E. Fabri *maggio 2011*

Palline e molle in linea

Introduzione e notazioni

Scrivo qui una piccola raccolta di risultati su un problema ben noto: una fila di palline di uguali masse, tenute legate da molle tutte uguali. Esaminerò i casi di palline in numero finito, infinito da un solo lato, oppure bilateralmente infinito.

Indico con m le masse delle palline, con κ la costante elastica delle molle, con p il passo. Con l'indice n distinguerò le palline, con l'indice s i modi normali quando sono discreti; userò anche una variabile q per distinguerli più in generale. Al solito, k indicherà il numero d'onda, ω la frequenza. Le posizioni di riposo delle palline siano $x_n = np$, mentre ξ_n sono gli spostamenti.

Anche se le grandezze rilevanti per il sistema sono reali, conviene trattare in primo luogo il problema in campo complesso, perché la trattazione è più semplice e mostra meglio alcuni aspetti fisici. Poi prenderemo in considerazione le soluzioni reali, che sono casi particolari di un insieme di soluzioni più ampio.

Prime equazioni

Le eq. del moto per le palline sono

$$m\,\ddot{\xi}_n = \kappa\,(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\,\xi_n). \tag{1}$$

I modi normali (soluzioni a frequenza definita) si ottengono ponendo

$$\xi_n = \eta_n\,e^{-i\omega t}: \tag{2}$$

$$m\,\omega^2\eta_n = -\kappa\,(\eta_{n+1} + \eta_{n-1} - 2\,\eta_n). \tag{3}$$

La (3) si risolve con la posizione

$$\eta_n = \eta_0\,e^{2inq} \tag{4}$$

che la trasforma in

$$m\,\omega^2 = 4\kappa\sin^2 q$$

da cui

$$\omega = \pm 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\,\sin q = \pm\omega_{\mathrm{m}}\sin q \tag{5}$$

(ho posto $\omega_{\mathrm{m}} = 2\sqrt{\kappa/m}$).

Precisiamo: dalla (4) si vede che solo valori di q tra $-\pi/2$ e $+\pi/2$ forniscono modi normali distinti; anzi uno solo degli estremi va considerato. Prenderò

$$-\pi/2 < q \le \pi/2. \tag{6}$$

Dunque:

$$\xi_n = \eta_0\, e^{i\,(2nq-\omega t)}. \tag{7}$$

Velocità di fase, dispersione

È utile scrivere la (7) in una forma diversa, che mette in evidenza l'andamento spaziale dell'onda. A questo scopo scrivo $n = x/p$:

$$\xi(x) = \eta_0\, \exp\left[i\left(\frac{2q}{p}\,x - \omega t\right)\right] = \eta_0\, \exp\left[i\,(kx - \omega t)\right] \tag{8}$$

dove ho introdotto il *numero d'onda* $k = 2q/p$. Dalla (6) si vede che

$$-\pi/p < k \le \pi/p. \tag{9}$$

La (8) può ora essere interpretata come un'onda *progressiva* se k e ω hanno lo stesso segno, *regressiva* se hanno segni opposti, mentre $k = 0$ ($\omega = 0$) rappresenta una semplice traslazione rigida di tutto il sistema di palline. Come al solito, la *lunghezza d'onda* è $\lambda = 2\pi/|k|$.

La relazione (5) tra q e ω diventa

$$\omega = \pm\omega_{\rm m} \sin \tfrac{1}{2}kp \tag{10}$$

e la velocità di fase dell'onda, definita da

$$v_{\rm f} = \frac{\omega}{k}$$

vale

$$v_{\rm f} = \pm\frac{\omega_{\rm m}}{k}\,\sin \tfrac{1}{2}kp$$

(positiva per le onde progressive, negativa per quelle regressive). Dato che $v_{\rm f}$ non è costante, ma dipende da k, è presente *dispersione*; la (10) è la *relazione di dispersione* per il nostro problema. Solo per i modi normali più bassi ($|k|\,p \ll \pi$) si può porre approssimativamente

$$v_{\rm f} = \pm\tfrac{1}{2}\,\omega_{\rm m} p = \pm p\sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$$

Soluzioni reali

Per la natura del problema, interessano solo soluzioni reali, che si ottengono sommando la (7) o la (8) con la complessa coniugata. Il risultato, tralasciando il fattore moltiplicativo, è

$$\begin{aligned} \xi_n &= \cos(2nq - \omega t) \qquad & \xi(x) &= \cos(kx - \omega t) \\ \xi_n &= \sin(2nq - \omega t) \qquad & \xi(x) &= \sin(kx - \omega t). \end{aligned} \tag{11}$$

Qui ω è sempre ≥ 0, mentre il segno di q (di k) distingue ancora fra onde progressive e regressive. Il caso $\omega = 0$ richiede una discussione speciale.

La relazione di dispersione andrà scritta

$$\omega = \omega_{\mathrm{m}} \, \sin \tfrac{1}{2} |k| \, p. \tag{12}$$

L'eccezione $\boldsymbol{\omega = 0}$

La posizione (2) non fornisce tutte le soluzioni quando $\omega = 0$. Infatti $\omega = 0$ per la (2) significa che ξ non dipende dal tempo; ma se nella (1) poniamo $\ddot{\xi}_n = 0$, la sua soluzione generale sarà

$$\xi_n = \alpha + \alpha' t + (\beta + \beta' t) \, n \tag{14}$$

con α, α', β, β' costanti reali se cerchiamo per ξ una soluzione reale.

Dunque in tutto ciò che segue il caso $\omega = 0$ ($k = 0$, $q = 0$) andrà trattato a parte.

Condizioni al contorno

Sono d'interesse tre tipi di condizione al contorno:

A) Catena infinita da entrambi i lati, annullamento della perturbazione all'infinito

B) Catena infinita solo per $x > 0$, con due tipi di condizione al contorno in $x = 0$:
   1) Vincolo rigido
   2) Catena libera.

C) Catena finita, coi possibili vincoli agli estremi. Per semplicità, mi limiterò alla condizione di catena libera a entrambi gli estremi.

Discutiamole separatamente.

A. *Catena doppiamente infinita*: In questo caso i modi normali sono dati dalle (11), con la relazione di dispersione (12). Gli spettri di frequenze e di numeri d'onda sono continui ma limitati a un intervallo.

Al posto delle (11), (12), che danno onde progressive o regressive a seconda dei segni di q, k, si possono usare le *onde stazionarie*:

$$
\begin{aligned}
\xi_n &= \cos 2nq\, \cos\omega t \qquad & \xi(x) &= \cos kx\, \cos\omega t \\
\xi_n &= \sin 2nq\, \cos\omega t \qquad & \xi(x) &= \sin kx\, \cos\omega t \\
\xi_n &= \cos 2nq\, \sin\omega t \qquad & \xi(x) &= \cos kx\, \sin\omega t \\
\xi_n &= \sin 2nq\, \sin\omega t \qquad & \xi(x) &= \sin kx\, \sin\omega t.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Nelle (14) q e k vanno presi non negativi.

Per $q = 0$ ($\omega = 0$) la prima delle (14) fornisce $\xi_n = \text{cost.}$, corrispondente alla (13) con $\alpha' = \beta = \beta' = 0$, mentre le altre tre righe danno $\xi_n = 0$, quindi nessuna soluzione. Occorre però aggiungere la soluzione $\xi_n = \alpha' t + (\beta + \beta' t)\, n$, ossia ancora la (13) ma con $\alpha = 0$. In alternativa, si può intendere che le (14) valgano per $q > 0$, $k > 0$, quindi $\omega > 0$, e che vada aggiunta la soluzione particolare (13).

Le (13), (14) prese insieme danno un sistema completo: qualunque soluzione può essere espressa come combinazione lineare di queste.

Nota: Qui e in seguito non mi pongo questioni di rigore matematico; per es. la precisa definizione di "sistema completo" richiederebbe di precisare lo spazio di funzioni.

B.1. *Catena infinita a destra, vincolo rigido nell'origine*: Con riferimento alle (14), solo le soluzioni della seconda e quarta riga sono compatibili con questa condizione al contorno. La (13) è ammessa con $\alpha = \alpha' = 0$. Lo spettro rimane lo stesso.

B.2. *Catena infinita a destra, estremo libero nell'origine*: In questo caso la ricerca della soluzione e un po' più complicata. Infatti la condizione al contorno implica che l'equazione del moto (1) non vale per $n = 0$, ma va sostituita da

$$m\, \ddot{\xi}_0 = \kappa\, (\xi_1 - \xi_0). \tag{15}$$

Le soluzioni che soddisfano la (15) accanto alla (1) per $n > 0$, hanno la forma

$$
\begin{aligned}
\xi_n &= \cos\,(2n+1)\, q\, \cos\omega t \qquad & \xi(x) &= \cos\left[\frac{2q}{p}\left(x + \frac{p}{2}\right)\right] \cos\omega t \\
\xi_n &= \cos\,(2n+1)\, q\, \sin\omega t \qquad & \xi(x) &= \cos\left[\frac{2q}{p}\left(x + \frac{p}{2}\right)\right] \sin\omega t.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Per $q = 0$ ($\omega = 0$) la prima delle (16) dice $\xi_1 = \xi_0$, quindi la (13) è soluzione solo se $\beta = \beta' = 0$.

C. *Catena finita con estremi liberi*: Se le palline sono N ci saranno anche N modi normali. Imponendo le condizioni in entrambi gli estremi troviamo:

$$\omega_s = \omega_{\mathrm{m}} \sin \frac{\pi s}{2N} \qquad (s = 0, \cdots, N-1)$$

$$\begin{aligned} \xi_n &= \cos \frac{\pi s}{2N}\,(2n+1)\,\cos\omega t \qquad \xi(x) = \cos\left[\frac{\pi s}{Np}\left(x + \frac{p}{2}\right)\right]\cos\omega t. \\ \xi_n &= \cos \frac{\pi s}{2N}\,(2n+1)\,\sin\omega t \qquad \xi(x) = \cos\left[\frac{\pi s}{Np}\left(x + \frac{p}{2}\right)\right]\sin\omega t. \end{aligned} \tag{17}$$

Accanto alle (17) scritte per $s > 0$ ($\omega \neq 0$) occorre aggiungere la (13) con $\beta = \beta' = 0$.

Un esempio: una catena semiinfinita viene urtata all'estremo

Lo schema è questo: la catena semiinfinita (caso B.2) è inizialmente in quiete. Riceve un impulso in $x = 0$, il che vuol dire che per $t = 0_+$ abbiamo

$$\begin{gathered} \xi_n = 0 \quad \text{per ogni } n \\ \dot\xi_0 = v, \qquad \dot\xi_n = 0 \quad \text{per} \quad n > 0. \end{gathered} \tag{18}$$

In generale $\xi_n(t)$ sarà una sovrapposizione di modi normali, ma si ottengono espressioni più trattabili se si affronta il problema daccapo, in modo diverso. Converrà semplificare la notazione, ponendo

$$\xi_n(t) = f_n(z) \quad (z = \omega_{\mathrm{m}} t).$$

Con questa posizione le (1), (15) diventano

$$\begin{gathered} f_n''(z) = \tfrac{1}{4}\left(f_{n+1}(z) - 2f_n(z) + f_{n-1}(z)\right) \quad (n > 0) \\ f_0''(z) = \tfrac{1}{4}\left(f_1(z) - f_0(z)\right) \end{gathered} \tag{19}$$

e le (18):

$$\begin{gathered} f_n(0) = 0 \quad \text{per ogni } n \\ f_0'(0) = \frac{v}{\omega_{\mathrm{m}}}, \qquad f_n'(0) = 0 \text{ per } n > 0. \end{gathered} \tag{20}$$

È possibile una semplificazione, se si sostituisce la condizione al contormo con la seguente: prendiamo la catena infinita da ambo i lati, ma imponiamo una simmetria:

$$f_{-n}(z) = f_{n-1}(z) \qquad (n > 0). \tag{21}$$

Così facendo la seconda delle (19) è implicata dalla prima, mentre la seconda riga delle (20) andrà sostituita da

$$f_0'(0) = f_{-1}'(0) = \frac{v}{\omega_{\mathrm{m}}}, \qquad f_n'(0) = 0 \text{ per } n > 0 \text{ e per } n < -1. \tag{22}$$

La simmetria delle condizioni iniziali assicura che la (21) rimarrà valida per ogni z.

Tentiamo un'integrazione per serie:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}\, z^k \tag{23}$$

da cui

$$f'_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_{nk}\, z^{k-1}$$

$$f''_n(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_{nk}\, z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\, c_{n,k+2}\, z^k.$$

Dalla prima delle (19) si ha

$$4(k+1)(k+2)\, c_{n,k+2} = c_{n+1,k} - 2\, c_{n,k} + c_{n-1,k} \qquad (k \ge 0) \tag{24}$$

mentre dalle condizioni iniziali

$$\begin{gathered} c_{n0} = 0 \quad \forall n \\ c_{01} = c_{-1,1} = \frac{v}{\omega_\mathrm{m}} \qquad c_{n1} = 0 \text{ per } n > 0 \text{ e per } n < -1 \end{gathered} \tag{25}$$

Le (24) collegano tra loro i valori pari di k, e così pure quelli dispari; quindi in conseguenza della prima delle (25) tutti i c_{nk} con k pari si annullano. Dobbiamo occuparci solo dei k dispari, e conviene ridefinire la serie (23) ponendo $c_{n,2k+1} = c_{01}\, d_{nk}$:

$$f_n(z) = c_{01} \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}\, z^{2k+1}. \tag{26}$$

Le (24) si riscrivono

$$8(k+1)(2k+3)\, d_{n,k+1} = d_{n+1,k} - 2\, d_{nk} + d_{n-1,k} \qquad (k \ge 0) \tag{27}$$

e le (25) si riducono a

$$d_{00} = d_{-1,0} = 1 \qquad d_{n0} = 0 \text{ per } n > 0 \text{ e per } n < -1. \tag{28}$$

Un'ulteriore semplificazione si ha ponendo

$$d_{nk} = \frac{e_{nk}}{4^n (2k+1)!}: \tag{29}$$

dalle (27) si ha

$$e_{n,k+1} = e_{n+1,k} - 2\,e_{n,k} + e_{n-1,k} \qquad (k \geq 0) \tag{30}$$

e dalle (28)

$$e_{00} = e_{-1,0} = 1 \qquad e_{n0} = 0 \text{ per } n > 0 \text{ e per } n < -1. \tag{31}$$

La (30) si risolve facilmente per iterazione:

$$\begin{aligned} e_{nk} &= \sum_{m=-k}^{k} (-)^{k+m} \binom{2k}{k-m} e_{n+m,0} \\ &= (-)^{k-n} \binom{2k}{k+n} + (-)^{k-n-1} \binom{2k}{k+n+1} \end{aligned}$$

e con qualche passaggio

$$e_{nk} = (-)^{k-n} \frac{2n+1}{2k+1} \binom{2k+1}{k-n}. \tag{32}$$

(occorre ricordare che un coefficiente binomiale va preso nullo, per convenzione, quando l'argomento inferiore è negativo).

Dalla (32) e dalla (29)

$$d_{nk} = \frac{(-)^{k-n}}{4^k}\,\frac{2n+1}{2k+1}\,\frac{1}{(k-n)!\,(k+n+1)!}$$

(per quanto detto sopra, $d_{nk} = 0$ per $k < n$) e infine, sostituendo nella (26)

$$f_n(z) = c_{01} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-)^{k-n}}{4^k}\,\frac{2n+1}{2k+1}\,\frac{z^{2k+1}}{(k-n)!\,(k+n+1)!}. \tag{33}$$

La (33) diventa più leggibile se si calcola

$$z\,f_n'(z) = (2n+1)\,c_{01} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-)^{k-n}}{4^k}\,\frac{z^{2k+1}}{(k-n)!\,(k+n+1)!}. \tag{34}$$

Confrontando la (34) con la serie di Taylor per le funzioni di Bessel (*Abramowitz* 9.1.10) si vede che

$$z\,f_n'(z) = 2\,c_{01}(2n+1)\,J_{2n+1}(z)$$

e quindi

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(2n+1)\,\frac{v}{\omega_{\mathrm{m}} t}\,J_{2n+1}(\omega_{\mathrm{m}} t).$$

La figura mostra i grafici di $f_n'(z)$ in funzione di n per diversi valori di $z = \omega_\mathrm{m} t$. A meno di un fattore di scala, sono anche i grafici delle velocità delle successive palline a tempi diversi. Si vedono i seguenti fatti:

– a ogni t esiste un massimo di velocità, la cui posizione si sposta verso destra, circa con moto uniforme

– la distribuzione delle velocità attorno al massimo si allarga al crescere di t

– dietro il picco nella velocità, si forma una "coda," dove la velocità ha andamento oscillante che si smorza lentamente.