E. Fabri *febbraio 2023*

Algebra delle osservabili e gradi di libertà fisici

Oggetto

Voglio mostrare che l'idea — assai diffusa — che l'assunzione di un certo insieme di operatori come irriducibile caratterizzi i gradi di libertà del sistema fisico in esame è fondamentalmente sbagliata.

Qui per "insieme irriducibile di operatori" s'intende che gli operatori dell'insieme non hanno in comune sottospazi invarianti propri. Il che equivale a dire che se $\mathcal{A}$ è il detto insieme, il suo commutante $\mathcal{A}'$ consiste solo dei multipli dell'unità I.

L'oscillatore armonico

È l'esempio più semplice e istruttivo. Comincio definendo l'operatore N, che ha per autovalori tutti gli interi naturali, ciascuno con autovettore non degenere:

$$N\,|n\rangle = n\,|n\rangle \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Se prendo $\mathcal{A} = \{I, N\}$, $\mathcal{A}'$ contiene N e ciò basta per dimostrare che $\mathcal{A}$ è riducibile: il sottospazio generato da ciascun $|n\rangle$ è invariante sotto $\mathcal{A}$.

Occorre dunque arricchire $\mathcal{A}$, per es. aggiungendo gli operatori di distruzione e creazione:

$$\begin{aligned} A\,|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ A^+\,|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

insieme coi polinomi costruiti con A e A^+.[1] (Si noti che $N = A^+A$ e che $[A, A^+] = I$.)

Nel nuovo $\mathcal{A}$ allargato sono presenti tra gli altri

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(A + A^+) \qquad P = \frac{i}{\sqrt{2}}\,(A^+ - A)$$

che soddisfano $[Q, P] = i\,I$ e possono venire intepretati come posizione e impulso dell'oscillatore (avendo scelto opportunamente le unità di misura). Si vede anche che a meno di una costante additiva (inessenziale in una teoria non relativistica) N può essere preso come hamiltoniana (energia).

Occorre osservare che tutti gli operatori N, A, A^+, Q, P sono non limitati; non possono quindi avere per dominio l'intero $\mathcal{H}$ definito come chiusura della

---

[1] È inteso che gli operatori N, ecc. sono definiti sugli altri vettori di $\mathcal{H}$ per linearità.

base $\{|n\rangle\}$. Si verifica però che il più "duro" è N, nel senso che se $\langle u| N^2 |u\rangle < \infty$ lo stesso è vero per $\langle u| A^2 |u\rangle$ e per $\langle u| Q^2 |u\rangle$, $\langle u| P^2 |u\rangle$.

Può capitare di dover considerare l'insieme di tutti i polinomi generati da I, A, A^+ per combinazione lineare e moltiplicazione. Anche per un algebra così estesa non è difficile trovare un dominio comune, denso in $\mathcal{H}$. Per es. basta prendere l'insieme dei vettori

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

con $|c_n|$ che decresce più rapidamente di qualsiasi potenza negativa di n.

Commutante

Esamino il commutante con diversi insiemi.

Commutante di N

Se $[N, B] = 0$ essendo gli autovalori di N non degeneri gli autovettori di N lo sono anche di B, quindi

$$\langle m| B |n\rangle = b_m \, \delta_{mn}. \tag{3}$$

Commutante di A

Se $[A, B] = 0$:

$$\langle m| AB |n\rangle = \langle m| BA |n\rangle.$$

Abbiamo

$$\begin{gathered}\langle m| AB |n\rangle = \langle n| B^+ A^+ |m\rangle^* = \\ \sqrt{m+1}\, \langle n| B^+ |m+1\rangle^* = \sqrt{m+1}\, \langle m+1| B |n\rangle\end{gathered}$$

$$\langle m| BA |n\rangle = \sqrt{n}\, \langle m| B |n-1\rangle$$

quindi

$$\sqrt{m+1}\, \langle m+1| B |n\rangle = \sqrt{n}\, \langle m| B |n-1\rangle \tag{4}$$

relazione che lega tutti gli elementi su una stessa parallela alla diagonale principale.

Commutante di $\{A, N\}$

Da (3), (4) segue

$$b_{m+1} = b_m$$

ossia $B = b\, I$. Dunque già il semplice $\{A, N\}$ è irriducibile, e lo stesso vale per $\{A^+, N\}$. A maggior ragione ciò vale per $\mathcal{A}$ allargato.

Due oscillatori armonici indipendenti

Si può ripetere tutto quanto già detto, semplicemente aggiungendo un indice $_1$ oppure $_2$ a ciascun operatore e usando come spazio di Hilbert il prodotto tensoriale $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Ciò è quanto dire che una base ortonormale sarà costituita dall'insieme $\{|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle\}$. Per brevità scriverò $|n_1 n_2\rangle$.

Resta inteso che una scrittura come N_1 è un'abbreviazione della scrittura estesa $N_1 \otimes I_2$, ecc. Inoltre gli autovettori di N_1 sono tutti gli $|n_1\rangle \otimes |u_2\rangle$, essendo $|u_2\rangle$ un generico vettore di $\mathcal{H}_2$; analogo per N_2.

Ne consegue che le algebre estese $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ non sono irriducibili in $\mathcal{H}$: per es. il commutante di $\mathcal{A}_1$ consiste di tutti gli operatori della forma $I_1 \otimes O_2$, dove O_2 è un qualunque operatore definito in $\mathcal{H}_2$. Si ottiene un insieme irriducibile mettendo insieme per es. $\{A_1, N_1, A_2, N_2\}$; il che sembra confermare la proposizione che all'inizio ho dichiarato falsa.

Altra algebra

Riprendiamo in considerazione le base $\{|n_1 n_2\rangle\}$. Si tratta pur sempre di una base numerabile, anche se etichettata con coppie d'interi anziché con un singolo intero. Ma niente vieta di effettuare una ridenominazione, usando un solo numero quantico n invece di due.

Un modo per far ciò è la numerazione diagonale. Per capire come si procede e rendere precisa la corrispondenza, partiamo dall'ovvia tabella delle coppie:

$$\begin{array}{llllll}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & (0,4) & \cdots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \cdots \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \cdots \\
(4,0) & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \cdots \\
\ldots
\end{array} \tag{5}$$

e leggiamola diagonalmente, partendo da sinistra e salendo verso destra:

$$\begin{array}{lllll}
(0,0) \\
(1,0) & (0,1) \\
(2,0) & (1,1) & (0,2) \\
(3,0) & (2,1) & (1,2) & (0,3) \\
(4,0) & (3,1) & (2,2) & (1,3) & (0,4) \\
\ldots
\end{array} \tag{6}$$

Nella (5) n_1 è l'indice di riga, n_2 quello di colonna; nella lettura diagonale della tabella (6) le coppie possono essere numerate consecutivamente, con un indice n che parte da 0 e cresce. Si può dare un'espressione per n in funzione di (n_1, n_2):

$$n = \tfrac{1}{2}(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1) + n_2. \tag{7}$$

La (7) può essere invertita. Si comincia col trasformarla in

$$8n + 1 = (2n_1 + 2n_2 + 1)^2 + 8n_2.$$

Questa si può risolvere come segue:

$$q = \left\lfloor \tfrac{1}{2}(\sqrt{8n+1} - 1) \right\rfloor$$

$$n_1 + n_2 = q \qquad n_2 = n - \tfrac{1}{2}q(q+1) \qquad n_1 = q - n_2.$$

Abbiamo ora la base in $\mathcal{H}$ etichettata con un solo numero quantico n. Possiamo quindi procedere come con un solo oscillatore armonico: definire N, A, A^+ secondo le (1), (2). L'algebra così definita è irriducibile su $\mathcal{H}$, pur essendo una sottoalgebra di quella definita partendo da $\{A_1, N_1, A_2, N_2\}$. Per es. l'espressione di N segue dalla (7):

$$N = \tfrac{1}{2}(N_1 + N_2)(N_1 + N_2 + I) + N_2$$

(meno semplici quelle per A, A^+).

È così dimostrata la tesi: l'algebra di operatori irriducibile su uno spazio di Hilbert non è unica, e non ha a che vedere col numero di gradi di libertà del sistema fisico.