E. Fabri *giugno 2018*

Precessione del perielio di Mercurio dovuta alla perturbazione degli altri pianeti

Introduzione

Mi propongo di ricavare, per via abbastanza elementare, l'effetto che hanno le perturbazioni degli altri pianeti sul perielio di Mercurio. Seguirò il metodo di Newton, come è descritto nelle mie *Lezioni di astronomia* [1]. Però riprenderò la trattazione daccapo, per renderla più vicina al caso che ci serve.

La faccio precedere da una sommaria esposizione del *problema dei due corpi*, anche questa adattata al presente problema, e ancora secondo la linea e con le notazioni delle *Lezioni* sopra citate, ma al cap. M1 [2].

Il problema dei due corpi

Ci occupiamo del moto di un pianeta di massa m nel campo gravitazionale del Sole, di massa $M \gg m$; con questa ipotesi possiamo supporre M fisso. Il moto di m avviene in un piano, nel quale assumiamo coordinate polari r, φ.

Le prime due relazioni di cui avremo bisogno sono le espressioni dell'energia

$$E = \tfrac{1}{2}\, m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right) - \frac{G\, M\, m}{r} \tag{1}$$

e del momento angolare

$$J = m\, r^2 \dot{\varphi}. \tag{2}$$

E e J sono *costanti del moto* del problema.

Nota: Il momento angolare è un vettore; nella (2) J sta a indicare la componente di questo vettore in direzione perpendicolare al piano dell'orbita, non il modulo. Quindi J ha un segno. Nel sistema solare reale questo segno è lo stesso per tutti i pianeti, e non c'è niente che impedisca di orientare il piano orbitale in modo che sia positivo.

La conoscenza di E (negativa per un'orbita ellittica) e di J determinano forma e dimensioni dell'ellisse. In coordinate polari, con origine in un fuoco e perielio sul semiasse x positivo, l'equazione dell'ellisse è

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\varphi} \tag{3}$$

dove p è il *parametro*:

$$p = a\,(1 - e^2) \tag{4}$$

con *a semiasse maggiore*, *e eccentricità*. Le relazioni tra i parametri geometrici e le costanti del moto sono le seguenti:

$$a = \frac{G\,M\,m}{2\,|E|} \qquad p = \frac{J^2}{G\,M\,m^2} \tag{5}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}. \tag{6}$$

Dalle (5), (6) si vede che data l'energia (quindi dato il semiasse maggiore) il momento angolare determina l'eccentricità, che è tanto minore quanto più grande J.

Anche la legge oraria è determinata, e in particolare il periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\,M}} \tag{7}$$

(terza legge di Keplero). Dato che a dipende da E ma non da J, lo stesso accade per T: orbite di uguale semiasse e diversa eccentricità hanno lo stesso periodo.

Il metodo di Newton

Consideriamo le equazioni del moto (piano) in coordinate polari, per la forza centrale $-GMm/r^2$:

$$m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2) = -\frac{G\,M\,m}{r^2} \tag{8}$$

$$m\,(r^2\ddot{\varphi} + 2\,r\,\dot{r}\,\dot{\varphi}) = 0. \tag{9}$$

Dalla (9) si ricava $m\,r^2\dot{\varphi} = J = \text{cost.}$, ossia la (2). Eliminando $\dot{\varphi}$ la (8) diventa:

$$m\,\ddot{r} = -\frac{G\,M\,m}{r^2} + \frac{J^2}{m\,r^3}. \tag{10}$$

Fin qui niente di nuovo: moltiplicando la (10) per $\dot{r}$ e integrando si ritrova la (1), ecc.

Supponiamo ora (con Newton) che il pianeta sia soggetto a una perturbazione anch'essa centrale, della forma

$$f(r) = \frac{\beta}{r^3}.$$

Una tale forza non esiste in natura, ma la ragione per cui Newton l'introduce è che l'equazione perturbata si risolve facilmente. Vedremo poi come si possa mettere a frutto questo risultato per il vero problema di Mercurio.

La (10) si modifica in

$$m\,\ddot{r} = -\frac{G\,M\,m}{r^2} + \frac{\beta}{r^3} + \frac{J^2}{m\,r^3} = -\frac{G\,M\,m}{r^2} + \frac{{J'}^2}{m\,r^3} \tag{11}$$

con

$${J'}^2 = J^2 + m\,\beta. \tag{12}$$

Dunque l'equazione radiale perturbata è la stessa di quella imperturbata, ma con diverso valore di J.

Vediamo di capire bene questo fatto. Il problema è che mentre nelle (2) e nella (10) (pianeta imperturbato) compare la stessa J, questo non è più vero per la (11) (pianeta perturbato). Possiamo superare questa difficoltà?

La risposta è affermativa: basta introdurre un angolo ausiliario φ' che soddisfi

$$m\,r^2\dot{\varphi}' = J'. \tag{13}$$

Infatti le (13), (11) contengono lo stesso J', quindi possiamo star sicuri che la relazione tra r e φ' sarà

$$r = \frac{p'}{1 + e'\cos\varphi'} \tag{14}$$

con

$$p' = \frac{J'^2}{G\,M\,m^2} \qquad e' = \sqrt{1 - \frac{p'}{a}}. \tag{15}$$

al posto delle (5), (6). Si noti che a non cambia, perché non è cambiata E.

Confrontando (13) e (2) si vede che la relazione tra φ e φ' è semplice:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{J'}{J}.$$

Otteniamo perciò:

1) il moto radiale perturbato con momento angolare J è lo stesso di quello imperturbato con momento angolare J';
2) la coordinata angolare *vera* φ e quella ausiliaria φ' stanno a ogni istante in rapporto fisso $J/J' \gtrless 1$ a seconda che la perturbazione sia attrattiva ($\beta < 0$) o repulsiva ($\beta > 0$);
3) nel moto perturbato la coordinata ausiliaria φ' varia come la coordinata di un moto imperturbato con momento angolare J'

Da 1) segue che il periodo radiale dei due moti è lo stesso (hanno la stessa a). Qui "periodo radiale" significa il tempo che il pianeta impiega per andare da perielio ad afelio e ritorno. In questo tempo la cordinata ausiliaria φ' varia di 2π; quindi la cordinata vera varia di

$$2\,\pi\,\frac{J}{J'} = 2\,\pi\,\frac{J}{\sqrt{J^2 + m\,\beta}}. \tag{16}$$

Il procedimento fino a questo punto è esatto per qualunque orbita, se la forza perturbativa va come $1/r^3$. Come vedremo, nel caso delle perturbazioni su Mercurio $m\,\beta \ll J^2$, per cui la (16) può essere approssimata: la variazione di φ in un periodo radiale, che chiameremo $2\pi + \Delta\varphi$, vale

$$2\pi + \Delta\varphi \simeq 2\pi - \frac{\pi\,m\,\beta}{J^2}.$$

$\Delta\varphi$ è l'avanzamento del perielio in un periodo radiale (alla buona, in un giro del pianeta). Si tratterà realmente di avanzamento se $\beta < 0$ (forza attrattiva). Da questa, con (4) e (5), si ha

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi\beta}{GMma\,(1 - e^2)}. \tag{17}$$

L'idea ingegnosa di Newton è che se l'orbita è *quasi circolare* ($e \ll 1$) lo stesso procedimento si può applicare a una forza centrale qualsiasi. Naturalmente se e è piccola si può trascurare e^2 in (17):

$$\Delta\varphi = -\bar{\beta} = -\frac{\pi\beta}{GMma}. \tag{18}$$

Forza centrale qualsiasi, moto con piccola eccentricità

Se l'orbita ha piccola eccentricità, r differisce poco da a. Sia ora $f(r)$ l'espressione della forza, non più della forma β/r^3; potremo sempre approssimare

$$f(r) \simeq \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}. \tag{19}$$

Moltiplicando infatti la (19) per r^3 avremo

$$r^3 f(r) \simeq \beta + \alpha\, r$$

e basta quindi sviluppare $r^3 f(r)$ in serie di potenze attorno a $r = a$ per trovare α, β.

Lo sviluppo è:

$$r^3 f(r) = a^3 f(a) + (r - a) \left(\frac{d}{dr} \left[r^3 f(r) \right] \right)_{r=a}$$

e si vede subito che

$$\alpha = a^2 \left[3\, f(a) + a\, f'(a) \right] \qquad \beta = a \left[a^2 f(a) - \alpha \right]. \tag{20}$$

Riscrivendo la (11) con la legge di forza (19) troviamo

$$m\,\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3} + \frac{J^2}{m\,r^3} = -\frac{GM'm}{r^2} + \frac{J'^2}{m\,r^3} \tag{21}$$

dove J' è sempre definito dalla (12), ma ora è stato necessario modificare anche M:

$$M' = M\,(1 - \bar{\alpha}) \qquad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{GMm}. \tag{22}$$

Tuttavia la modifica di M è sempre trascurabile, come vedremo.

Perturbazione dovuta a un pianeta esterno

Nel seguito introdurrò una numerazione dei pianeti, come d'uso: da 1 per Mercurio a 8 per Nettuno. Tuttte le grandezze relative a un pianeta porteranno quindi un indice: per es. a_3 è il semiasse della Terra, m_5 la massa di Giove, ecc. Farà eccezione Mercurio, per il quale continuerò a usare simboli senza l'indice $_1$.

Introduco ora la principale approssimazione di questo calcolo. Dato che il moto di precessione del perielio è assai lento, nel tempo in cui il perielio si sposta di un angolo apprezzabile tutti i pianeti fanno parecchi giri. Ne segue che si può trattare l'azione gravitazionale di un pianeta non già come quella di un punto di data massa che si muove nel tempo lungo la sua orbita, ma invece come quella della stessa massa distribuita con continuità sull'orbita. Non solo: si dimostra che — almeno se l'eccentricità del pianeta è piccola — si può distribuire la massa m_i uniformemente su una circonferenza di raggio a_i. Le eccentricità dei pianeti sono tutte abbastanza piccole (la peggiore, tolto Mercurio, è $e_4 = 0.09$) quindi anche quest'approssimazione è ragionevole.

Resta da risolvere il seguente problema: calcolare la forza gravitazionale prodotta da un anello omogeneo di materia (raggio a_i, massa m_i) in un punto del suo piano, interno all'anello, a distanza r dal centro.

Calcolo del potenziale e della forza

Conviene calcolare il potenziale gravitazionale, poi ricavare da questo la forza derivando rispetto a r. Consideriamo un trattino dell'anello, di angolo al centro $d\varphi_i$, quindi massa

$$dm_i = m_i \, \frac{d\varphi_i}{2\pi}.$$

L'energia potenziale gravitazionale di Mercurio, sito a distanza r dal centro, è

$$dV_i = -\frac{G\, m\, dm_i}{\varrho_i}$$

dove

$$\varrho_i = \sqrt{a_i^2 + r^2 - 2\, a_i\, r\, \cos\varphi_i}$$

è la distanza dal punto generico dell'anello al punto dove si trova Mercurio.

Integrando:

$$V_i(r) = -\frac{G\, m\, m_i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_i}{\varrho_i} = -\frac{G\, m\, m_i}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi_i}{\varrho_i}. \tag{23}$$

Tutto è dunque ridotto al calcolo del seguente integrale:

$$I_i = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi_i}{\sqrt{a_i^2 + r^2 - 2\, a_i\, r\, \cos\varphi_i}} \tag{24}$$

che non si esprime con funzioni elementari (è un integrale ellittico completo di prima specie). In App. 1 sviluppo il calcolo per eventuali interessati.

Da (23), (A1–1)) e (A1–2):

$$V_i(r) = -\frac{2\,G\,m\,m_i}{\pi\,(a_i + r)}\,K(h_i)$$

quindi

$$f_i(r) = \frac{2}{\pi}\,G\,m\,m_i\,\frac{d}{dr}\,\frac{K(h_i)}{a_i + r} \tag{25}$$

(si ricordi che h_i dipende da r, come mostra la (A1–1)). Il calcolo di $f_i(r)$ e dei coefficienti α_i, β_i è dettagliato in App. 2.

Dati

I dati che seguono sono approssimati quanto basta. Le masse dei pianeti (satelliti inclusi) vengono tradizionalmente date come rapporti M/m (M massa del Sole). Le costanti $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ sono calcolate dalle formule (18), (22), (A2–4), (A2–5).

Pianeta	M/m	*Semiasse* (UA)	*Eccentr.*	*Periodo* (anni)	$\bar{\alpha} \times 10^{10}$	$\bar{\beta} \times 10^{9}$
1 – M	$6.01 \cdot 10^6$	0.3871	0.2056	0.2408		
2 – V	$4.08 \cdot 10^5$	0.7233	0.0068	0.6152	$1.339 \cdot 10^4$	$-3.35 \cdot 10^3$
3 – T	$3.29 \cdot 10^5$	1.0000	0.0167	1.0000	$0.465 \cdot 10^4$	$-1.128 \cdot 10^3$
4 – M	$3.10 \cdot 10^6$	1.5237	0.0934	1.8809	$1.18 \cdot 10^2$	$-2.83 \cdot 10^2$
5 – G	1047	5.2028	0.0484	11.862	$0.794 \cdot 10^4$	$-1.873 \cdot 10^3$
6 – S	$3.50 \cdot 10^3$	9.5388	0.0556	29.46	$0.383 \cdot 10^3$	$-0.90 \cdot 10^2$
7 – U	$2.29 \cdot 10^4$	19.182	0.0472	84.01	7.2	-1.7
8 – N	$1.93 \cdot 10^4$	30.06	0.0086	164.79	2.2	-0.5
TOTALE					$2.65 \cdot 10^4$	$-6.47 \cdot 10^3$

Commento finale

Come si vede $\bar{\alpha}$, ossia la correzione a M, è inferiore a $3 \cdot 10^{-6}$. Presumo che altre approssimazioni, per es. l'aver trascurato il moto del Sole, abbiano effetto maggiore.

Dai $\bar{\beta}_i$, che danno il contributo di ciascun pianeta alla precessione di Mercurio in radianti per giro, si ottengono i valori in $''$/secolo dividendo per il periodo del pianeta (in anni), moltiplicando per 100, e trasformando da radianti a secondi d'arco. Per avere i $\Delta\varphi$ occorre solo cambiare segno. Ecco i risultati:

Venere	286.8
Terra	96.6
Marte	2.4
Giove	160.5
Saturno	7.7
Urano	0.1
Nettuno	0.0
TOTALE	554.1

Solo ora ho visto un articolo di autore sconosciuto [4] dove si trova un calcolo molto vicino a questo come approccio, con la stessa approssimazione dei pianeti come anelli. I risultati sono molto vicini, (l'effetto totale è dato in $549.7''$/secolo) ma ci sono alcune osservazioni interessanti:

- L'idea degli anelli non è nuova (né me lo sarei aspettato) ma sembra non avere una precisa giustificazione.
- L'autore [4] non include la Luna né altri satelliti. La Luna aumenta l'effetto della Terra per oltre $1''$/secolo.
- Anche gli asteroidi (almeno i maggiori) avrebbero dovuto essere inclusi; secondo [4] ciò aggiungerebbe circa $0.1''$/secolo.

Appendice 1: calcolo dell'integrale (24)

Trasformiamo il radicando. Si può assumere senza perdere generalità, che Mercurio abbia $\varphi = 0$. Allora

$$a_i^2 + r^2 - 2\,a_i\,r\,\cos\varphi_i = (a_i + r)^2 - 4\,a_i\,r\,\cos^2(\varphi_i/2) = (a_i + r)^2\,(1 - h_i\,\sin^2\!\psi_i)$$

dove

$$h_i = \frac{4\,a_i\,r}{(a_i + r)^2} \qquad \psi_i = \tfrac{1}{2}(\pi - \varphi_i). \tag{A1–1}$$

L'integrale (24) diventa quindi

$$I_i = \frac{2}{a_i + r} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi_i}{\sqrt{1 - h_i\,\sin^2\!\psi_i}} = \frac{2}{a_i + r}\,K(h_i) \tag{A1–2}$$

dove $K(h_i)$ è il già citato integrale ellittico completo di prima specie (si veda ad es. [3], eq. 17.3.1).

Nota: Esiste una tradizione consolidata, secondo la quale in un integrale ellittico come quello in (A1–2) il coefficiente di $\sin^2\!\psi$ viene chiamato "parametro" e indicato con m; simbolo che qui non posso usare e ho sostituito con h.

Appendice 2: forze e coefficienti

Riprendiamo la (25):

$$f_i(r) = \frac{2}{\pi}\, G\, m\, m_i\, \frac{d}{dr}\, \frac{K(h_i)}{a_i + r}.$$

Per i calcoli che seguono avrò bisogno delle derivate di $K(h_i)$ ed $E(h_i)$ (integrale ellittico completo di seconda specie). Le espressioni si trovano in Wikipedia e Wolfram (però in termini dell'argomento $k = \sqrt{h}$). Le espressioni con le derivate rispetto a h sono:

$$\begin{aligned} 2\, h\, (1-h)\, \frac{dK}{dh} &= E - (1-h)\, K \\ 2\, h\, \frac{dE}{dh} &= E - K. \end{aligned} \tag{A2–1}$$

Attenzione: Nel seguito scriverò brevemente E e K, ma si deve intendere che si tratta di $E(h_i)$, $K(h_i)$, con h_i dato dalla (A1–1). Quindi E, K sono funzioni di a_i e di r. Più avanti poi r verrà sostituito con a; gli integrali ellittici con questa sostituzione saranno indicati con E_i, K_i.

Per derivare la (25) serve anche la derivata di $h_i(r)$, definito in (A1–1):

$$\frac{d\, h_i(r)}{dr} = \frac{4\, a_i\, (a_i - r)}{(a_i + r)^3}.$$

Abbiamo poi

$$\frac{\pi\, f_i(r)}{G\, m\, m_i} = \frac{1}{r} \left(\frac{E}{a_i - r} - \frac{K}{a_i + r} \right). \tag{A2–2}$$

Dalle (20) si vede che per calcolare i coefficienti α_i, β_i occorre derivare ancora $f_i(r)$. Da (A2–2) e (A2–1):

$$\frac{\pi\, f_i'(r)}{G\, m\, m_i} = \frac{(a_i - r)^2\, K - (a_i^2 - 3\, r^2)\, E}{r^2\, (a_i - r)^2\, (a_i + r)}. \tag{A2–3}$$

Passiamo a calcolare α_i, β_i. Da (20), (22), (A2–2), (A2–3):

$$\bar{\alpha}_i = \frac{m_i}{M}\, \frac{\alpha_i}{G\, m\, m_i} = \frac{2\, a\, m_i}{\pi\, M}\, \frac{a_i^2\, E_i - (a_i - a)^2\, K_i}{(a_i - a)^2\, (a_i + a)} \tag{A2–4}$$

$$\bar{\beta}_i = \frac{\pi}{a}\, \frac{m_i}{M}\, \frac{\beta_i}{G\, m\, m_i} = -\frac{a\, m_i}{M}\, \frac{(a_i^2 + a^2)\, E_i - (a_i - a)^2 K_i}{(a_i - a)^2 (a_i + a)}. \tag{A2–5}$$

[1] `http://www.sagredo.eu/lezioni/astronomia/p3c4rf.pdf`

[2] `http://www.sagredo.eu/lezioni/astronomia/p3c1rf.pdf`

[3] Abramowitz, Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*.

[4] `http://www.mathpages.com/home/index.htm`