasciare in ombra il momento del confronto con la realtà, prima e dopo la costruzione della teoria.

In apparenza la visione che ho delineata all'inizio è riconosciuta nella didattica ai vari livelli di scuola, sia nella pratica, sia nei testi; però non si può fare a meno di notare che il fondamento empirico della geometria è spesso presentato in modo troppo riduttivo: ad es. facendo ricorso a un'oscura "intuizione" di cui tutti saremmo in possesso. Se ciò può esser giustificato nella scuola primaria, e forse nella media inferiore, già nel biennio superiore sarebbe giusto andare un po' più a fondo: le basi della nostra fiducia nella geometria euclidea come strumento per l'interpretazione della realtà sono molto più solide, in quanto consistono di una moltitudine di esperimenti e misure di altissima precisione, implicite in gran parte della fisica — e della tecnica — di oggi. Si pensi, per fare un solo esempio, a quanto di geometria euclidea è sottinteso nel successo delle missioni spaziali, come quella del Voyager 2, che è arrivato fino a Nettuno! (Il che non contraddice quanto detto sopra circa le deviazioni misurabili dalla geometria euclidea: si tratta di effetti più piccoli per qualche ordine di grandezza, e osservabili solo in circostanze speciali.)

Le diverse "concezioni" della probabilità

Il ruolo di una teoria matematica della probabilità è quello di fornire un apparato concettuale — e metodi di calcolo pratici — comuni a situazioni le più diverse possibili; ma anche in questo caso, come per la geometria, la teoria matematica non può sostituire l'analisi scientifica dei casi concreti, che non appartiene alla matematica e va condotta con strumenti, anche concettuali, ben diversi.

Inoltre per la probabilità la situazione è del tutto differente da quella della geometria, perché non c'è *un unico fondamento empirico*, ma tanti quante sono le situazioni concrete, fra le quali ci sono differenze essenziali: lanci di dadi, tabelle di mortalità, errori di misura, sistemi caotici, ecc. sono casi *sostanzialmente diversi*, e queste differenze andrebbero chiaramente evidenziate.

Le diverse "concezioni" della probabilità non stanno sullo stesso piano: l'assiomatica (nella versione di Kolmogorov, o in quella di Keynes) costituisce la base rigorosa per la struttura matematica, che è "neutra" di fronte alla realtà, ma essenziale per le applicazioni e anche per lo stesso fondamento empirico. Infatti quasi sempre il confronto di una teoria con la realtà non si fa direttamente sugli assiomi o su conseguenze elementari, ma su sviluppi anche complessi: nel caso della probabilità un esempio potrebbero essere i teoremi del limite centrale.

La concezione classica, la frequentista e la soggettivista affrontano invece il problema di come *stimare* le probabilità nelle situazioni reali, e quindi *non sono matematica*. Forse sono applicabili tutte, in riferimento a situazioni diverse.

La concezione classica ha il suo fondamento in situazioni "simmetriche," in cui sembra ragionevole postulare un'equiprobabilità. Ma restano due problemi: uno relativo alla simmetria, l'altro che si tenta di risolvere col "postulato empirico del caso."

Non è banale affermare che le sei facce di un dado sono equiprobabili *per simmetria*, e tanto meno la si può considerare un'affermazione valida a priori. Il comportamento di un sistema fisico sotto simmetrie va studiato come una legge di natura: l'esempio della non conservazione della parità è abbastanza recente per insegnare.

Detto in estrema sintesi: fino a poco più di 30 anni fa si dava per scontato che le leggi fisiche fossero indifferenti rispetto all'orientamento spaziale (destra-sinistra): se costruisco due orologi che siano l'uno l'esatta immagine speculare dell'altro (fig. 1) i due orologi funzioneranno nello stesso modo. E se un sistema fisico ha la proprietà di coincidere a un certo istante con la sua immagine speculare, questo deve restare vero anche nel suo comportamento futuro. Un esempio può essere un sasso che cade da fermo: il fatto che lo stato iniziale è simmetrico rispetto a ogni piano verticale porta a prevedere che la traiettoria dovrà essere verticale (se si trascura la forza di Coriolis, che infatti "rompe" la simmetria) (fig. 2). L'esperimento fondamentale sulla "non conservazione della parità" mostrò invece che un sistema di questo tipo (un certo nucleo atomico) emetteva elettroni (decadimento β) di preferenza in una certa direzione, violando la simmetria (fig. 3).

Dunque la simmetria nel comportamento di un sistema fisico non può essere stabilita "a priori": può essere al più ipotizzata. Sarebbe fuorviante per gli allievi se questi aspetti restassero in ombra.

Il postulato empirico del caso (che *non è* la legge dei grandi numeri!) afferma che *di fatto*, su molte prove, la frequenza relativa riesce vicina alla probabilità. Ha dunque il ruolo di un postulato interpretativo: la grandezza matematica "probabilità" ha come corrispettivo fisico la "frequenza relativa." Non c'è niente di misterioso, più di quanto non lo sia qualunque altro postulato interpretativo. È vero che non possiamo essere certi dell'esatta concordanza, a causa delle fluttuazioni (a proposito: vedo come un obbiettivo didattico importante far capire che *in generale* le fluttuazioni vanno come $1/\sqrt{n}$; tra l'altro, questo basterebbe per discutere il significato di molti impieghi distorti della statistica); ma ciò accade in qualsiasi esperimento. Il criterio della "certezza morale" di J. Bernoulli non è diverso dalla scelta di un "limite di fiducia," come si dice oggi nella pratica di ogni scienza sperimentale.

Questa discussione risolve anche il problema della concezione frequentista, ossia l'ambiguità del "limite." In pratica si tratta solo di dire che l'unico criterio possibile per valutare la correttezza di un'ipotesi di probabilità è di metterla a confronto con una serie sperimentale, usando le tecniche statistiche standard. Non c'è conflitto con la concezione classica: ipotesi di simmetria possono bene essere di guida, quando possibile; in altri casi potranno esserci altri criteri; ma l'ultima parola sta sempre all'esperimento.

La concezione soggettivista può essere discussa da due punti di vista. In senso filosofico, si può ritenere che quello sia l'unico fondamento possibile, in tutti i casi, per i giudizi di probabilità (posizione che non mi sento di sottoscrivere). In senso pratico, si può asserire che esistono situazioni "d'incertezza" in cui non ci sono fondamenti obbiettivi per una stima di probabilità, ma le tecniche probabilistiche possono ugualmente riuscire utili. Mi riferisco ad es. a molte applicazioni economiche, di ricerca operativa, e simili.

Un esempio semplice è il totocalcio. Non esistono criteri oggettivi per attribuire le probabilità ai tre esiti (1, X, 2) di ciascun incontro, e non ha neppure senso pensare a una stima di frequenze; tuttavia un'attribuzione soggettiva mi può essere utile, se voglio decidere che schedina giocare. Una volta assegnate le "mie" probabilità, un programma a calcolatore può indicarmi (in teoria!)

le combinazioni più probabili. S'intende che se le mie stime sono sbagliate, non farò né 13 né 12.

Raccomanderei comunque di non lasciar passare, senza volerlo, un messaggio soggettivista anche quando non è l'unico possibile. A mio giudizio, gli enunciati che evidenziano la probabilità come la "razionalizzazione delle situazioni d'incertezza" corrono appunto questo pericolo.

Analisi di alcuni modelli tipici

Il modello meccanico

Questo modello include in linea di principio tutti i problemi di dadi, monete, urne, roulette ... al limite carte. Abbiamo uno "spazio delle fasi," un insieme finito di "attrattori," ciascuno col proprio "bacino." Il problema è di nuovo matematico, ma appartiene alla teoria dei sistemi dinamici: in quali casi i vari bacini sono così intrecciati, che in ogni insieme anche piccolo (ma non quanto si vuole) di condizioni iniziali, siano rappresentati con uguale misura tutti i bacini?

Vediamolo un po' più in dettaglio (anche se con qualche semplificazione e libertà di linguaggio). Il dado è un corpo rigido: ha 6 gradi di libertà, e perciò lo spazio delle fasi Σ ha dimensione 12. In questo spazio supponiamo definita la dinamica del sistema (campo vettoriale di velocità), che però non occorre conoscere esattamente per la nostra discussione. Importante è sapere che il campo avrà 6 attrattori, corrispondenti alle 6 posizioni di riposo finali del dado. Ogni attrattore ha un bacino: l'unione delle curve di fase che terminano in quell'attrattore (fig. 4). (A rigore, parlando di 6 attrattori, sto eseguendo un quoziente rispetto al gruppo delle traslazioni e rotazioni in un piano orizzontale...)

Le condizioni iniziali sono un punto di Σ, e chiamo Γ il più piccolo insieme di condizioni iniziali che si possono realizzare in un lancio, anche se si cerca di riprodurle con la massima cura; Γ avrà sempre misura finita. Se Γ fosse tutto contenuto in un unico bacino, saremmo in grado di predeterminare l'esito del lancio. Ci aspettiamo invece che Γ abbia intersezione non nulla con tutti i bacini, e che queste intersezioni abbiano (per simmetria?) uguali misure. Il problema matematico consiste nel dimostrare questa congettura. (Ci sono in realtà alcuni punti delicati — ad es. l'uso della misura — su cui non posso soffermarmi.)

Da un punto di vista empirico, è chiaro che occorrono delle cautele (la simmetria non basta, come di solito si crede): infatti si può "barare," ossia influire sullo stato finale, con una scelta abile delle condizioni iniziali. Ad es. in un gioco di carte tutto sta nel come le carte sono state mischiate.

Per dirla in due parole: lanciare i dadi è un esperimento di fisica!

Il modello "genetico"

Questo si riferisce a esempi tratti dalla genetica delle popolazioni. È in linea di principio simile a quello meccanico: si assume che i geni si rimescolino come delle carte da gioco, anche se sull'esatta meccanica ne sappiamo molto meno. C'è da osservare però che il fondamento delle ipotesi (ad es. d'indipendenza di tutti gli accoppiamenti di alleli) può essere solo verificato a posteriori (concezione "frequentista"!) e spesso i dati sono abbastanza scarsi. Solo per fare un esempio: è ben noto che la frequenza di maschi alla nascita è > 0.5, eppure il numero di cromosomi X e Y nei gameti maschili dovrebbe essere lo stesso... Non so abbastanza di genetica per conoscere la spiegazione, ma quanto detto basta per mostrare che semplici ipotesi di equiprobabilità non funzionano sempre. Comunque l'interpretazione dei dati è compito della genetica, non della matematica, sia pure della probabilità: questo andrebbe esplicitato, e lo si fa di rado, per non dire mai.

Usi "delicati" del termine "probabilità"

Vediamo alcuni esempi:

1. ...la probabilità che un motore di un aereo si blocchi...
2. Qual'è la probabilità che domani piova?
3. Qual'è la probabilità che Pierino (10 anni) arrivi a 40 anni?

In casi come questi, ci si dovrebbe sempre chiedere se ha senso parlare di probabilità. Spesso il discorso ha significato statistico, ma bisogna essere cauti nell'applicazione.

1. Può darsi ad es. che le statistiche dicano che su 1000 voli 5 volte si è bloccato un motore. Abbiamo allora due problemi: uno d'inferenza statistica, l'altro di applicazione ai casi singoli. Possiamo dire che la probabilità è 0.005? La teoria ci dice che un campione così esiguo dà informazioni incerte: un fisico direbbe $n = 5 \pm \sqrt{5}$, da cui $p = 0.0050 \pm 0.0022$. Inoltre, l'applicabilità al caso singolo dipende dalla misura in cui esso corrisponde al campione. Ad es. se l'aereo appartiene a una compagnia in difficoltà finanziarie, che sta risparmiando sulla manutenzione, c'è da stare molto meno tranquilli...

2. Discorso analogo per la probabilità che domani piova: potremo ritenere di ricavarla dalle statistiche, ma abbiamo diverse possibilità:

– la statistica su tutto il 1989, in tutta Italia
– quella del mese di settembre, in tutta Italia, negli ultimi 10 anni
– c.s., ma ristretta a Viareggio
– c.s., ma conoscendo il tempo del giorno precedente.

Dovrebbe essere chiaro che presa in sé l'espressione "probabilità che domani piova" non ha significato, né in senso oggettivo, né soggettivo.

3. Se 95 nati su 100 arrivano a 10 anni, e 80 arrivano a 40 anni, la probabilità richiesta è 80/95 (fig. 5): ma discutiamo. Anzitutto, la statistica è tratta da un campione, che bisogna sapere quanto sia significativo (per es. le cause di morte cambiano nel tempo). Poi bisogna precisare che il calcolo fatto assume in sostanza uno schema di urne: ci sono 100 palline, di cui 5 nere (quelli che muoiono prima dei 10 anni) 15 rosse (i morti fra 10 e 40 anni) e 80 bianche. Si estrae una pallina e si ripete l'estrazione se è nera: qual'è la probabilità che esca bianca? Stiamo dunque supponendo di scegliere un ragazzo *a caso* nell'universo su cui si è fatta la statistica. Ma se il ragazzo è mio figlio, non è scelto a caso: è un caso determinato, con certi caratteri genetici, certe condizioni socio-ambientali, ecc. che lo possono staccare dalla scelta casuale. Perciò non ha senso chiedersi "qual'è la probabilità che mio figlio arrivi a 40 anni"!

Il teorema di Bayes: esempi

Sulla validità di un test diagnostico.

Mi preoccupo di sapere se sono affetto da una certa malattia rara, che colpisce una persona su 10000. Il test diagnostico ha dato, in prove precedenti, risposta errata nel 5% dei casi (in entrambi i sensi: sia falsi positivi sia falsi negativi). Nel mio caso, il test dà risultato positivo: "che probabilità ho di essere malato?"

Si ragiona così: su un milione di persone, 999900 sono sane, e 100 malate. Sulle sane, il test dà esito positivo (errato) in 49995 casi; sulle malate, dà esito positivo (giusto) in 95 casi: in tutto 50090 risposte positive, di cui solo 95 sono corrette. La probabilità richiesta è dunque $95/50090 \simeq 0.0019$. Si presenta di solito il ragionamento mediante un grafo ad albero (fig. 6). In termini più formali, stiamo applicando il teorema di Bayes: se S, M sono gli eventi (ipotesi) "sano" e "malato," P e N gli eventi "esito positivo," "esito negativo," i dati sono:

$$\begin{aligned} p(S) &= 0.9999; & p(P|S) &= 0.05; & p(N|S) &= 0.95 \\ p(M) &= 0.0001; & p(P|M) &= 0.95; & p(N|M) &= 0.05 \end{aligned}$$

e dal teorema di Bayes:

$$p(M|P) = \frac{p(P|M)\,p(M)}{p(P|M)\,p(M) + p(P|S)\,p(S)} = \frac{0.95 \times 0.0001}{0.95 \times 0.0001 + 0.05 \times 0.9999}$$

che dà lo stesso risultato.

Anche qui valgono le osservazioni fatte circa la mortalità: chiedersi la probabilità di avere una certa malattia è piuttosto "misleading": dopo tutto, io la malattia ce l'ho oppure no, anche se non ne sono certo. Ciò non toglie che è molto utile sapere che i test diagnostici per malattie rare sono ben poco significativi!

Sul valore delle testimonianze oculari

Un uomo è stato rapinato in una strada buia; afferma che il rapinatore era un negro. Nelle prove successive, in condizioni di luce simili, riconosce correttamente il colore dell'assalitore 80 volte su 100. Qual'è la probabilità che il rapinatore fosse veramente un negro? (Questo esempio è tratto da un libro di J. A. Paulos [2]: ho preso la citazione da [3].)

Supponiamo che i rapinatori negri siano 1/9 dei bianchi (perché i bianchi in quella città sono molti di più dei negri). Allora dal teorema di Bayes si ricava che la probabilità a posteriori (dopo l'identificazione) che il rapinatore sia negro è 0.31, e non 0.8 come si potrebbe credere ingenuamente. Sarà evidentemente molto utile che i giurati si rendano conto che la testimonianza è assai meno attendibile di quanto sembrava; ma resta il fatto che l'accusato non è un individuo scelto a caso: lui sa se è colpevole o innocente!

In conclusione, si dovrebbe chiarire che l'uso del teorema di Bayes richiede:

a) che siano definite, e note, le $p(H_i)$

b) che siano definite, e note, le $p(A|H_i)$

c) che si sia fatta una scelta *casuale* fra le varie ipotesi, e una successiva scelta casuale dei possibili esiti, dalla quale si è ottenuto A.

È chiaro che i punti critici sono *a*) e soprattutto *c*), che quasi mai corrisponde alle situazioni reali. (Problema: che cos'è una "scelta casuale"?)

Conclusioni didattiche

Non mi sono proposto, in questo intervento, di dare suggerimenti concreti per la migliore didattica della probabilità; ho voluto solo segnalare alcuni punti critici, che a mio parere sono piuttosto trascurati. Alcune conclusioni di carattere generale sono però evidenti.

Anche se l'insegnante di matematica non si volesse impegnare nella discussione delle stime di probabilità, prendendole in certo senso per buone, dovrà in ogni caso:

a) essere sensibile al problema, che esula da una pura cultura matematica;

b) avere una base culturale propria — sia pure minima — sulle scienze che della probabilità fanno uso, in primo luogo la fisica;

c) mettere bene in chiaro che stime di partenza e verifiche escono dalla teoria matematica della probabilità.

——— ∘ ———

[1] F. Enriques, 1938; citato nell'introduzione di L. Lombardo Radice a *Natura ragione, storia* di F. Enriques (Einaudi 1958).

[2] J. A. Paulos: *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences* (Hill & Wang, 1988).

[3] *Scientific American*, March 1990, p. 91.