

A che serve la relatività?

Premessa

Dopo un secolo dalla sua nascita (relatività “ristretta” 1905, rel. “generale” 1916) la teoria della relatività è parte integrante della fisica teorica, ne costituisce una base imprescindibile, ha ricevuto innumerevoli conferme sperimentali: dal microscopico (particelle) all'Universo.

Quindi la domanda può apparire oziosa.

Ma qui voglio affrontare un altro aspetto: a che serve *in pratica* la relatività? Dove “in pratica” vuol significare applicazioni concrete, tangibili, al limite che riguardano la vita di tutti i giorni.

La risposta viene data meglio attraverso alcuni esempi: ne darò uno negativo e due positivi.

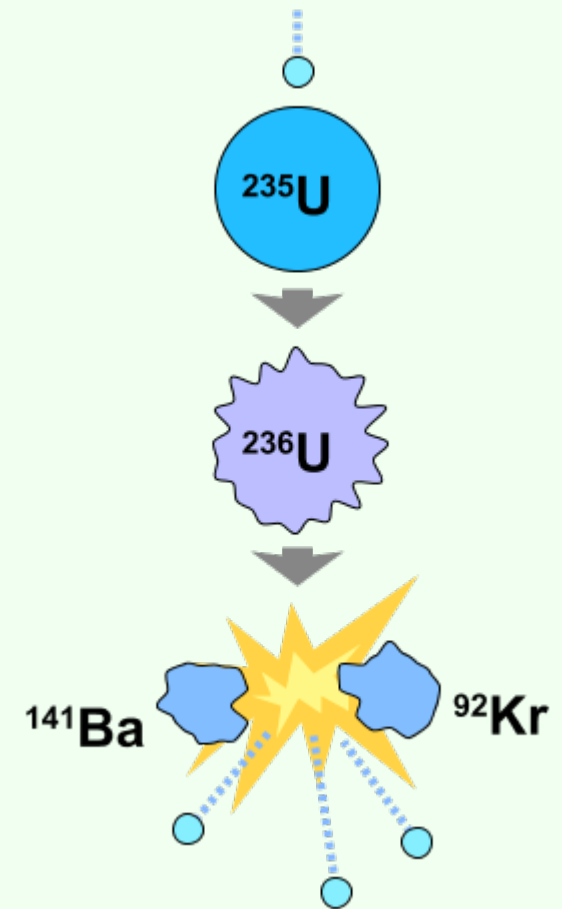
Negativo significa un caso in cui spesso viene tirata in ballo la relatività, che invece non c'entra. Positivi sono casi in cui senza la relatività qualcosa non funzionerebbe o non avrebbe potuto essere concepito.

La fissione nucleare

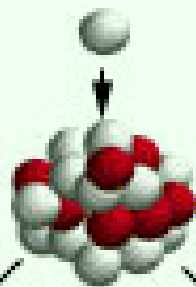
Questo fenomeno è alla base dei *reattori nucleari* (e delle bombe). Un processo tipico è mostrato nella figura.

Un nucleo di uranio ^{235}U viene colpito da un neutrone lento, lo assorbe e si spacca in due, con l'emissione di alcuni neutroni (tre nella figura) più altre particelle (neutrini, fotoni) non indicate.

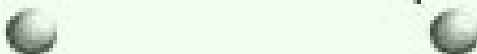
Uno o più dei neutroni, rallentati, possono rompere un altro nucleo di uranio, e così via, dando luogo a una *reazione a catena*.



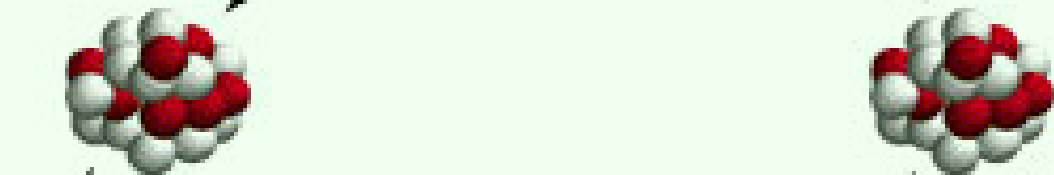
1st Generation



2nd Generation



3rd Generation



4th Generation



Uranium-235 atom

neutron

Energia dalla fissione

La fissione può essere sfruttata per produrre energia, perché mentre le particelle iniziali sono quasi ferme, quelle finali hanno fra tutte un'energia cinetica di quasi 200 MeV ($\sim 3.2 \times 10^{-11}$ J).

Sembra poca, ma un grammo di uranio naturale contiene circa 1.8×10^{19} nuclei di ^{235}U . Quindi consumando un grammo di uranio si potrebbero ottenere 5.8×10^8 J, pari a circa 160 kWh. (In realtà se ne ottiene meno, per varie ragioni che qui non possiamo approfondire.)

La domanda è:

da dove viene questa energia?

Il difetto di massa

Se andiamo a misurare le masse

$$M_{\text{in}}(^{235}\text{U} + \text{n}) \quad M_{\text{fin}}(^{141}\text{Ba} + ^{92}\text{Kr} + 3\text{n})$$

troviamo una differenza: la somma delle masse iniziali *supera* la somma di quelle finali, anche se di pochissimo: meno dell'1‰.

In altre parole, nel processo di fissione *si perde* della massa: per questo si parla di *difetto di massa*.

E qui entra in ballo la relatività.

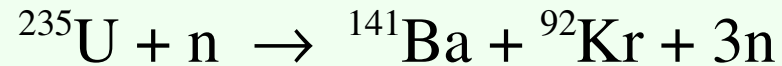
Si dice infatti: *la causa* della produzione di energia nella fissione *sta nel difetto di massa*, secondo la famosa relazione di Einstein

$$E = m c^2.$$

Ma c'è un errore

È vero che c'è un difetto di massa, è vero che si libera energia, ma questo non implica necessariamente che il primo fatto sia la *causa* del secondo.

Il fatto che si liberi energia può anche essere presentato in un altro modo. Supponiamo di voler decomporre tutti i nuclei che partecipano alla reazione



in protoni e neutroni (avremmo in totale 92 protoni e 144 neutroni). Per questo dovremo spendere una certa energia, perché le particelle nei nuclei sono legate dalla forza nucleare.

L'esperienza mostra che l'energia necessaria per il nucleo a sinistra è *minore* di quella che occorre a destra, il che è quanto dire (visto che alla fine si arriva alle stesse condizioni) che l'energia posseduta da ${}^{141}\text{Ba} + {}^{92}\text{Kr} + 3\text{n}$ *fermi* è minore di quella di ${}^{235}\text{U} + \text{n}$.

Che cosa ha detto Einstein?

Molto semplice: ha detto che *quando si aumenta l'energia* di un qualsiasi sistema, senza cambiarne la velocità (in particolare se era fermo prima e rimane fermo dopo) *la sua massa aumenta*.

Nel nostro caso *l'energia diminuisce*, quindi *la massa diminuisce*: il difetto di massa è *conseguenza*, non causa, della maggiore energia di legame.

Dato che l'energia si deve conservare, la differenza si ritrova come *energia cinetica* dei prodotti di reazione, ed è questa energia cinetica che alla fine viene utilizzata (in forma di calore) per far funzionare la centrale nucleare.

Riassumendo

Nella reazione di fissione, la diversa energia di legame rende disponibile la differenza come energia cinetica, quindi calore.

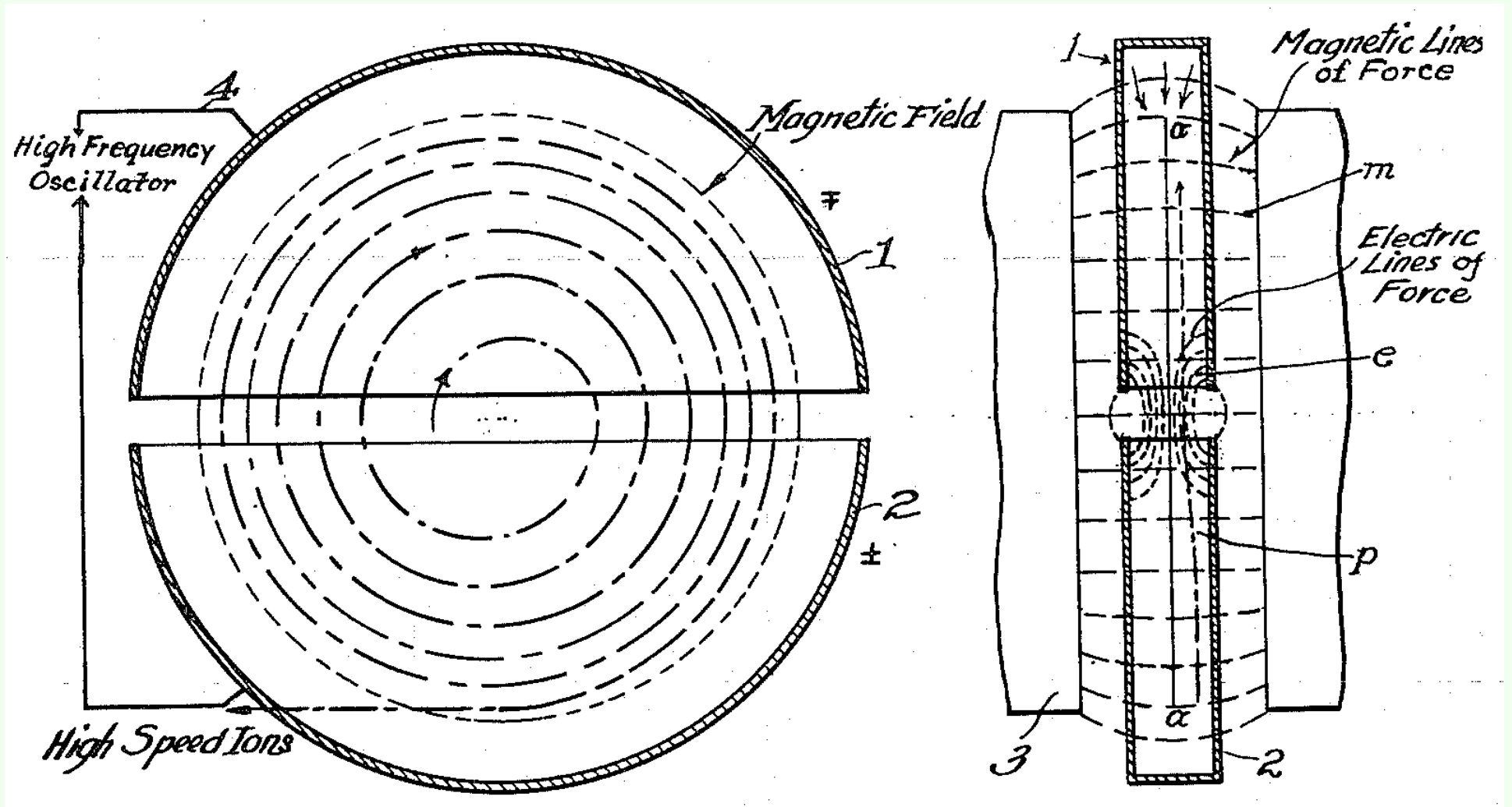
Questa è una cosa che potrebbe capire anche un ipotetico fisico che non avesse mai sentito nominare la relatività.

La diversa energia di legame implica anche un difetto di massa, che può essere utilmente sfruttato proprio per misurare le energie di legame.

*Ma la relatività non c'entra niente, né con le centrali nucleari
né con le bombe.*

Gli acceleratori di particelle: il ciclotrone

Giusto 80 anni fa E. Lawrence brevettò il primo modello di *ciclotrone*: vediamo il funzionamento.



Gli elementi essenziali sono due:

- un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano della figura a sinistra
- un campo elettrico oscillante fra i due elettrodi cavi a forma di D.

Una particella carica (es. un protone) che abbia velocità nel piano della figura, si muoverà di moto circolare uniforme.

Rivediamo perché.

In un campo magnetico una particella carica è soggetta alla *forza di Lorentz*, che ha modulo $F = q v B$ ed è perpendicolare tanto al campo come alla velocità.

Perciò la forza è *centripeta*, e produce un'accelerazione

$$a = F / m = q v B / m$$

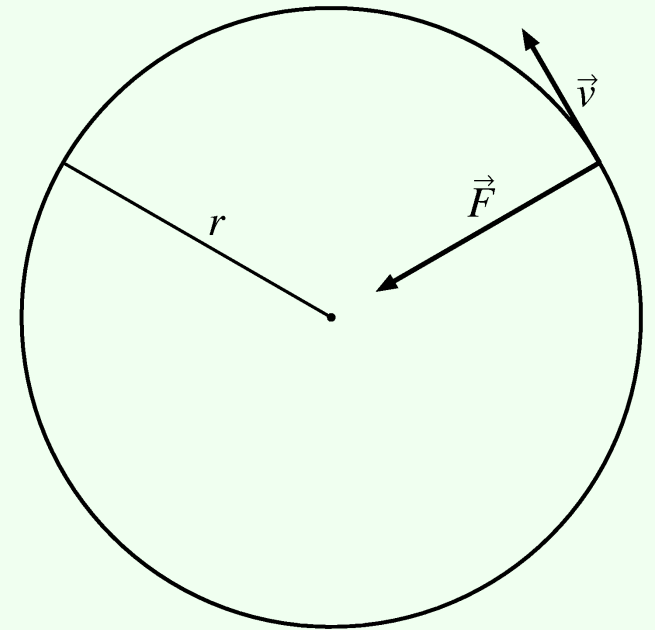
anch'essa centripeta. Il solo effetto di questa accelerazione è di cambiare la *direzione* della velocità, ma *non* la sua grandezza: dunque il moto sarà *uniforme*, anche se *curvilineo*.

Nel moto circolare uniforme la relazione tra accelerazione, velocità e raggio è

$$a = v^2 / r$$

e confrontando si trova

$$v / r = q B / m.$$

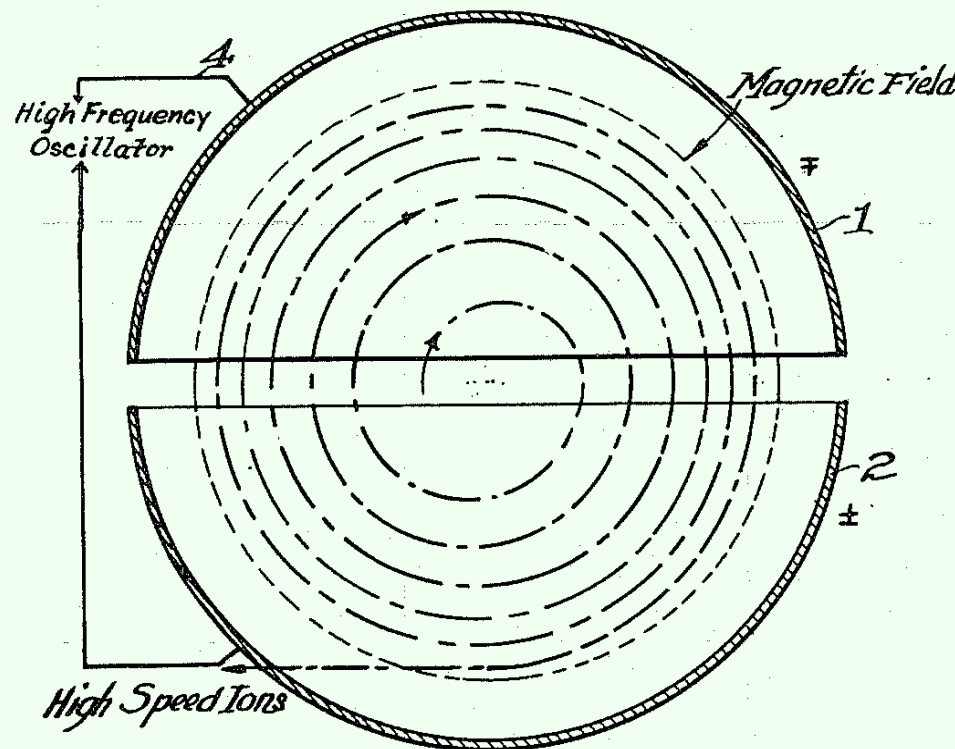


Ma v/r è la velocità angolare ω : quindi

$$\omega = q B / m$$

e abbiamo dimostrato che *la velocità angolare* della particella *rimane costante* finché rimane costante B , anche se cambia la velocità.

Per cambiare la velocità serve il secondo elemento del ciclotrone: il campo elettrico oscillante fra gli elettrodi.



Questo campo serve a dare una “spinta” alle particelle al momento giusto, quando si trovano a passare nello spazio fra gli elettrodi. Dato che il periodo di rivoluzione resta costante, le spinte arrivano sempre al momento voluto, e la velocità aumenta con ogni spinta.

Dato che v / r è costante, quando aumenta v aumenta anche r , e le particelle percorrono una traiettoria *a spirale*.

Tuttavia l'esperienza mostra che appena le particelle raggiungono velocità che siano qualche per cento di c , il ciclotrone *non funziona più*.

La ragione è che ω non rimane costante, come pensavamo di aver dimostrato, ma *diminuisce* al crescere della velocità delle particelle. Che cosa c'è sotto?

Entra in gioco la relatività

Noi siamo partiti dall'espressione della forza di Lorentz $F = q v B$, da quella dell'accelerazione centripeta $a = v^2 / r$ e dalla seconda legge della dinamica $F = m a$: combinandole abbiamo ottenuto

$$\omega = v / r = q B / m.$$

Ma la relatività c'insegna che quando la velocità si avvicina a c la seconda legge $F = m a$ non vale più, ma va modificata. La conseguenza è che la relazione scritta sopra cambia in

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m\gamma}$$

dove γ è il solito fattore relativistico:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dato che γ cresce con v e tende a infinito quando $v \rightarrow c$, il ciclotrone perde il sincronismo e non riesce più ad accelerare le particelle quando queste acquistano una velocità confrontabile con quella della luce.

Il sincrotrone

Un altro tipo di macchina acceleratrice sfrutta proprio il fatto che al crescere dell'energia le particelle acquistano velocità sempre più vicina a c .

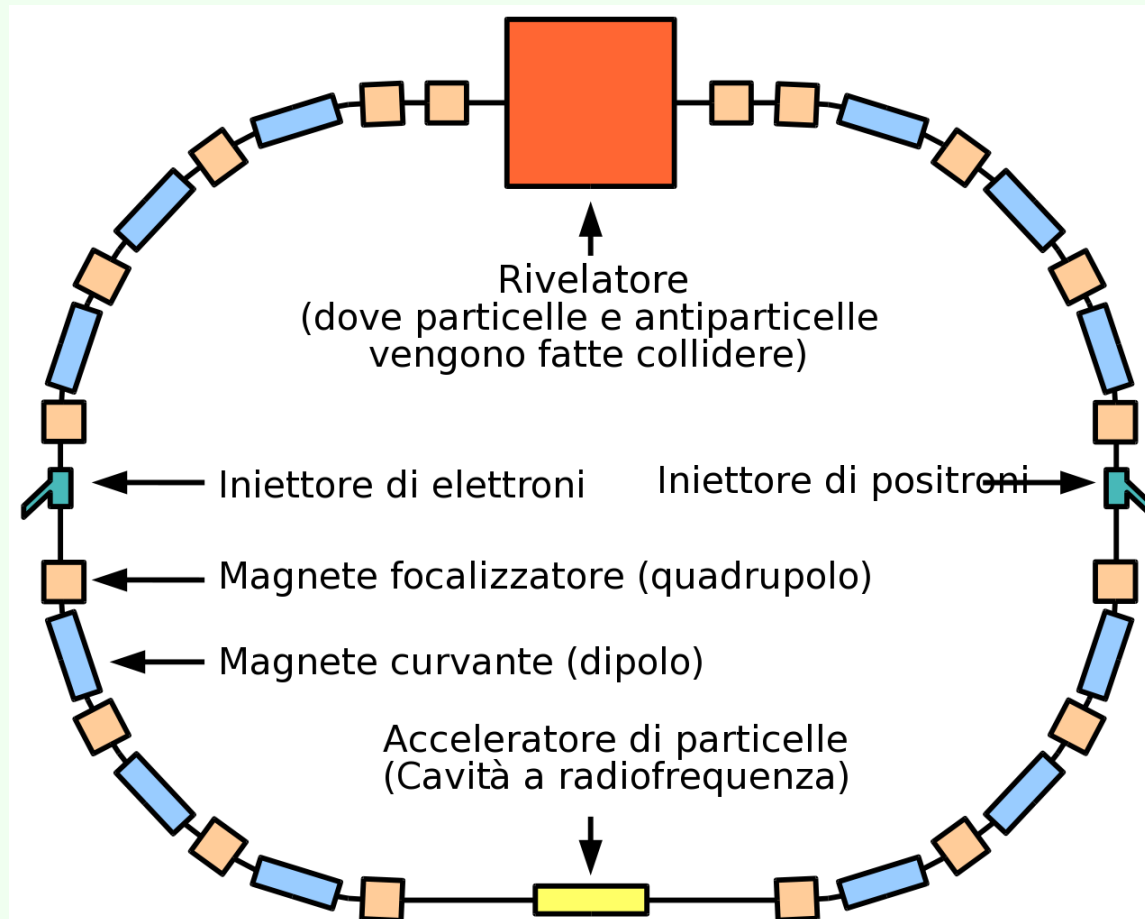
Riprendiamo la formula già vista:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m\gamma}$$

e supponiamo che v sia molto vicina a c . Si potranno allora far muovere le particelle su un'orbita di *raggio costante*, e avere anche ω *costante*, a patto di far crescere B quando cresce γ .

Il vantaggio di avere raggio costante è che basta fare il vuoto in un tubo di *sezione piccola* rispetto al raggio.

Il vantaggio di ω costante è che il campo acceleratore conserva *frequenza costante*.



Questa è una pianta del *Large Hadron Collider* (LHC) del CERN.
La circonferenza del tubo è quasi 27 km, il suo diametro soli 5 cm.

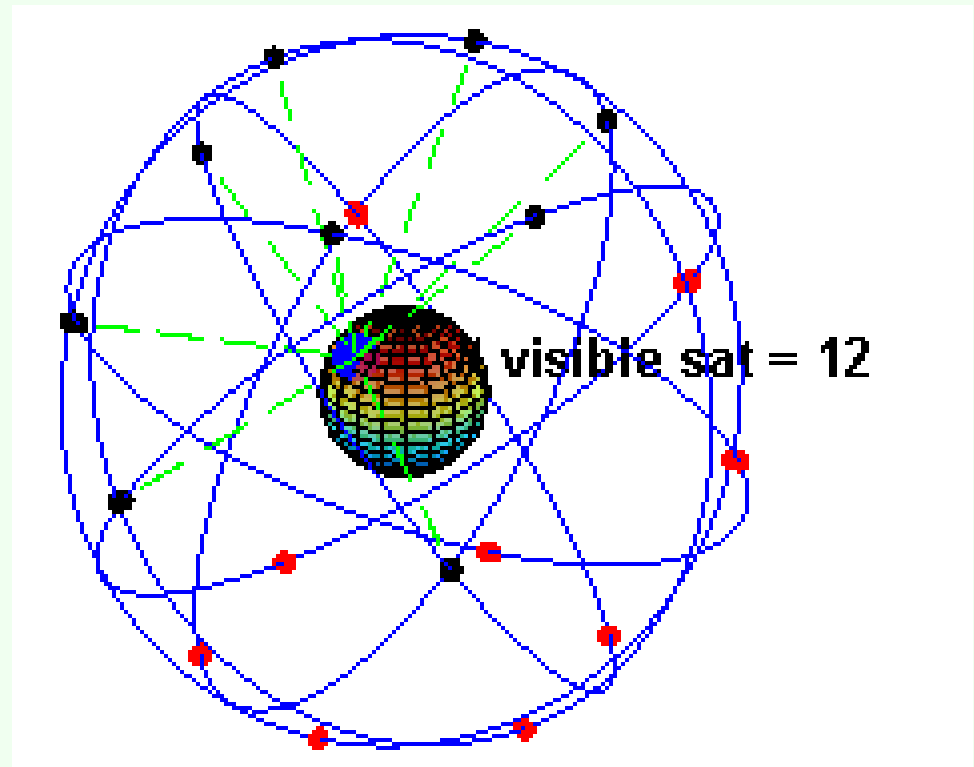


Il Global Positioning System

Il GPS è oggi noto a tutti, grazie ai navigatori satellitari. Non tutti però sanno come funziona, e soprattutto che cosa c'entra la relatività.

Alla base c'è un sistema di satelliti (in origine 24, oggi oltre 30) disposti su 6 orbite a circa 20000 km dalla superficie terrestre. A quella distanza il periodo di un satellite è 12 ore.

In questo modo su quasi tutta la superficie della Terra sono visibili più satelliti allo stesso tempo, come mostra l'animazione.



Ogni satellite porta un computer (ovvio!) e un *orologio atomico*.

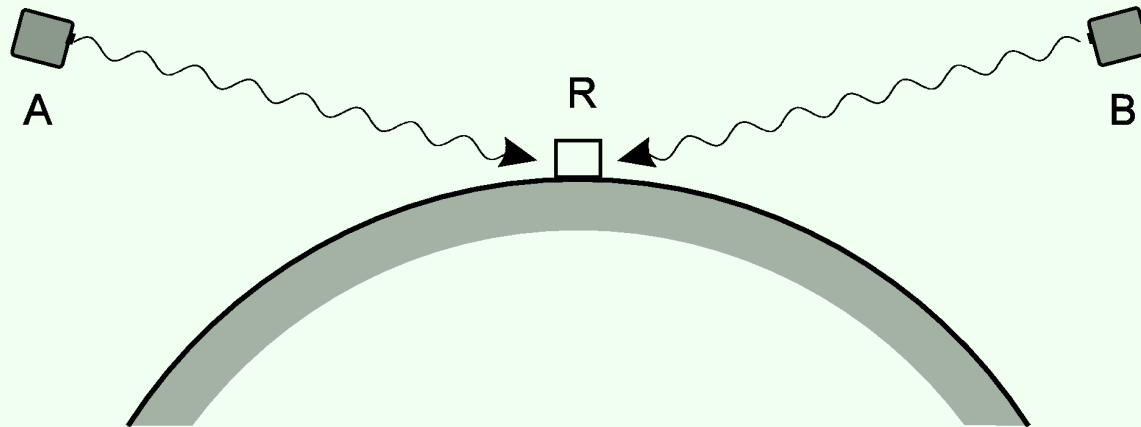
(Senza la precisione degli orologi atomici il sistema non potrebbe funzionare.)

Semplifichiamo un po'. Ogni 30 secondi ciascun satellite trasmette a tutti i ricevitori a terra la sua *posizione* e il *tempo* di emissione del segnale.

Un ricevitore, quando riceve il segnale, può misurare il *tempo trascorso* dall'emissione e quindi calcolare la *distanza del satellite*.

Per localizzare un punto nello spazio occorrono tre distanze, quindi i segnali di tre satelliti sarebbero sufficienti. Questo però richiederebbe che anche il ricevitore avesse un orologio di alta precisione: infatti un errore nel tempo di un microsecondo significa 300 metri nella distanza, inaccettabile.

Il problema si risolve con un satellite in più, ma non abbiamo tempo per spiegare come.



La figura si riferisce per semplicità a un piano, dove due satelliti bastano.

Il redshift gravitazionale

Supponiamo per un momento di avere anche noi un orologio atomico, e di misurare l'intervallo di tempo fra due segnali che ci arrivano da un satellite. Non possiamo aspettarci che l'intervallo sia uguale a quello alla partenza, visto che il satellite si muove e perciò la sua distanza da noi cambia.

Ma di questo possiamo tener conto, oppure possiamo pensare — per fare le cose più facili — a un satellite geostazionario.

In ogni caso scopriremo che l'intervallo all'arrivo è *più breve* che alla partenza, anche se di pochissimo: per i satelliti GPS i 30 secondi diventerebbero 29.999999987, ossia 13 nanosecondi in meno.

Per quanto piccola, questa variazione se trascurata avrebbe effetti disastrosi su funzionamento del GPS: vediamo perché.

Redshift contro GPS

Sia t_1 il tempo segnato dall'orologio *sul satellite* quando parte il primo segnale, t_2 il tempo segnato dal *nostro* orologio quando il segnale arriva a terra.

Analogamente t_3 e t_4 per il secondo segnale.

Noi misuriamo la distanza fra segnale e ricevitore calcolando

$$d = c (t_2 - t_1)$$

e per il secondo segnale:

$$d' = c (t_4 - t_3).$$

Il problema è che le due differenze di tempo $t_2 - t_1$ e $t_4 - t_3$ **sono diverse**, anche se il satellite è fermo.

Abbiamo visto infatti che sono diverse $t_3 - t_1$ e $t_4 - t_2$: la seconda è più piccola, anche se di poco. Convieni porre

$$t_4 - t_2 = k (t_3 - t_1)$$

dove k è un moltiplicatore pochissimo diverso da 1, però minore:

$$k = 1 - 4.467 \times 10^{-10}.$$

Possiamo allora calcolare $t_4 - t_3$. Saltando i passaggi:

$$t_4 - t_3 = (t_2 - t_1) - (1 - k) (t_3 - t_1).$$

La differenza $(1 - k) (t_3 - t_1)$ viene interpretata come una variazione di distanza:

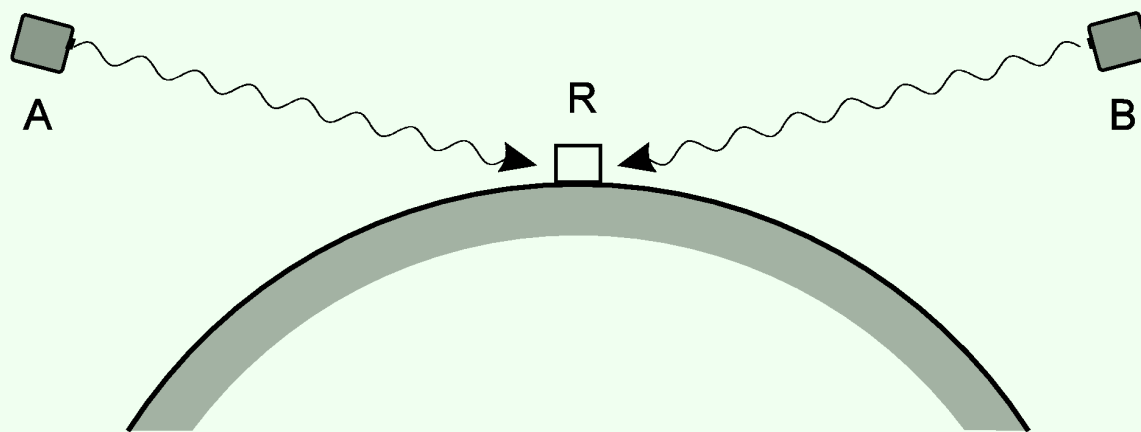
$$d' = d - c (1 - k) (t_3 - t_1)$$

e mettendo i numeri si trova $d' = d - 4$ metri.

Ricordate che abbiamo considerato due segnali separati di soli 30 secondi: abbiamo dunque una variazione di distanza di 4 metri in 30 secondi, pari a 480 metri in un'ora.

Se non sapessimo che questo è un effetto relativistico, come lo dovremmo interpretare?

Dovremmo dire che il nostro ricevitore *si avvicina* al satellite, anzi *a tutti* i satelliti, ossia che si è alzato in volo, anche sta in un'auto...



Ma visto che l'effetto c'è, come si può usare il GPS?

La soluzione è semplice: basta rallentare gli orologi sui satelliti. Infatti gli orologi sono regolati in modo che invece di fornire una frequenza di riferimento di 10.23 MHz, su cui è calibrato il software, forniscono

10.229 999 995 43 MHz,

è il gioco è fatto...

Un aneddoto

Quando nel 1977 furono messi in orbita i primi satelliti con orologio atomico a bordo, l'effetto di redshift gravitazionale (che era stato previsto da Einstein nel 1911 e già verificato sulla Terra nel 1960) era assai poco conosciuto: c'era chi ne ignorava l'esistenza e chi lo calcolava in modo errato.

Visto che non si riusciva a decidere chi avesse ragione, il primo satellite di prova fu dotato di un sistema di aggiustamento a distanza della frequenza dell'orologio.

Inutile dire che l'esperienza diede ragione a quelli che conoscevano bene la teoria...

Riassumiamo

Abbiamo toccato tre argomenti:

1) *La fissione nucleare e il difetto di massa.*

Abbiamo visto che nella liberazione di energia la relatività non c'entra, anche se il difetto di massa è reale.

2) *Gli acceleratori di particelle.*

Abbiamo visto che la correzione relativistica alla seconda legge della dinamica impedisce che il ciclotrone funzioni oltre una certa energia, mentre rende possibile il sincrotrone.

3) Il GPS e il redshift gravitazionale.

Abbiamo visto che se non si tiene conto del redshift, il GPS diventa inutilizzabile: sebbene l'effetto sia piccolissimo, produce spostamenti inaccettabili nelle posizioni misurate.

Conclusione: ci sono applicazioni pratiche di grande importanza nelle quali non si può ignorare la relatività.