Campi vettoriali a massa diversa e uguale a zero*

Trattazione classica (non quantistica)

1. Lagrangiana

A scopo d'introduzione conviene richiamare brevemente la teoria lagrangiana, distinguendo il caso $m \neq 0$ da quello $m = 0$.

A: $m \neq 0$

Le scelte fondamentali per una lagrangiana di un campo vettoriale A_μ di massa $m \neq 0$ si possono ricondurre alle seguenti:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\, \partial_\mu A^\varrho\, \partial^\mu A_\varrho - \tfrac{1}{2}\, A^\mu A_\mu \tag{1}$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{4}\, F_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma} - \tfrac{1}{2}\, A^\mu A_\mu \tag{2}$$

dove:

$$F_{\mu\sigma} = \partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu.$$

La lagrangiana (1) ammette gauge invarianza ristretta: è cioè invariante (a meno di una quadridivergenza) rispetto alla trasformazione

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{1.1}$$

purché: [1][2]

$$(\Box - m^2)\Lambda = 0. \tag{1.2}$$

Le corrispondenti equazioni del moto sono:

$$(\Box - m^2) A_\mu = 0 \tag{1.3}$$

e ovviamente ammettono gauge invarianza ristretta (1.1), (1.2). Un'opportuna scelta della funzione di gauge Λ permette d'imporre la "condizione di Lorentz"

$$\partial^\mu A_\mu = 0. \tag{1.4}$$

---

* Riprodotto con modifiche quasi solo tipografiche da appunti offset, databili presumibilmente nel 1967–68.

(1) Verranno sempre trascurate grandezze scalari costanti, tali cioè che il loro gradiente sia nullo.

(2) Il simbolo $\Box$ sta per $-\partial^\mu \partial_\mu$.

Sia infatti $\partial^\mu A_\mu = \varrho$; dalla (1.3) segue

$$(\Box - m^2)\varrho = 0.$$

Se allora operiamo sui campi A_μ la trasformazione di gauge (1.1) con $\Lambda = \varrho/m^2$, otteniamo un campo A'_μ che soddisfa (1.3) e (1.4). Tale campo risulta univocamente determinato ([1]): il sistema di equazioni (1.3), (1.4) non è gauge invariante.

La lagrangiana (2) non ammette gauge invarianza; essa, come equazioni del moto, fornisce:

$$\Box A_\mu + \partial_\mu \partial^\sigma A_\sigma - m^2 A_\mu = 0. \tag{1.5}$$

Da tali equazioni segue identicamente la (1.4). Le equazioni del moto si semplificano pertanto a:

$$(\Box - m^2) A_\mu = 0 \tag{1.5'}$$

e ad esse va aggiunta la "condizione di Lorentz" (1.4).

Si vede cioè che le lagrangiane (1) e (2) conducono essenzialmente allo stesso risultato. Si noti che le componenti indipendenti del campo sono in ogni caso soltanto tre.

B: $m = 0$

Le lagrangiane (1) e (2) si scrivono rispettivamente:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\, \partial_\mu A^\varrho\, \partial^\mu A_\varrho \tag{1.°}$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{4}\, F_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma} \tag{2.°}$$

e danno rispettivamente luogo alle equazioni del moto:

$$\Box A_\mu = 0 \tag{1.3°}$$

$$\Box A_\mu + \partial_\mu \partial^\sigma A_\sigma = 0. \tag{1.5°}$$

La lagrangiana (1.°), come nel corrispondente caso di massa non nulla, ammette gauge invarianza ristretta (alla (1.2) corrisponde in questo caso la $\Box\Lambda = 0$); ma qui *non* è possibile sfruttare l'arbitrarietà della funzione di gauge per imporre la condizione di Lorentz. Essa può tuttavia venire assegnata come condizione aggiuntiva, sfruttando cioè le condizioni iniziali. I campi soddisfano così le:

$$\Box A_\mu = 0 \qquad \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{1.6°}$$

e sono definiti a meno di trasformazioni di gauge ristrette.

La lagrangiana (2.°), diversamente che nel caso $m \neq 0$, ammette gauge invarianza (non ristretta). D'altra parte, dalle equazioni del moto (1.5°) *non* si può dedurre (come nel caso $m = 0$) la condizione di Lorentz. Essa tuttavia può essere imposta operando una particolare scelta per le funzioni di gauge: ad esempio, se si parte da $\partial_\mu A^\mu = \varrho$, basta porre $\Box\Lambda = \varrho$. In questo modo i campi soddisfano le (1.6°) e la gauge invarianza si riduce a gauge invarianza ristretta.

Dunque anche nel caso di massa nulla i risultati che derivano dall'assumere la lagrangiana (1) oppure la lagrangiana (2) coincidono. Nel caso di massa nulla le componenti essenziali sono due, grazie alla sopravvivenza di una gauge invarianza ristretta.

2. Trattazione astratta

Studieremo ora un po' più in astratto la descrizione di un campo vettoriale, in modo da interpretare le lagrangiane (1) e (2), e giustificare le particolarità del caso $m = 0$. Lasciando per ora da parte l'approccio lagrangiano, consideriamo i quadrivettori A_μ: essi formano uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$. Studieremo le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré $\mathcal{P}$ su $\mathcal{V}$, che si possono identificare, nello spirito del lavoro di Newton e Wigner, con i sistemi elementari descritti dai campi A_μ.

Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ introdurremo una metrica, ai fini di ottenere uno spazio di Hilbert: ciò permetterà successivamente di passare a una trattazione quantistica. A titolo di tentativo, consideriamo la seguente "metrica," ovviamente invariante per $\mathcal{P}$:

$$\|A\|^2 = \int dk\, A^*_\mu(k) A^\mu(k) \tag{2.1}$$

dove $A_\mu(k)$ è la trasformata di Fourier di $A_\mu(x)$. Come vedremo più avanti, (2.1) non è definita positiva, e conviene piuttosto chiamarla una pseudometrica.

Consideriamo ora l'effetto dei generatori $M_{\lambda\mu}$, P_μ di $\mathcal{P}$ sugli elementi di $\mathcal{V}$. Si ottiene (sopprimendo gli indici μ di un quadrivettore A_μ):

$$\begin{aligned} -i(M_{\lambda\mu}A)_\varrho &= x_\mu\, \partial_\lambda A_\varrho - x_\lambda\, \partial_\mu A_\varrho + g_{\mu\varrho}A_\lambda - g_{\lambda\varrho}A_\mu \\ -i(P_\mu A)_\varrho &= \partial_\mu A_\varrho. \end{aligned}$$

Analogamente consideriamo gli invarianti $P^\mu P_\mu$ e $W = W^\mu W_\mu$. Dalla definizione di W_μ:

$$W_\mu = -\tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{\mu\varrho\lambda\sigma} M^{\varrho\lambda} P^\sigma$$

segue

$$(W_\mu A)_\sigma = -\tilde{F}_{\mu\sigma}$$

con

$$\tilde{F}_{\mu\sigma} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{\mu\sigma\varrho\lambda} F^{\varrho\lambda}.$$

Si ottiene:

$$(P_\mu P^\mu A)_\varrho = \Box A_\varrho \tag{2.2}$$

$$(WA)_\varrho = -2(\Box A_\varrho + \partial_\varrho \partial^\sigma A_\sigma). \tag{2.3}$$

Ora, le rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{P}$ sono caratterizzate degli autovalori degli invarianti:

$$P^\mu P_\mu \mapsto m^2 \tag{2.2$'$}$$

$$W \mapsto -m^2 s(s+1), \tag{2.3$'$}$$

dove m è la massa e s lo spin. In generale si può mostrare che i soli possibili autovalori di s sullo spazio lineare $\mathcal{V}$ sono 0 e 1.

Riducendo $\mathcal{V}$ rispetto all'invariante $P^\mu P_\mu$ si ottengono gli spazi lineari $\mathcal{V}_m$; $\mathcal{V}_m$ essendo lo spazio lineare dei quadrivettori che soddisfano l'equazione di Klein–Gordon con massa m (1.3).

A: $m \neq 0$

Consideriamo in primo luogo il caso di massa non nulla, e riduciamo $\mathcal{V}_m$ rispetto all'invariante W. Prendiamo anzitutto in esame l'autovalore 0 dello spin (cfr. (2.3$'$)), e definiamo $\mathcal{V}_m^0$ come il sottospazio di $\mathcal{V}_m$ i cui vettori soddisfano la:

$$(WA)_\varrho = 0,$$

cioè:

$$\Box A_\varrho + \partial_\varrho \partial^\sigma A_\sigma = 0 \tag{2.4}$$

ossia, essendo $A_\varrho \in \mathcal{V}_m$:

$$-m^2 A_\varrho + \partial_\varrho \partial^\sigma A_\sigma = 0 \tag{2.4$'$}$$

e finalmente, essendo $m \neq 0$:

$$A_\varrho = \frac{1}{m^2}\, \partial_\varrho \partial^\sigma A_\sigma .$$

Si possono allora introdurre gli scalari $\varphi = -(1/m^2)\, \partial^\sigma A_\sigma$, e stabilire un isomorfismo tra $\mathcal{V}_m^0$ e gli scalari che soddisfano l'equazione di Klein–Gordon con massa m.(3) Infatti, per ogni $A_\varrho \in \mathcal{V}_m^0$, si può univocamente determinare uno scalare φ:

$$\varphi = -\frac{1}{m^2}\, \partial^\sigma A_\sigma \qquad (\Box - m^2)\varphi = 0\,;$$

e per ogni scalare φ (che soddisfi l'equazione di Klein–Gordon) si può univocamente determinare un quadrivettore di $\mathcal{V}_m^0$:

$$A_\varrho = \partial_\varrho \varphi \;\in\; \mathcal{V}_m^0 .$$

(3) L'isomorfismo tra il sottospazio $\mathcal{V}_m^0$ e un campo di scalari era da attendersi, essendo $\mathcal{V}_m^0$ a spin zero.

È immediato verificare che la (2.1) fornisce su $\mathcal{V}_m^0$ una vera metrica, cioè che

$$\|A\|^2 = m^2 \int dk \, \varphi^*(k)\varphi(k)$$

è definita positiva.

Consideriamo ora il sottospazio $\mathcal{V}_0^1$ di $\mathcal{V}_m^0$, caratterizzato dall'autovalore $s = 1$ dello spin, cioè dall'autovalore $-2m^2$ di W. In altre parole, gli elementi di $\mathcal{V}_0^1$ soddisfano l'equazione:

$$\Box A_\varrho + \partial_\varrho \, \partial^\sigma A_\sigma = m^2 A_\varrho \tag{2.6}$$

cioè, essendo $A_\varrho \in \mathcal{V}_m$:

$$\partial_\varrho \, \partial^\sigma A_\sigma = 0;$$

quindi, trascurando come al solito grandezze a gradiente nullo:

$$\partial^\sigma A_\sigma = 0. \tag{2.7}$$

Riassumendo, lo spazio $\mathcal{V}_m$ si riduce completamente, se $m \neq 0$, nella somma di due sottospazi invarianti rispetto a $\mathcal{P}$, $\mathcal{V}_m^0$, $\mathcal{V}_m^1$:

$$\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m^0 \oplus \mathcal{V}_m^1.$$

Ciò si può anche esprimere dicendo che ogni campo vettoriale di massa $m \neq 0$ si può considerare come somma di un campo vettoriale a divergenza nulla e del gradiente di un campo scalare. Si può anche mostrare che (2.1) su $\mathcal{V}_m^1$ è definita negativa: ciò prova che (2.1) è in generale non definita su $\mathcal{V}_m$. D'altra parte, $\mathcal{V}_m^0$ e $\mathcal{V}_m^1$ sono ortogonali rispetto a (2.1): un ovvio cambiamento di segno permette allora di definire su $\mathcal{V}_m$ una metrica, ancora invariante per $\mathcal{P}$.

Da quanto si è detto, $\mathcal{V}_m^1$ fornisce le rappresentazioni irriducibili di $\mathcal{P}$ su $\mathcal{V}$ corrispondenti a massa m e a spin 1. I quadrivettori di $\mathcal{V}_m^1$ vanno quindi messi in relazione con i campi che descrivono particelle vettoriali di massa m; essi sono caratterizzati dal soddisfare l'equazione di Klein–Gordon con massa m e la condizione di Lorentz, e sono da tali relazioni univocamente determinati.

Un altro procedimento che qui è del tutto equivalente (non lo sarà, come vedremo, nel caso $m = 0$), consiste nel considerare come spazio di rappresentazione $\mathcal{V}_m/\mathcal{V}_m^0$, cioè pensare a vettori di massa m definiti a meno di gradienti. Ciò porta a considerare l'omomorfismo di $\mathcal{V}_m$ sullo spazio $\mathcal{T}$ dei tensori antisimmetrici, $\mathcal{V}^0$ essendo il nucleo di tale omomorfismo:

$$A_\mu \mapsto \partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu = F_{\mu\sigma}$$

(dato $F_{\mu\sigma}$, A_μ è definito a memo di un gradiente).

I due procedimenti sono equivalenti, giacché $\mathcal{V}_m^1$ è isomorfo a $\mathcal{V}_m/\mathcal{V}_m^0$, e ciò dipende dalla completa riducibilità di $\mathcal{V}_m$, cioè dall'esistenza di due sottospazi invarianti, $\mathcal{V}_m^0$, $\mathcal{V}_m^1$, con $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m^0 \oplus \mathcal{V}_m^1$.

Tenendo presenti queste considerazioni, torniamo alla formulazione lagrangiana: è facile convincersi che la lagrangiana (2) corrisponde al procedimento astratto che permette di ottenere $\mathcal{V}_m^1$ dalla riduzione di $\mathcal{V}_m$ rispetto a W con $s = 1$. Infatti la lagrangiana (2) (non gauge invariante) fissa come equazione del moto la (1.5), che implica la (1.4), e dà luogo quindi alla (1.5′), cioè all'equazione di Klein–Gordon con massa m. Ciò equivale a ridurre $\mathcal{V}$ rispetto a $P^\sigma P_\sigma$, ed ottenere $\mathcal{V}_m$. Successivamente, la stessa equazione (1.5) corrisponde anche a ridurre $\mathcal{V}_m$ rispetto a W (con $s = 1$: cfr. eq. (2.6)), ed ottenere così $\mathcal{V}_m^1$.

D'altra parte, la lagrangiana (1) dà luogo, come equazione del moto, all'equazione di Klein–Gordon con massa m; la gauge invarianza (ristretta) significa che i campi sono definiti a meno di gradienti di scalari (obbedienti all'equazione di Klein–Gordon): si ottiene così $\mathcal{V}_m/\mathcal{V}_m^0$. Il fatto che la gauge invarianza può essere usata per imporre la condizione di Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$ esprime quello che abbiamo già detto, e cioè che $\mathcal{V}_m^1$ è isomorfo a $\mathcal{V}_m/\mathcal{V}_m^0$.

B: $m = 0$

Passiamo ora al caso di massa nulla. Anche prima di entrare nei particolari ci immaginiamo di incontrare delle differenze dal caso di massa diversa da zero, in relazione alle particolarità che contraddistinguono le rappresentazioni del gruppo di Poincaré a massa nulla.

In primo luogo, possiamo ridurre $\mathcal{V}$ rispetto a $P_\varrho P^\varrho$ ed ottenere $\mathcal{V}_0$: i vettori di $\mathcal{V}_0$ sono cioè caratterizzati dall'obbedire l'equazione di D'Alembert (1.3.°). Ricordando che per $m = 0$ le rappresentazioni interessanti di $\mathcal{P}$ hanno anche $W = 0$, si ottiene la condizione $\partial_\mu A^\mu = 0$. Definiamo allora $\mathcal{V}_0^1$ come il sottospazio di $\mathcal{V}_0$ (invariante sotto $\mathcal{P}$) dei vettori che soddisfano la $\partial_\mu A^\mu = 0$. Consideriamo ora l'operatore $W^2 = W^\mu W_\mu$. Si può mostrare che esso è nullo su tutto $\mathcal{V}_0$: W non può dunque essere diagonalizzato su $\mathcal{V}_0$. Più precisamente, W ha un sottospazio invariante con autovalore 0, che risulta essere $\mathcal{V}_0^1$, mentre il complemento ortogonale di $\mathcal{V}_0^1$ in $\mathcal{V}_0$ non è invariante rispetto a W, ma viene proiettato da W su $\mathcal{V}_0^1$.[(4)] In altre parole, non esiste un $\mathcal{V}_x$ invariante tale che $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0^1 \oplus \mathcal{V}_x$, come accadeva per $m \neq 0$.

Per ottenere uno spazio invariante, possiamo tuttavia considerare il quoziente $\mathcal{V}_0/\mathcal{V}_0^1$. Esso è isomorfo a uno spazio di scalari, precisamente lo spazio delle divergenze $\partial_\mu A^\mu$. (Ci si può rendere conto di ciò ricordando che l'isomorfismo

---

[(4)] Un banale esempio della situazione che qui si presenta per W è dato dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

di $\mathcal{V}_0/\mathcal{V}_0^1$ con uno spazio X significa che esiste un omomorfismo η di $\mathcal{V}_0$ su X, con $\ker\eta = \mathcal{V}_0^1$.) $\mathcal{V}_0/\mathcal{V}_0^1$ si interpreta come corrispondente ai "fotoni scalari."

Notiamo però che $\mathcal{V}_0^1$ non è ancora irriducibile, come si può vedere dall'esistenza di un ulteriore invariante, peculiare delle rappresentazioni a massa zero, cioè l'elicità. Scriviamo allora l'equazicne agli autovalori per l'elicità su $\mathcal{V}_0^1$:

$$(W_\mu A)_\varrho = \lambda\,(P_\mu A)_\varrho,$$

cioè:

$$-\tilde{F}_{\mu\varrho} = i\lambda\,\partial_\mu A_\varrho. \tag{2.8}$$

Nella (2.8), il membro sinistro è antisimmetrico in (μ, ϱ), il membro destro non lo è; l'unica soluzione è $\lambda = 0$, e corrisponde a vettori di $\mathcal{V}_0^1$ il cui rotazionale è nullo; essi sono cioè gradienti di scalari, e danno luogo a un sottospazio invariante che chiameremo $\mathcal{V}_0^0$. Le trasformate di Fourier di elementi di $\mathcal{V}_0^0$ sono funzioni scalari moltiplicate per il loro impulso: donde il nome di "fotoni longitudinali" alle "particelle" associate a $\mathcal{V}_0^0$. Il fatto che la soluzione di (2.8) sia unica ($\lambda = 0$) significa che la riduzione di $\mathcal{V}_0^1$ che ha portato a $\mathcal{V}_0^0$ non è completa.

Consideriamo allora lo spazio lineare invariante $\mathcal{V}_0^1/\mathcal{V}_0^0$, e scriviamo l'equazione agli autovalori per l'elicità su $\mathcal{V}_0^1/\mathcal{V}_0^0$, cioè su elementi di $\mathcal{V}_0^1$ definiti a meno di gradienti:

$$(W_\mu A)_\varrho = \lambda\,(P_\mu A)_\varrho + \partial_\varrho B_\mu \tag{2.9}$$

con B_μ quadrivettore arbitrario, ossia:

$$-\tilde{F}_{\mu\varrho} = i\lambda\,\partial_\mu A_\varrho + \partial_\varrho B_\mu.$$

Scegliamo allora $B_\mu = \mp\, i\lambda A_\mu$. Le soluzioni di (2.9) sono così $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. In questo modo abbiamo ottenuto la riduzione totale di $\mathcal{V}_0$ rispetto al gruppo di Poincaré.

Le grandezze fisicamente significative sono dunque i vettori di $\mathcal{V}_0^1/\mathcal{V}_0^0$, cioè i vettori a divergenza nulla definiti a meno di gradienti a divergenza nulla (essendo $\mathcal{V}_0^0 \subset \mathcal{V}_0^1$), cioè gradienti di funzioni scalari che obbediscono l'equazione di D'Alembert.[(5)]

Riassumendo, i vettori cercati:

1) soddisfano l'equazione di D'Alembert;
2) soddisfano la condizione di Lorentz;
3) sono definiti a meno di $\partial_\mu\Lambda$, con $\Box\Lambda = 0$ (gauge invarianza ristretta).

Questo risultato è in accordo con i risultati dei due approcci lagrangiani ricordati all'inizio; precisamente, il procedimento astratto che abbiamo qui seguito

[(5)] È facile mostrare che (2.1) permette di definire su $\mathcal{V}_0^1/\mathcal{V}_0^0$ una metrica (definita positiva). (Si osservi che (2.1) è nulla su $\mathcal{V}_0^0$.)

per arrivare a $\mathcal{V}_0^1/\mathcal{V}_0^0$ corrisponde ad assumere la lagrangiana (1.°): infatti, la lagrangiana (1.°) dà in primo luogo $\mathcal{V}_0/\mathcal{V}_0^0$ (infatti, l'equazione del moto, $\Box A_\mu = 0$, dà $\mathcal{V}_0$; la gauge invarianza ristretta significa che i campi sono in realtà definiti a meno di $\mathcal{V}_0^0$). La condizione di Lorentz, assegnata come condizione aggiuntiva, restringe $\mathcal{V}_0$ a $\mathcal{V}_0^1$, senza alterare la gauge invarianza: si ottiene così $\mathcal{V}_0^1/\mathcal{V}_0^0$.

D'altra parte, la lagrangiana (2.°) dà luogo all'equazione del moto:

$$\Box A_\mu + \partial_\mu \partial^\sigma A_\sigma = 0 \tag{2.10}$$

che non determina la massa; (2.10) è infatti l'equazione agli autovalori per l'invariante W relativa all'autovalore 0:

$$(WA)_\mu = 0,$$

le sue soluzioni appartengono pertanto a

$$Y = \mathcal{V}_0^1 \oplus \Big(\bigoplus_{m>0} \mathcal{V}_m^0 \Big).$$

Inoltre, la gauge invarianza non ristretta significa che lo spazio dei vettori che soddisfano la (2.10) è definito a meno di gradienti: sia $\mathcal{V}^0$ tale spazio di gradienti, cioè:

$$\mathcal{V}^0 = \bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{V}_m^0.$$

Siamo così portati a considerare $Y/\mathcal{V}^0$, che è ovviamente isomorfo a $\mathcal{V}_0^1/\mathcal{V}_0^0$.

3. Commento

Abbiamo mostrato la relazione tra l'approccio astratto e quello lagrangiano; ci si può ancora chiedere perché esista la possibilità di diverse formulazioni lagrangiane, e per quali ragioni esse forniscano teorie diverse. Si può rispondere osservando che l'integrale d'azione si può sempre ricondurre (mediante opportune integrazioni per parti) alla forma:

$$\int dk\, A_\mu^*(k)\, \Omega\, A(k) - \lambda \int dk\, A_\mu^*(k)\, A(k) \tag{3.1}$$

dove Ω è un operatore e λ un parametro. L'invarianza relativistica della teoria richiede che Ω sia invariante rispetto al gruppo di Poincaré; cioè, almeno nei casi usuali, sarà una combinazione *lineare* degli invarianti di $\mathcal{P}$. Assumere la Lagrangiana (1) corrisponde a porre $\Omega = P^\mu P_\mu$, $\lambda = m^2$; assumere la lagrangiana (2) corrisponde a $\Omega = W$ e $\lambda = -2m^2$; analogamente si possono discutere gli altri casi, in cui la lagrangiana è una combinazione lineare di (1) e (2), e Ω la stessa combinazione lineare di $P^\sigma P_\sigma$ e di W.

Il principio variazionale sulla (3.1) porta alla ricerca degli autovettori di Ω, e il moltiplicatore di Lagrange λ risulta il corrispondente autovalore. Per questa via si ritrovano facilmente i risultati già visti.

Bibliografia

D. Kastler: *Introduction à l'électrodynamique quantique*, Paris, Dunod 1961.

T.D. Newton, E.P. Wigner, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 400 (1949).

Iu.M. Shirokov, *Sov. Phys. JETP* **6**, 664 (1958).

E. Fabri, *Principi di invarianza nella teoria assiomatica dei campi*, Pisa 1966.