E. Fabri *agosto 2016*

Deflessione gravitazionale di una particella dotata di massa

Il problema

Come dice il titolo, si tratta di studiare la deflessione gravitazionale (in geometria di Schwarzschild, tanto per cambiare) di una particella massiva invece che della luce.

Vorrei verificare ciò che sembra intuitivo, ossia che al crescere dell'energia della particella si ottenga il limite di massa nulla.

Equazione della traiettoria

Le equazioni del problema sono ben note [1], (8–14):

$$r^2\dot\varphi = J \qquad \frac{r-1}{r}\,\dot t = E \tag{1}$$

e poi [1], (8–13):

$$\frac{r}{r-1}\,E^2 - \frac{r}{r-1}\,\dot r^2 - \frac{J^2}{r^2} = 1 \tag{2}$$

ossia

$$\dot r^2 = E^2 - \left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{J^2}{r^2}\right). \tag{3}$$

Osserviamo che per la natura del problema la particella proviene e ritorna all'infinito, il che vuol dire $E > 1$.

Sarà utile per il seguito tener presente che E e J hanno un'interpretazione asintotica semplice. Infatti per $r \gg 1$ la geometria è minkowskiana, ossia si può dare alle grandezze l'interpretazione della RR. Quindi E è l'energia della particella libera (divisa per la massa) e J il suo momento angolare (anch'esso diviso per la massa). La grandezza $E^2 - 1$ che compare in varie formule non è che il quadrato dell'impulso p (al solito, diviso per la massa) e perciò $J = b\,p$ dove b è il *parametro d'urto*.

La (3) con la prima delle (1) dà

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2-1}{J^2}\,r^4 + \frac{1}{J^2}\,r^3 - r^2 + r$$

che con le osservazioni appena fatte si riscrive

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}\,r^4 + \frac{1}{b^2p^2}\,r^3 - r^2 + r. \tag{4}$$

Dalla (4) si ricava il valore minimo di r, annullando $dr/d\varphi$: detto $\bar{r}$ tale valore, esso soddisfa

$$\frac{1}{b^2}\,\bar{r}^3 + \frac{1}{b^2 p^2}\,\bar{r}^2 - \bar{r} + 1 = 0 \tag{5}$$

(osservo che alla (5) si arriva anche direttamente dalla (3), annullamdo $\dot{r}$). Se posso assumere $\bar{r} \gg 1$ la (5) si semplifica e fornisce $\bar{r} = b$. Un'approssimazione migliore otterremo provando

$$\bar{r} = b + \varrho$$

sostituendo nella (5) e trascurando i termini di ordine superiore a ϱ:

$$\bar{r} = b\,\frac{2\,b\,p^2 - p^2 + 3}{2\,b\,p^2 + 2}. \tag{6}$$

Soluzione approssimata

La (4) non è integrabile con funzioni elementari, per cui bisognerà ricorrere ad approssimazioni. Trasformiamola di nuovo con la sostituzione $r = b/u$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 1 + \frac{1}{b\,p^2}\,u - u^2 + \frac{1}{b}\,u^3. \tag{7}$$

Derivando questa rispetto a φ e cancellando la derivata prima troviamo

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{2b\,p^2} - u + \frac{3}{2b}\,u^2. \tag{8}$$

dove la variabile u va da 0 a $b/\bar{r}$, quindi è al più appena > 1.

Nella (8) non compare esplicitamente φ (invarianza per rotazioni). Posso sfruttare quest'invarianza per lavorare con una soluzione simmetrica, orientando l'asse polare in direzione del perielio. Allora u sarà funzione pari di φ: questa variabile andrà da $-\pi/2 - \delta$ a $\pi/2 + \delta$ (l'angolo di deflessione è 2δ).

La (8) è di secondo ordine, quindi per individuarne un integrale occorre conoscere non solo u ma anche $du/d\varphi$ in un punto iniziale. Abbiamo già visto che u è pari, quindi $u'(0) = 0$, mentre $u(0)$ si ricava dalla (6).

Se potessi trascurare nella (8) il termine in u^2, la soluzione sarebbe

$$u = \frac{b}{\bar{r}}\,\cos\varphi$$

che soddisfa tutte le condizioni. Avremmo $\delta = 0$ (nessuna deflessione) il che è ovvio, perché trascurando il termine in u^2 abbiamo cancellato l'effetto di RG.

Possiamo tentare un'approssimazione migliore scrivendo u come serie di potenze in $\varepsilon = 1/b$. Il termine di ordine 0 sarà quello appena scritto (nessuna deflessione) e il termine di ordine 1 dovrebbe darci un risultato soddisfacente.

Osservo che sviluppare in $1/b$ non significa considerare variabile la distanza dal Sole, ma piuttosto lavorare a distanza fissa e variare la massa M. Infatti stiamo usando unità di lunghezza $2M$, per cui b è in realtà il rapporto $b/(2M)$ e il suo inverso è $\varepsilon = 2M/b$. A parametro d'urto fissato, ε piccolo significa M piccola.

Cominciamo dunque riscrivendo la (8) in termini di ε:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{\varepsilon}{2\,p^2} - u + \tfrac{3}{2}\,\varepsilon\,u^2. \tag{8'}$$

Lo sviluppo di u è

$$u = u_0 + \varepsilon\,u_1 + \cdots$$

da cui

$$u^2 = u_0^2 + 2\,\varepsilon\,u_0\,u_1 + \cdots$$

e inserendo queste in (8′)

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + \varepsilon\,\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} = \frac{\varepsilon}{2\,p^2} - u_0 - \varepsilon\,u_1 + \tfrac{3}{2}\,\varepsilon\,u_0^2 \tag{9}$$

(mi sono fermato ai termini in ε).

Separando i termini di diverso ordine nella (9):

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_0}{d\varphi^2} &= -u_0 \\ \frac{d^2u_1}{d\varphi^2} &= \frac{1}{2\,p^2} - u_1 + \tfrac{3}{2}\,u_0^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Le (10) possono essere risolte in ordine, a partire dalla prima, che fornisce u_0; poi dalla seconda si ricava u_1.

Per la condizione iniziale $u(0)$ debbo sviluppare la (6) in serie di ε:

$$\begin{aligned} u(0) = \frac{b}{\bar{r}} &= \frac{1 + \varepsilon/p^2}{1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon\,(1 - 3/p^2)} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,(1 - 1/p^2). \end{aligned}$$

da cui

$$u_0(0) = 1 \qquad u_1(0) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \tag{11}$$

Usando (10) e (11) ottengo:

$$\begin{aligned} u_0(\varphi) &= \cos\varphi \\ u_1(\varphi) &= \tfrac{3}{4} + \frac{1}{2\,p^2} - \frac{1}{p^2}\,\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\,\cos 2\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Calcolo della deflessione

Occorre solo calcolare (al primo ordine in ε) l'angolo δ tale che

$$u(\pi/2+\delta) = 0.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} u(\pi/2+\delta) &= u_0(\pi/2+\delta) + \varepsilon\, u_1(\pi/2+\delta) \\ &= \cos(\pi/2+\delta) + \varepsilon\left[\tfrac{3}{4} + \frac{1}{2\,p^2} - \frac{1}{p^2}\,\cos(\pi/2+\delta) - \tfrac{1}{4}\,\cos(\pi+2\delta)\right] \\ &= -\delta + \varepsilon\left[\tfrac{3}{4} + \frac{1}{2\,p^2} + \frac{1}{p^2}\sin\delta + \tfrac{1}{4}\,\cos 2\delta\right] \\ &= -\delta + \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2\,p^2}\right) \end{aligned}$$

(ho tenuto conto che δ è di primo ordine in ε).

Dunque

$$\delta = \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2\,p^2}\right) = \frac{2\,p^2+1}{2\,b\,p^2}.$$

Se si fa $p \to \infty$ si ottiene $\delta = 1/b$, quindi l'angolo di deflessione è $2/b$, ossia lo stesso della luce: eq. (7–7) di [1]. Per p finito la deflessione è maggiore. Ricordando che $p^2 = E^2 - 1$ e che E può essere scritto γ per usare le notazioni solite della RR, abbiamo

$$2\delta = \frac{2\,\gamma^2 - 1}{b\,(\gamma^2-1)} = \frac{1+\beta^2}{b\,\beta^2}. \tag{13}$$

(Non bisogna dimenticare che la (13) è approssimata: vale per $b \gg 1$.)

Commento

La (13) mostra che la congettura era fondata: l'angolo di deflessione (a parità di b) dipende solo dalla velocità della particella. Più esatttamente, la deflessione è sempre maggiore di quella della luce, visto che $(1+\beta^2)/\beta^2 > 2$.

Gardando alla semplicità del risultato, può venire il sospetto che esistesse un modo più spiccio di arrivarci. Osservo però che il calcolo consiste di due parti: fino alla (4) è del tutto standard e non credo ci sia modo di semplificarlo. Ciò che segue è solo un modo di risolvere un'eq. diff. di secondo ordine non lineare.

In realtà la soluzione si dà esatta in termini di funzioni ellittiche, e quindi il calcolo ha il solo scopo di evitare queste funzioni, poco conosciute. Il grande valore di b per il Sole ($2 \cdot 10^5$), suggerisce di risolvere la (4) per iterazione (arrestata al primo ordine).

[1] `http://www.sagredo.eu/lezioni/irg/`