E. Fabri *maggio 2015*

# Che cosa sono i fotoni?

## (Brevissima introduzione alla QFT)

### Premessa

Si tratta di un argomento che ho affrontato in diverse occasioni, che vanno da [1] (di cui consiglio al momento le prime due puntate) per continuare con [2] e con [3]. C'è poi [4] che sta a un livello più avanzato (è scritto per laureati in fisica) ma contiene anche idee che dovrebbero essere accessibili a un livello inferiore.

Però nessuno di questi scritti soddisfa pienamente l'esigenza di mettere un po' d'ordine nell'argomento, di cui troppo spesso si parla senza avere le conoscenze indispensabili per non parlare a vanvera. Purtoppo la cosiddetta divulgazione non aiuta, perché sotto il vincolo di tenere al minimo (ossia zero) la matematica, e di fatto anche la fisica, presenta la materia in modo vago, ingannevole, incoraggiando idee spesso errate o comunque confuse e inutili per una comprensione minimamente accettabile.

Perciò ora prenderò una strada un po' diversa: svilupperò il discorso fatto in [1] in modo più tecnico, perché c'è poco da fare: se continuiamo a fare soltanto chiacchiere, alla definizione di fotone non ci arriviamo...

## Prima parte: il campo scalare classico

### Introduzione

In `qed2.htm` ho introdotto (a parole) l'idea dei *modi normali.* Vediamo un po' meglio di che si tratta. Prenderò ad esempio non il campo e.m., che è complicato (campo vettoriale, 4 componenti, polarizzazione, invarianza di gauge) ma il molto più semplice *campo scalare reale di massa nulla* che col campo e.m. già condivide una quantità di aspetti essenziali, pur essendo parecchio più semplice, come fisica e come matematica.

Col termine gergale "campo scalare reale di massa nulla" intendo una funzione scalare $\phi$ delle 4 variabili spazio-temporali $(x, y, z, t)$ che soddisfa l'equazione di d'Alembert (EdA):

$$\Box\phi = \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0,$$

la stessa che soddisfano campi e potenziali e.m. nel vuoto. Per il momento sto in ambito classico: della quantizzazione si parla nella seconda parte. Va precisato che la dizione "massa nulla" non appartiene a questo ambito: ne vedremo il significato nella seconda parte. "Scalare" si riferisce alla proprietà di trasformazione per il gruppo di Lorentz, ma è un argomento di cui non ci occuperemo.

### Separazione delle variabili

La prima cosa che conviene fare è separare le variabili. Con ciò intendo che cerco soluzioni del tipo

$$\phi(x, y, z, t) = a(t)\, u(x, y, z). \tag{1}$$

Si trova che $u$ deve soddisfare l'equazione di Helmholtz (EdH):

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2}\, u = 0$$

dove $\omega$ è un parametro reale. Quanto ad $a(t)$, sarà semplicemente soluzione dell'equazione del moto armonico:

$$\ddot{a} + \omega^2 a = 0. \tag{2}$$

Le sue soluzioni sono facili:

$$a(t) = a(0)\, e^{-i\omega t}$$

ed è importante notare che conviene la forma complessa, anche se alla fine vogliamo avere $\phi$ reale. Questo significa che al posto della (1) useremo

$$\phi(x, y, z, t) = a(t)\, u(x, y, z) + a^*(t)\, u^*(x, y, z) \tag{1'}$$

per garantirci che $\phi$ sia reale (l'asterisco significa complesso coniugato).

### Sviluppo in autofunzioni

Il prossimo passo è cercare soluzioni dell'EdH. Questo richiede di specificare le *condizioni al contorno*, che dipendono dal problema fisico concreto. Per esempio, se volessimo trovare il campo in una cavità a pareti riflettenti, la giusta condizione al contorno sarebbe $u = 0$ sulle pareti. Nel caso di cavità di forma semplice (parallelepipedo rettangolo, sfera) si sanno dare in forma analitica le soluzioni.

Cosa che non farò. Mi limito a segnalare che succede un fatto importante: se la cavità è chiusa, le soluzioni esistono *solo per certi valori* di $\omega$. In termini generali, ciò significa che abbiamo un *problema ad autovalori.* In ogni caso le soluzioni formano una successione discreta, quindi sono individuate da un *numero quantico* $s$ (a volte conviene più d'uno) che al momento ha solo significato matematico. Le indicherò con $u_s$. Avremo quindi una successione di valori $\omega_s$, che sono le frequenze per cui esistono soluzioni. Sono queste soluzioni $u_s$ i *modi normali* del problema.

Succede poi che le $u_s$ formino un *sistema completo*, ossia che (in un senso matematicamente preciso che non posso toccare) ogni funzione di $(x, y, z)$

sia esprimibile come combinazione lineare (di solito infinita, ossia serie) delle *autofunzioni* $u_s$. Di conseguenza lo stesso accade per $\phi$:

$$\phi(x,y,z,t) = \sum_s a_s(t)\, u_s(x,y,z) + \text{c.c.}$$

Importante osservare che le ampiezze $a_s$ per ciascun modo normale sono oscillatori armonici (astratti). Quindi la dinamica del nostro campo, tramite la conoscenza dei modi normali, è stata ridotta a quella di un insieme di o.a. *indipendenti.*

In questo modo ho sviluppato il sommario discorso che si può leggere all'inizio di `qed2.htm`.

### Caso dello spettro continuo

In realtà, le cose stanno così per un campo che obbedisca condizioni al contorno in una regione limitata. Ma molto spesso siamo interessati a studiare un campo libero esteso a *tutto lo spazio*, e qui si presentano aspetti nuovi, e anche nuovi problemi matematici. . .

In primo luogo, non si sa quali condizioni al contorno imporre. La cosa più ovvia è fare annullare la $u$ all'infinito, ma in realtà questo non funziona, perché con tale condizione l'EdH *non ha soluzioni.* La pratica corrente del fisico è quindi un'altra: si scopre "a occhio" che l'EdH ha soluzioni che sono *onde piane*:

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\omega = c\,|\mathbf{k}|) \tag{3}$$

dove $\mathbf{k}$ è un vettore, $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Qui $\mathbf{k}$ può essere qualsiasi, il che significa che abbiamo uno *spettro continuo* di soluzioni. Resta vero (in un certo senso) che le onde piane formano un sistema completo: qualunque (?) funzione di $(x,y,z)$ può essere scritta come *sovrapposizione* di onde piane:

$$f(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{k})\, u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\, d\mathbf{k}.$$

Questo non è che un altro modo di dire che $f$ ammette una *trasformata di Fourier* (TdF) $g$. Quali siano le $f$ che ammettono TdF, è cosa che lasciamo da parte.

Debbo invece osservare che compare una *degenerazione* su $\omega$, perché vettori $\mathbf{k}$ aventi lo stesso modulo danno lo stesso $\omega$. Ciò apre la strada a scelte diverse al posto delle onde piane: sebbene queste abbiano numerosi pregi, e siano quindi di gran lunga preferite, non sono in linea di principio l'unica possibilità. Vedremo che ciò è importante per la definizione di fotone.

Fin qui ho esposto alcuni brandelli della teoria *classica* del campo scalare (roba nota dall'800, come dicono i nomi che ho citato). Per inciso, se invece di un campo di massa mulla ne avessimo uno di massa non nulla, cambierebbe poco: al posto dell'EdA avremmo l'equazione di Klein–Gordon [1]

$$\Box\phi - \mu^2\phi = 0 \tag{4}$$

e cambierebbe la relazione tra $\omega$ e $\mathbf{k}$ (la cosiddetta "relazione di dispersione")

$$\omega = c\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2} \tag{5}$$

ma il resto sarebbe inalterato.

## Seconda parte: quantizzazione del campo scalare

### Introduzione

In termini generali il problema della quantizzazione si è posto fin dalla nascita della m.q.: supposto di avere un sistema fisico di cui si conosce la dinamica secondo la meccanica classica, come si effettua la traduzione alla m.q.? Qualunque corso di m.q. è in buona parte la risposta, per casi importanti, a questa domanda. Finché si ha a che fare con i comuni sistemi meccanici (oscillatori, corpi in orbita ...) non ci sono gravi problemi, e ci sono regole generali su come procedere.

Ma fin dagli inizi i teorici si posero un problema più complicato: si può (e come) quantizzare il campo e.m.? La risposta, come si sa, è l'*elettrodinamica quantistica* (QED) che in realtà fa molto di più: studia dal punto di vista quantistico il campo e.m. non già *libero*, ma *in interazione con cariche*. Ma il punto di partenza è comunque il campo libero, ed è solo di questo che mi occuperò qui, Anzi, come ho già fatto in ambito classico, studierò un caso più semplice: il campo scalare reale di massa nulla.

### Le coordinate canoniche

Abbiamo già visto che dal punto di vista classico il campo è equivalente a un insieme di o.a. indipendenti, con le frequenze $\omega_s$. Abbiamo caratterizzato gli oscillatori mediante le *ampiezze* $a_s$ (complesse), ma avremmo potuto usare invece le più comuni *coordinate canoniche* $q_s$, $p_s$:

$$\begin{aligned} q_s &= a_s + a_s^* \\ p_s &= i\,(a_s^* - a_s) \end{aligned}$$

(a meno di qualche fattore che non serve scrivere).

---

[1] Sul significato del parametro $\mu$ tornerò alla fine della seconda parte.

Le $q_s$, $p_s$ si prestano meglio alla quantizzazione, perché basta leggerle come operatori sullo spazio di Hilbert degli stati del campo (spazio di Fock). Essenziali le *relazioni di commutazione*:

$$[q_s, p_{s'}] = i\hbar\, \delta_{s,s'} \tag{6}$$

(tutti gli altri commutatori sono nulli).

**Gli operatori di salita e discesa. Il vuoto**

Qualunque testo di m.q. sviluppa ampiamente la quantizzazione dell'o.a. In particolare si mostra che dalle (6) seguono per le $a_s$

$$[a_s, a_{s'}^+] = \delta_{s,s'} \tag{7}$$

($a_{s'}^+$ è l'*aggiunto* di $a_{s'}$). Tutti gli altri commutatori sono nulli.

Per ogni modo normale $s$ gli stati stazionari sono una successione

$$|0\rangle \;|1\rangle \;\ldots\; |n_s\rangle \;\ldots$$

con autovalori dell'energia $\bigl(n_s + \frac{1}{2}\bigr)\hbar\,\omega_s$. È inteso che gli autovettori $|n_s\rangle$ siano *normalizzati*:

$$\langle n_s | n_s' \rangle = \delta_{n_s, n_s'}.$$

Si dimostra che

$$\begin{aligned} a_s|n_s\rangle &= \sqrt{n_s}\;|n_s - 1\rangle \\ a_s^+|n_s\rangle &= \sqrt{n_s + 1}\;|n_s + 1\rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

Queste mostrano che gli operatori $a$, $a^+$ sono rispettivamente operatori di "discesa" e di "salita" per l'autovalore $n_s$. Mettendo insieme i vari modi normali otteniamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ complessivo del campo, come prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert dei singoli oscillatori.

Il generico vettore della base con cui abbiamo costruito $\mathcal{H}$ sarà designato

$$|n_1\, n_2 \ldots\rangle$$

se l'indice $s$ che individua il singolo modo normale va da 1 in su. In particolare lo stato fondamentale, in cui tutti gli $n_s$ sono nulli, sarà indicato brevemente con $|0\rangle$:

$$|0\rangle = |0, 0, \ldots\rangle.$$

Questo è il *vuoto* del campo. S'intende che "vuoto" è un termine tecnico, al quale non si deve attribuire alcun significato metafisico.

C'è però da risolvere un "piccolo" problema, relativo all'energia di questo stato. Dal momento che tutti i modi normali, in quanto o.a., hanno minima energia $\frac{1}{2}\,\hbar\,\omega_s$, lo stato $|0\rangle$ avrebbe energia

$$\sum_s \tfrac{1}{2}\,\hbar\,\omega_s$$

che è infinita. È il famigerato problema della "energia di punto zero"... Il problema si risolve in sostanza ridefinendo l'operatore energia per ogni modo normale, in modo che abbia autovalori $n_s\hbar\,\omega_s$.

**Stati a una o più particelle**

Dopo il vuoto, gli stati più semplici sono quelli in cui in cui uno e uno solo degli $n_s$ vale 1:

$$\begin{gathered}|1,0,0,\ldots\rangle\\ |0,1,0,\ldots\rangle\\ |0,0,1,\ldots\rangle\\ \ldots\end{gathered}$$

Sono ovviamente infiniti, e generano un sottospazio $\mathcal{H}_1$ che diremo sottospazio degli stati "a una particella." Perché questo nome?

Osserviamo che gli $n_s$ possono essere visti come autovalori di operatori $N_s$. Si dimostra che

$$N_s = a_s^+ a_s.$$

Gli $N_s$ vengono chiamati (v. dopo) "numero di particelle nello stato $s$." Con tale dizione, le (8) si leggono così:

– l'operatore $a_s$ *distrugge* una particella nello stato $s$
– l'operatore $a_s^+$ *crea* una particella nello stato $s$

Quindi $a_s$ è un *operatore di distruzione*, $a_s^+$ un *operatore di creazione*.

Si può anche definire

$$N = \sum_s N_s:$$

nel sottospazio degli stati a una particella $N$ ha autovalore 1, ed è facile l'estensione agli stati a 2, 3... particelle. [2] Si verifica che $N$ è una *costante del moto*: il numero di particelle *si conserva*.

Ancora: per l'energia totale si ha

$$E = \sum \hbar\,\omega_s N_s$$

che è anch'essa (banalmente) una costante del moto.

[2] In realtà sugli stati a più particelle ci sarebbe qualcosa da dire, legata al fatto che le particelle sono *bosoni*; ma in questa sede preferisco sorvolare.

## Quantizzazione nel continuo. La massa nulla

Possiamo dire di più se facciamo una scelta per gli stati di base. Prendiamo per es. il caso del campo libero nell'intero spazio, con $\mathbf{k}$ come numero quantico dei modi normali (onde piane). Con qualche conto si dimostra che l'operatore

$$\mathbf{P} = \int \hbar\, \mathbf{k}\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} \tag{9}$$

ha tutte le proprietà richieste all'impulso del campo.

Nella (9) $a(\mathbf{k})$ rappresenta l'operatore di distruzione associato al vettore $\mathbf{k}$; analogo il significato di $a^+(\mathbf{k})$. Il fatto che $\mathbf{k}$ abbia un continuo di valori cambia due cose: una si è già vista, ed è la comparsa di un integrale nella (9) al posto di una somma. L'altra è che la relazione di commutazione (7) diventa

$$[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{7$'$}$$

con una delta di Dirac al posto della semplice delta di Kronecker.

Ma torniamo alla (9), riscrivendola

$$\mathbf{P} = \int \hbar\, \mathbf{k}\, N(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{10}$$

Ora si vede che l'impulso totale del campo è la "somma" degli impulsi delle particelle — ciascuna avente impulso $\hbar\, \mathbf{k}$ — di cui per ogni $\mathbf{k}$ ce ne sono $N(\mathbf{k})$. Lo stesso si può dire per l'energia e per qualsiasi altra grandezza additiva del campo. Per l'energia si ha

$$E = \int \hbar\, c\, |\mathbf{k}|\, N(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{11}$$

La (11) mostra che la singola particella d'impulso $\hbar\, \mathbf{k}$ ha energia $\hbar\, c\, |\mathbf{k}|$: si tratta quindi di particelle di *massa nulla*, come anticipato.

Se fossimo partiti dell'eq. di Klein–Gordon (4), al posto della (11) avremmo trovato

$$E = \int \hbar\, \omega(\mathbf{k})\, N(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{12}$$

con $\omega(\mathbf{k})$ dato dalla relazione di dispersione (5). Allora l'energia della singola particella sarebbe stata

$$\hbar\, \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{c^2(\hbar|\mathbf{k}|)^2 + c^2(\hbar\mu)^2}$$

che è la relazione relativistica tra impulso ed energia per una particella di massa $\hbar\mu/c$.

### Onde e particelle

A questo punto sono davvero comparse le particelle (quanti) del campo, e si vede che non ha molto senso chiedersi se il campo è fatto di onde o di particelle: entrambe le cose sono vere e non c'è alcun conflitto né "dualismo." (3)

Non è necessario richiedere a una particella (quindi anche a un fotone) di essere autostato dell'impulso, e neppure dell'energia. Infatti *tutti* gli stati di $\mathcal{H}_1$ sono legittimi stati di una particella (quasi una tautologia ...). Se sono autostati dell'energia, non lo sono necessariamente anche dell'impulso, per la degenerazione già vista. Ma in generale non sono neppure autostati dell'energia: i vettori di $\mathcal{H}_1$ sono tutti autovettori di $N$, ma non tutti di $E$.

Del resto, anche sperimentalmente, non si richiede a un fotone, come a qualsiasi altra particella, di avere impulso definito, anche se ha energia definita: è la questione della "Nadelstrahlung" di Einstein. Non è vero che un fotone venga emesso da un atomo in una direzione precisa, anzi è in generale distribuito (in senso quantistico) in tutte le direzioni. Quindi non si trova affatto in un autostato dell'impulso.

Quanto all'energia, è in realtà impossibile che sia esattamente definita, dato che ha uno spettro continuo. Un fotone (qualsiasi particella libera) può avere energia *quasi* definita; non più di questo.

### Riferimenti


[1] `http://www.sagredo.eu/divulgazione/qed/qed0.htm`

[2] `http://www.sagredo.eu/divulgazione/fotoni.htm`

[3] `http://www.sagredo.eu/divulgazione/entang1.htm`

[4] `http://www.sagredo.eu/articoli/fotoni.pdf`


(3) A dire il vero, questa non è tutta la storia. Ci sarebbe da mostrare che è possibile costruire stati che rappresentano vere e proprie onde "classiche": i cosiddetti "stati coerenti." Un'altra delle tante cose che qui debbo tralasciare.