E. Fabri *ottobre 2019*

Una strana curva in 3D

Il problema

Partendo dall'equazione

$$a\,(a\,x-1)^{1/3} = x^3+1 \tag{1}$$

con la posizione

$$x^3+1 = a\,y \tag{2}$$

(ovviamente lecita come definizione di y per $a \neq 0$) si ricava subito

$$y^3+1 = a\,x. \tag{3}$$

Nel campo reale il sistema (2), (3) equivale all'eq. (1). Si noti che il caso $a = 0$ in realtà è banale: c'è solo la soluzione $x = -1$ per l'equazione e solo la soluzione $(-1, -1)$ per il sistema.

Voglio discutere il numero di soluzioni reali del sistema in funzione di a.

La curva

Conviene affrontare il problema attraverso lo studio della curva di equazioni

$$\begin{aligned} x^3+1 &= y\,z \\ y^3+1 &= x\,z \end{aligned} \tag{4}$$

nel piano cartesiano (x, y, z). Meglio ancora: cambiamo ocordinate, usando

$$u = x+y \qquad v = x-y.$$

Sommando e sottraendo le (4) si trova

$$\begin{aligned} u\,(u^2-3\,x\,y)+2 &= u\,z \\ v\,(u^2-x\,y) &= -v\,z. \end{aligned} \tag{5}$$

Ma è anche

$$4\,x\,y = u^2-v^2$$

e sostituendo nelle (5) si ottiene

$$\begin{aligned} u\,(u^2+3\,v^2)+8 &= 4\,u\,z \\ v\,(3\,u^2+v^2) &= -4\,v\,z. \end{aligned} \tag{6}$$

La seconda delle (6) è soddisfatta se $v = 0$, ossia $x = y$. La prima diventa

$$u^3 - 4\,u\,z + 8 = 0$$

che ha un andamento ovvio:

- l'asse z come asintoto
- due rami distinti, uno per $u > 0$, l'altro per $u < 0$
  - il primo, che chiamerò "ramo R" (rosso nella figura) si avvicina all'asintoto per $z \to +\infty$, ha un minimo per z in $\mathrm{P} = (r^2, 0, \frac{3}{2}\,r)$ (avendo posto $r = \sqrt[3]{2}$) e va a $+\infty$ con $z \propto x^2$ per $x \to +\infty$
  - il secondo ("ramo B," ossia blu) accosta l'asintoto per $z \to -\infty$, è decrescente e va a $+\infty$ con $z \propto x^2$ per $x \to -\infty$.

Si noti che per $z = 0$ si ha $u = -2$, quindi $x = y = -1$.

Altri rami

Per verificare se esistono altri rami della curva, aggiungiamo alle (6) la condizione $v \neq 0$. Allora la seconda diventa

$$3\,u^2 + v^2 = -4\,z \tag{7}$$

che sostituita nella prima dà

$$u\,(u^2 + v^2) = -2. \tag{8}$$

Questa richiede $u < 0$; al tempo stesso la (7) impone $z < 0$. Il nuovo ramo — se esiste — ha quindi la proiezione sul piano (u, z) confinata nel terzo quadrante.

In realtà il terzo ramo esiste: basta infatti partire dalla curva (8) nel piano (u, v) e "abbassarla" aggiungendo la z data dalla (7). Resta da dimostrare che si tratta di un unico ramo; ci si arriva come segue. Col procedimento appena detto si ottiene una curva connessa. D'altra parte la (8) individua in modo univoco e completo la proiezione su (u, v).

Detto in altri termini: le (7), (8), viste in 3D, sono due superfici la cui intersezione dà tutti i punti della curva non appartenenti al piano $v = 0$. La prima superficie è un paraboloide ellittico il cui asse è l'asse z mentre l'origine è il vertice; il paraboloide è concavo verso $z < 0$. La seconda è un cilindro cubico con generatrici parallele all'asse z.

Si noti che l'intersezione delle due superfici ha anche un punto nel piano $v = 0$: il punto $\mathrm{Q} = (-r, 0, -\frac{3}{4}\,r^2)$. Di conseguenza non è corretto a rigore parlare di un "terzo ramo" della curva, visto che il ramo ora trovato è connesso col ramo B. Dovrei piuttosto dire che Q è un *punto doppio.*

L'eq. (8), vista come eq. per u con parametro v, ha sempre una sola radice reale. Ne segue che si può tracciare questo ramo della curva ("ramo V" ossia verde) assumendo v come parametro, calcolando u dalla (8) e poi z dalla (7). Per questo motivo la figura mostra solo il semispazio $v \geq 0$: nell'altro semispazio la curva è l'immagine speculare. Il punto Q è un massimo per z sul ramo V.

Si noti che v compare sempre come v^2, il che mostra ciò che era ovvio in partenza: il sistema (4) è simmetrico, quindi se (a, b) è una soluzione lo è anche (b, a) e le due soluzioni hanno valori opposti per v.

La (8) definisce u come funzione di v; in particolare $u(0) = -r$. Quanto a z, si può scrivere, per la (7)

$$z(v) = -\tfrac{1}{4}\bigl[3\,u^2(v) + v^2\bigr].$$

$$z'(v) = -\tfrac{3}{2}\,u\,u' - \tfrac{1}{2}\,v. \tag{9}$$

Deriviamo la (8):

$$3\,u^2u' + u'v^2 + 2\,u\,v = 0 \tag{10}$$

da cui

$$u' = -\frac{2\,u\,v}{3\,u^2 + v^2}.$$

Sostituendo questa nella (9) otteniamo

$$z' = v\,\frac{3\,u^2 - v^2}{6\,u^2 + 2\,v^2}$$

che fornisce tre zeri per z':

$$v = 0 \qquad v = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,r^2$$

cui corrispondono il punto Q, il punto

$$\mathrm{R} = \Bigl(-\tfrac{1}{2}\,r^2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,r^2,\ -\tfrac{3}{4}\,r\Bigr)$$

e il simmetrico di questo.

Il calcolo della derivata seconda mostra che Q è un massimo locale per $z(v)$, mentre R e il simmetrico sono minimi locali.

Riassumendo

Si vede che esistono 3 valori critici per z, dati in ordine decrescente da

$$z(\mathrm{P}) = \tfrac{3}{2}\,r \approx 1.890 \qquad z(\mathrm{R}) = -\tfrac{3}{4}\,r \approx -0.945 \qquad z(\mathrm{Q}) = -\tfrac{3}{4}\,r^2 \approx -1.191.$$

Tornando al numero di soluzioni (si ricordi che z è solo un altro nome per a) abbiamo:

– tre soluzioni per $a > z(\mathrm{P})$
– una soluzione per $z(\mathrm{R}) < a < z(\mathrm{P})$
– 5 soluzioni per $z(\mathrm{Q}) < a < z(\mathrm{R})$
– tre soluzioni per $a < z(\mathrm{Q})$.

La figura mostra la situazione, anche se la vicinanza di $z(\mathrm{Q})$ e $z(\mathrm{R})$ ne rende un po' più difficile l'interpretazione.