E. Fabri *luglio 2015*

Perché gli oggetti non si dilatano in un universo in espansione?

Il problema

Quando si parla di espansione dell'universo viene spesso sollevata un'obiezione: se tutto si espande, come possiamo accorgercene? La risposta è che la premessa è falsa: non è vero che *tutto* si espande.

Più precisamente: l'espansione è un fenomeno valido su scala *cosmologica*, ma non valido per singole regioni di spazio-tempo dove siano presenti concentrazioni di materia (es. una galassia) e tanto meno per singoli oggetti, per es. un atomo o un corpo macroscopico.

In realtà c'è una differenza tra i due casi: nel primo ci si basa sul fatto che il modello LFRW vale per un universo *omogeneo*, mentre bisogna aspettarsi deviazioni locali in presenza di disomogeneità. Non conosco calcoli espliciti in materia, e non è di questo che voglio occuparmi.

Il secondo caso, per separarlo dal primo, va enunciato così: dimostrare che anche in un universo omogeneo un singolo oggetto "a scala umana" (un'astronave, o anche un'asta rigida, per non dire di un oggetto microscopico come un atomo) *non si accorge* dell'espansione, che su queste scale spaziali è del tutto trascurabile per intervalli di tempo ragionevoli. In altre parole: per contrastare l'espansione occorrono forze minuscole, che possono essere prodotte da deformazioni altrettanto minuscole negli oggetti.

Farò ora un modello schematico del problema, nel quale è possibile dare una stima quantitativa.

Un modello semplice

Consideriamo due masse uguali collegate da un filo e situate in una regione intergalattica, dove solo gli effetti *medi* della curvatura sono sensibili.

Se non ci fosse il filo, o se questo fosse infinitamente debole, ciascuna delle due masse seguirebbe una geodetica della geometria di LFRW. Per es. potrebbero essere ferme nel rif. comovente, ma allora in un universo in espansione le masse si allontanerebbero una dall'altra e il filo dovrebbe aumentare di lunghezza nel tempo. In queste condizioni un filo di elasticità finita applicherebbe alle due masse due forze opposte, che le farebbero deviare dalle geodetiche.

Esistono però anche geodetiche non "comoventi," in cui la distanza tra i due corpi può variare in modo diverso. Il primo passo per la risoluzione del problema consiste nel determinare queste geodetiche.

Coordinate e metrica della geometria di LFRW

La geometria LFRW è una geometria a sezioni spaziali omogenee e isotrope. Seguirò qui le notazioni di [1], e i riferimenti (formule, n. di pag.) sono allo stesso link.

Come espressione della metrica assumo la (16–8):

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2\Big(d\chi^2 + \chi^2\big(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\big)\Big) \tag{1}$$

dove t è il tempo cosmico, χ la coordinata radiale, ϑ e φ coordinate angolari. Queste non entrano in gioco, in quanto sono interessato solo a geodetiche *radiali*, dove entrambe restano costanti e possono essere prese $= 0$. Ho anche fatto la scelta $\Sigma(\chi) = \chi$, corrispondente a sezioni spaziali *piatte*, secondo il modello oggi prevalente. Inoltre R (parametro di scala) dipende solo da t. L'origine della coordinata radiale sarà presa in un punto opportuno (v. appresso).

La distanza tra due punti su una stessa sezione spaziale (stessa t), uno preso come origine ($\chi = 0$, $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$) e l'altro che ha solo $\chi \neq 0$, è

$$\ell = R(t)\,\chi. \tag{2}$$

Come vedremo tra poco, le curve lungo le quali sono costanti le tre coordinate spaziali χ, ϑ, φ sono geodetiche. Le chiamerò *geodetiche comoventi.* Vista la (2), lungo una geodetica comovente la distanza ℓ varia con t a causa dell'espansione.

Mi converrà usare la vera definizione del parametro di scala:

$$a(t) = R(t)/R_0 \tag{3}$$

dove l'indice $_0$ sta a indicare i valori al tempo presente t_0. Di conseguenza, al posto di χ userò

$$\ell_0 = R_0\chi \tag{4}$$

e la metrica si scriverà

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2 d\ell_0{}^2. \tag{5}$$

Come χ, anche ℓ_0 è costante su una geodetica comovente. Invece su una generica geodetica ℓ_0 non sarà costante, come non sarà costante χ. La distanza propria ℓ dall'origine su una geodetica comovente si scrive, usando le (2), (3), (4):

$$\ell = a(t)\,\ell_0. \tag{6}$$

Da qui si ricava l'interpretazione fisica della cordinata ℓ_0 di un dato punto P dello spazio-tempo:

– si prende la geodetica comovente che passa per P

– su questa geodetica si prende il punto P_0 che ha $t = t_0$

– ℓ_0 è la distanza di P_0 dall'origine.

Geodetiche radiali della geometria di LFRW

Dalla metrica (5) segue per la lagrangiana W (6–13), trascurando come detto le coordinate ϑ e φ:

$$W = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - a^2\left(\frac{d\ell_0}{d\tau}\right)^2\right] \tag{7}$$

che non dipende da ℓ_0 : ne segue la costante del moto

$$a^2\,\frac{d\ell_0}{d\tau} = q. \tag{8}$$

La costante q caratterizza la particolare geodetica, in quanto il punto di partenza è da supporre dato: (t_0, ℓ_0). In particolare, $q = 0$ definisce quella che ho chiamato "geodetica comovente": $\ell_0(\tau) = \text{cost.}$

Per le geodetiche di tipo tempo sarà $2W = 1$:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - a^2\left(\frac{d\ell_0}{d\tau}\right)^2 = 1.$$

Sostituendo in questa $d\ell_0/d\tau = q/a^2$, che deriva dalla (8), si ha

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 1 + \frac{q^2}{a^2}. \tag{9}$$

Da (8) e (9) si ottiene un'espressione per $\dot{\ell}_0 = d\ell_0/dt$ lungo la geodetica:

$$\dot{\ell}_0 = \frac{q}{a\sqrt{a^2+q^2}} \tag{10}$$

che potrà essere integrata, in linea di principio, ogni volta che sia nota la funzione $a(t)$.

Nota: Da qui in poi $\dot{\ell}_0$, $\ddot{\ell}_0$, ecc. stanno a indicare derivate rispetto al tempo cosmico t.

Avrò anche bisogno di $\ddot{\ell}_0$, che ricavo derivando la (10):

$$\ddot{\ell}_0 = -\frac{q\dot{a}\,(2a^2+q^2)}{a^2(a^2+q^2)^{3/2}}\,. \tag{11}$$

Accelerazione relativa di due geodetiche radiali

Tornando al modello semplice, poniamo le due masse in due posizioni simmetriche, a distanza ℓ_0 rispetto al centro del filo, che prendo come origine

($\chi = 0$). Assumiamo anche condizioni iniziali simmetriche, in modo che il centro del filo resti sempre nell'origine. Per una delle masse χ ed ℓ_0 varieranno nel tempo, mentre potremo tenere, come già detto, fisse ϑ e φ: $\vartheta = \varphi = 0$. L'altra massa avrà la stessa χ e la stessa ℓ_0, ma $\vartheta = \pi$, $\varphi = 0$.

Derivando due volte la (6) ottengo

$$\dot{\ell} = \frac{\dot{a}}{a}\,\ell + \frac{q}{\sqrt{a^2 + q^2}} \tag{12}$$

$$\ddot{\ell} = \frac{\ddot{a}}{a}\,\ell + \frac{q^3 \dot{a}}{a(a^2 + q^2)^{3/2}}. \tag{13}$$

Posso semplificare queste in due modi:

1) posso calcolare tutto in t_0
2) posso assumere $q \ll 1$ (lo giustificherò più avanti).

Per $t = t_0$ le (12), (13) diventano (tenendo presente che $a(t_0) = 1$):

$$\dot{\ell} = \dot{a}\,\ell_0 + \frac{q}{\sqrt{1 + q^2}}$$

$$\ddot{\ell} = \ddot{a}\,\ell_0 + \frac{q^3 \dot{a}}{(1 + q^2)^{3/2}}$$

e trascurando q^2 e potenze superiori:

$$\dot{\ell} = \dot{a}\,\ell_0 + q \tag{14}$$

$$\ddot{\ell} = \ddot{a}\,\ell_0. \tag{15}$$

Discussione

La (14) serve solo per giustificare l'ipotesi $q \ll 1$. Osserviamo infatti che $\dot{a}$ non è che H_0 (18–3) e quindi vale $7.7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{m}^{-1}$ (pag. 18–5). Se vogliamo che le masse siano ferme ($\dot{\ell} = 0$) dovremo prendere $q = -\dot{a}\,\ell_0$. Qualunque valore ragionevole si prenda per ℓ_0, sarà sempre $q \ll 1$.

La (15) mostra che $\ddot{\ell}$ non sarà mai nullo se le masse sono libere; ma a causa del filo la (15) va modificata, aggiungendovi l'accelerazione $-F/m$ dovuta alla tensione F del filo. Sarà $\ddot{\ell} = 0$ se $F = m\,\ell_0\,\ddot{a}$.

$\ddot{a}$ si ricava derivando la (18–3) dove va usata per $E(a)$ la definizione (18–4) coi valori (18–17) per gli Ω:

$$E(a) = \sqrt{0.7 + \frac{0.3}{a^3}}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= H_0\,\dot{a}\,E(a) + H_0\,a\,E'(a)\,\dot{a} = H_0\,\dot{a}\,[E(a) + a\,E'(a)]\\ &= H_0^2\,a\,E(a)\,[E(a) + a\,E'(a)]\end{aligned}$$

che per $t = t_0$ si semplifica:

$$\ddot{a} = H_0^2\,[1 + E'(1)] = 0.55\,H_0^2 = 3.3 \cdot 10^{-53}\,\mathrm{m}^{-2} = 2.9 \cdot 10^{-36}\,\mathrm{s}^{-2}.$$

Usiamo la (15) per calcolare l'accelerazione di una delle masse rispetto al centro, prendendo per es. $\ell_0 = 1\,\mathrm{km}$:

$$\ddot{\ell} = 2.9 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Supponiamo pure $m = 10^3\,\mathrm{kg}$; per annullare l'accelerazione il filo dovrà esercitare su ciascuna massa una forza $F = 2.9 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{N}$.

Dato che una simile forza può essere prodotta dal filo con allungamento inosservabile per molti ordini di grandezza, si capisce perché in questo come in qualunque altro modello analogo l'espansione dell'universo non altera in modo apprezzabile i sistemi che sono tenuti insieme da forze non gravitazionali.

[1] `http://www.sagredo.eu/lezioni/irg/`