E. Fabri *luglio 2024*

Esempi di spazio-tempo piatto con sezioni spaziali curve e di spazio-tempo curvo con sezioni spaziali piatte

Oggetto

Voglio dare due esempi di spazio-tempo con proprietà in certo senso opposte:

1) Uno spazio-tempo piatto (Minkowski) con sezioni spaziali curve. Questo significa partire delle usuali coord. (t, x, y, z) e definire una coord. u che sostituisca t come coord. temporale, in modo che le sezioni $u =$ cost. siano curve.

2) Cosqtruire uno spazio-tempo curvo le cui sezioni spaziali sono piatte. Vedremo che non serve inventare niente: uno spazio-tempo del genere è fondamentale in cosmologia.

Ripasso del caso euclideo

In 3D si usano coord. cartesiane (x, y, z) e coord. sferiche (r, ϑ, φ). Le relazioni sono

$$\begin{aligned} x &= r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= r\,\cos\vartheta \end{aligned}$$

e la metrica:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2).$$

In questo caso lo spazio $\mathbb{R}^3$ è "fogliettato" per es. secondo le superfici $z =$ cost. che sono piani euclidei, oppure secondo le $r =$ cost. che sono sfere 2D di raggio r, quindi *non euclidee.*

In 4D si usano coord. cartesiane (u, x, y, z) e coord. sferiche $(w, \chi, \vartheta, \varphi)$. Le relazioni sono

$$\begin{aligned} u &= w\,\cos\chi \\ x &= w\,\sin\chi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= w\,\sin\chi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= w\,\sin\chi\,\cos\vartheta \end{aligned}$$

e la metrica:

$$ds^2 = du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dw^2 + w^2\bigl[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)\bigr].$$

In questo caso lo spazio $\mathbb{R}^4$ è fogliettato per es. secondo le superfici $u =$ cost. secondo spazi $\mathbb{R}^3$ euclidei, oppure secondo le $w =$ cost. che sono sfere 3D di raggio w, quindi *non euclidee.*

Spazio di Minkowski

Coord. cartesiane (t, x, y, z) e coord. "iperboliche" $(\bar{t}, \chi, \vartheta, \varphi)$. Relazioni;

$$\begin{aligned}
t &= \bar{t}\,\cosh\chi \\
x &= \bar{t}\,\sinh\chi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\
y &= \bar{t}\,\sinh\chi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\
z &= \bar{t}\,\sinh\chi\,\cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Metrica:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = d\bar{t}^2 - \bar{t}^2\bigl[d\chi^2 + \sin^2\!\chi\,\bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\,d\varphi^2\bigr)\bigr]. \qquad (1)$$

Anche qui lo spazio-tempo di Minkowski è fogliettato per es. secondo le superfici $t =$ cost. e i "fogli" sono spazi $\mathbb{R}^3$ euclidei, oppure secondo le $\bar{t} =$ cost. che sono sfere 3D di raggio $\bar{t}$, *non euclidee*.

Modello cosmologico FLRWΛ

In questo modello si usano di solito coord. t, r, ϑ, φ e la metrica è

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t)\,\bigl[dr^2 + r^2\bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\,d\varphi^2\bigr)\bigr]. \qquad (2)$$

la funzione $a(t)$ (parametro di scala) dipende dai parametri del modello e ora non occorre entrare in dettagli.

Note

Gli esempi relativistici (1), (2) hanno in comune la struttura della metrica:

- una coord. temporale con coeff. 1
- assenza di termini misti spazio-tempo, come $dt\,dr$
- parte spaziale con poche differenze: $\bar{t}^2$ in (1) diventa $a^2(t)$ in (2); $\sin^2\!\chi$ in (1) diventa r^2 in (2).

La (2) rappresenta uno spazio-tempo curvo a causa del parametro di scala, che può variare nel tempo in un modi dipendente dai parametri del modello. Invece la curvatura delle sezioni spaziali in (1) dipende dal fattore $\sin^2\!\chi$.