E. Fabri *luglio 2024*[*]

Induzione e.m. in generale

Scopo

Mi propongo di esporre una trattazione abbastanza generale dell'induzione e.m., con lo scopo di mostrare che *non ci sono due fenomeni*, come sostiene Feynman [1].

Considero perciò due circuiti:

– Un *primario* che può essere di forma qualsiasi ed essere mosso e deformato in modo qualsiasi nel tempo. Il primario è percorso da una corrente $I_1(t)$ anche variabile nel tempo, ma fissata nel senso che è prodotta da un generatore di corrente, e quindi non è modificata da un'eventuale corrente nel secondario.

– Un *secondario*, che in realtà non è da pensare come un conduttore, ma solo come una curva chiusa; anch'esso mobile e deformabile a piacere. M'interessa solo calcolare la *forza elettromotrice* $F(t)$ indotta nel secondario.

Nota 1: Considerare solo l'induzione dovuta a un circuito primario e non quella dovuta a un magnete, non è una restrizione, visto che un magnete — per quanto riguarda il campo esterno —può sempre essere rappresentato da un circuito equivalente. Per di più il magnete di regola è rigido, e lo sarà anche il suo circuito equivalente. Qui considero anche il caso più generale di circuito deformabile.

Nota 2: In vari punti dei ragionamenti che seguono, assumerò un punto di vista *non relativistico*, che equivale a supporre che le velocità in gioco siano piccole rispetto a c e che le variazioni delle correnti nel tempo siano lente, sì da poter trascurare i ritardi. Caso per caso marcherò questo fatto con l'inciso "(n.r.)."

Notazioni e schematizzazioni

Il primario è una curva chiusa $\gamma_1(t)$, anche variabile nel tempo, parametrizzata a ogni istante dalla variabile s_1, con $s_1 \in [0,1]$). Indicherò con $\mathbf{r}_1(s,t)$ il vettore posizione del generico punto di γ_1.

Il secondario, analogamente, è la curva $\gamma_2(t)$, parametrizzata dalla variabile s_2 ($s_2 \in [0,1]$). Con $\mathbf{r}_2(s,t)$ indico il vettore posizione di punti di γ_2. Inoltre $\mathbf{r}_{12}$ è un'abbreviazione per $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

---

[*] Versione originaria: dicembre 2015. Nel febbraio 2019 ho inserito alcune precisazioni (n.r.) e ho aggiunto l'ultima sezione. Nella presente versione, a parte modifiche secondarie, ho chiarito meglio il ruolo dei "due tempi." È stato ance aggiunto un riferimento bibliografico.

Campo del primario

Il campo magnetico prodotto dal primario in un generico punto $\mathbf{r}$ è (n.r.)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I_1(t) \oint\limits_{\gamma_1(t)} \frac{d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}. \tag{1}$$

Nella (1) va chiarito il sigificato di $d\mathbf{r}_1$. La curva γ_1 a un dato istante t può essere descritta dall'equazione parametrica $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(s,t)$. Più esattamente al posto di $d\mathbf{r}_1$ avrei dovuto scrivere

$$\frac{\partial}{\partial s}\, \mathbf{r}_1(s,t)\, ds$$

con l'integrale fatto su s, da 0 a 1.

Il campo elettrico indotto si ricava dalle eq. di Maxwell; in particolare da

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\, \mathbf{B}(\mathbf{r},t). \tag{2}$$

Nota 3: La validità della (1) implica che si stia lavorando con campi lentamente variabili (n.r.) in modo che si possa trascurare la reazione di $\mathbf{E}$ su $\mathbf{B}$ (corrente di spostamento).

La f.e.m.

Prendo come definizione di f.e.m. la circuitazione lungo il secondario, fatta a t assegnato, della forza di Lorentz per unità di carica $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, dove $\mathbf{v}$ è la velocità del generico punto del secondario:

$$F(t) = \oint\limits_{\gamma_2(t)} \bigl[\mathbf{E}(\mathbf{r}_2,t) + \mathbf{v}(s,t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2,t)\bigr] \cdot d\mathbf{r}_2. \tag{3}$$

Vale anche per $d\mathbf{r}_2$ quanto detto in precedenza per $d\mathbf{r}_1$.

Occorre osservare che se si pensa alla forza di Lorentz su una carica che si muove nel secondario, la sua velocità non sarà $\mathbf{v}$, perché ad essa si aggiungerà (n.r.) la velocità relativa $\mathbf{u}$ della carica rispetto al circuito. Però questo termine aggiuntivo non contribuisce alla f.e.m., perché $\mathbf{u}$ è tangente a γ_2 e quindi il prodotto $\mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}_2 = (d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{B}$ si annulla.

Si noti anche che ho scritto nella (3) $\mathbf{v}(s,t)$: questo perché la velocità potrà dipendere dal tempo, e inoltre essere diversa da punto a punto del secondario, se il moto non è puramente traslatorio.

La legge del flusso

Separiamo nella (3) il termine in $\mathbf{E}$ da quello in $\mathbf{B}$:

$$F = F_E + F_B$$

$$F_E = \oint_{\gamma_2(t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t) \cdot d\mathbf{r}_2 \tag{4}$$

$$F_B = \oint_{\gamma_2(t)} \mathbf{v}(s, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2, t) \cdot d\mathbf{r}_2. \tag{5}$$

La (4) si trasforma in

$$F_E(t) = \int_{\Sigma_2(t)} \mathrm{rot}\, \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t) \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma =$$

$$- \int_{\Sigma_2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2, \bar{t}) \right)_{\bar{t}=t} \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma = - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \Phi_{\Sigma_2(t)}(\mathbf{B}(\bar{t})) \right)_{\bar{t}=t}. \tag{6}$$

Commento alla (6): In questa eq. figura una derivata di $\mathbf{B}$ rispetto al tempo. Occorre oerò chiaruire di che derivata si tratta, perché la variazione di $\mathbf{B}$ nel tempo in un dato punto (data s_2) del secondario può avere due origini:

- può derivare da una variazione del campo del primario in ogni punto fisso dello spazio
- può dipendedre dal moto del secondario, se $\mathbf{B}$ non è uniforme.

La (6) è stata scritta usando la (2), dove non ci sono dubbi: la derivata rispetto al tempo va fatta restando in un punto fisso ($\mathbf{r}$ costante) e occupandosi solo della variazione del campo del primario. Ecco perché occorre distinguere *due* variabili tempo. Una è t, che compare nel campo d'integrazione $\Sigma_2(t)$ e implicitamente in $\mathbf{B}$ attraverso $\mathbf{r}_2$ se il secondario si muove; l'altra è $\bar{t}$, che compare solo se *in un punto fisso dello spazio* dove il secondario si trova a passare all'istante t, il campo del primario è variabile.

La derivata che interessa va dunque fatta *a t fisso*, considerando solo la variazione di $\bar{t}$, Calcolata la derivata, se ne dovrè considerare il valore per $\bar{t} = t$.

Quanto a F_B, calcoliamo $F_B\, dt$:

$$F_B\, dt = \oint_{\gamma_2(t)} d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{m})} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2, t) \cdot d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{l})} = \oint_{\gamma_2(t)} d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{l})} \times d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{m})} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2, t) \tag{7}$$

dove $d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{l})}$, $d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{m})}$ hanno i seguenti significati

– $d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{l})}$ è lo spostamento *lungo il circuito* a t costante, ossia quello che si usa per calcolare la circuitazione
– $d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{m})}$ è lo spostamento di ciascun punto del circuito, quindi a s costante, dovuto al moto del circuito stesso nel tempo dt.

Osserviamo che $d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{l})} \times d\mathbf{r}_2^{(\mathrm{m})}$ è l'elemento di area della striscia compresa fra le posizioni del circuito ai tempi t e $t+dt$; quindi l'integrale è il flusso di $\mathbf{B}$ sulla striscia, *orientata verso l'esterno.* Dato che $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, questo è anche la differenza tra il flusso attraverso Σ_2 al tempo t e quello al tempo $t+dt$:

$$F_B\,dt = \Phi_{\Sigma_2(t)}(\mathbf{B}(t)) - \Phi_{\Sigma_2(t+dt)}(\mathbf{B}(t))$$

(notare che $\mathbf{B}(t)$ è tenuto costante) e quindi

$$F_B(t) = -\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\,\Phi_{\Sigma_2(\bar{t})}(\mathbf{B}(t))\right)_{\bar{t}=t}. \tag{8}$$

Mettendo insieme (6) e (8) si ha

$$F = F_E + F_B = -\frac{d}{dt}\left[\Phi_{\Sigma_2(t)}(\mathbf{B}(t))\right] \tag{9}$$

che è il risultato finale:

Qualunque sia il moto dei due circuiti e la variazione della corrente nel primario, la f.e.m. indotta nel secondario è sempre pari alla derivata rispetto al tempo del flusso concatenato, cambiata di segno.

Il moto rigido

Un caso di particolare interesse è quello in cui I_1 è costante e il moto delle due spire è *globalmente rigido.* Con "globalmente" intendo che non sono soltanto rigidi i moti di γ_1 e γ_2, ma lo è il moto del sistema complessivo formato dalle due spire. In tal caso è ovvio che $\Phi_{\Sigma_2(t)}(\mathbf{B}(t))$ non dipende da t e quindi $F = 0$:

Se il moto del sistema è globalmente rigido e la corrente primaria è costante, non c'è f.e.m. indotta. In altre parole l'induzione dipende dal moto relativo *delle due spire o da una variazione della corrente.*

Bibliografia

[1] *The Feynman's Lectures on Physics* (Addison–Wesley 1965), vol. II, pag. 17–2.