E. Fabri *agosto 2017*

Svuotamento di una bottiglia capovolta

Il problema

È noto che se si capovolge una bottiglia stappata piena d'acqua l'acqua esce, più o meno disordinatamente. Questo a patto che la bocca sia abbastanza grande; se invece la bocca è stretta, o si tratta di una fialetta, peggio ancora di un contagocce, l'accqua non esce, anzi può essere difficile svuotare il recipiente.

Voglio indagare sulla dimensione critica che separa i due casi. Supporrò che la bottiglia sia completamente piena, anche se il fenomeno si presenta pure con bottiglie piene solo in parte. (Ma la bottiglia piena è più semplice da analizzare.)

Supporrò anche di essere in condizioni statiche ideali, ossia che a un certo istante l'acqua nella bottiglia sia del tutto ferma. Si comprende che l'inizio dello svuolamento in tal caso deve dipendere dall'instabilità dell'equilibrio iniziale, ed è questo che studieremo.

Schematizzazione

La bottiglia (cilindrica, anche nel collo e nella bocca) sia verticale, e sia h la distanza tra bocca e fondo. L'equilibrio statico iniziale è semplice: l'acqua non cade perché il suo peso è equilibrato dalla pressione atmosferica e dalle forze dovute alle pareti. Supposto che il liquido alla bocca abbia una superficie piana orizzontale, la pressione lì è quella atmosferica P_0; la pressione sul fondo sarà

$$P_1 = P_0 - \varrho\, g\, h$$

che rimane positiva se $h < 10\,\mathrm{m}$.

Per studiare la stabilità consideriamo un piccolo scostamento statico dall'equilibrio: la superficie libera alla bocca B non sarà più un piano orizzontale. Assunte coordinate cilindriche (r, φ, z) con z orientata verso l'alto e origine al centro di B, lo scostamento è individuato da una funzione $z(r, \varphi)$.

Per la funzione $z(r, \varphi)$ assumerò le seguenti condizioni:

– si annulla al bordo di B: $z(a, \varphi) = 0$ (a raggio della bocca)

– è almeno C^2 in tutto B.

In particolare, ciò implica le seguenti condizioni agli estremi dell'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$z(r,0) = z(r,2\pi) \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0^+} = \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=2\pi^-}. \tag{1}$$

A queste dobbiamo aggiungere una condizione fisica, derivante dal fatto che il liquido non cambia volume:

$$\int_B z\, d\sigma = 0. \tag{2}$$

L'equilibrio sarà stabile sse per qualunque scelta di $z(r, \varphi)$ l'energia potenziale aumenta rispetto a $z = 0$.

Espressione dell'energia

L'energia potenziale è la somma di due contributi:

a) l'energia gravitazionale

b) l'energia della tensione superficiale.

Se prendiamo come quota di riferimento $z = 0$, l'energia gravitazionale di un cilindretto di base $d\sigma = r\, dr\, d\varphi$ e altezza $z > 0$ è la massa $\varrho\, z\, d\sigma$ moltiplicata per la quota del cdm e per g: $\frac{1}{2}\, \varrho\, g\, z^2 d\sigma$. Se invece $z < 0$, l'energia è $-\frac{1}{2}\, \varrho\, g\, z^2 d\sigma$, perché l'altezza è $|z| = -z$ e la quota del cdm sempre $\frac{1}{2}\, z$.

Per calcolare l'energia gravitazionale totale conviene distinguere le due parti B_+, B_- della bocca B:

$$B_+ = \{(r, \varphi) \mid z(r, \varphi) > 0\} \qquad B_- = \{(r, \varphi) \mid z(r, \varphi) < 0\}.$$

In B_+ *manca* il liquido tra 0 e z, e manca quindi la corrispondente energia gravitazionale:

$$E_+ = -\tfrac{1}{2} \int_{B_+} \varrho\, g\, z^2\, d\sigma.$$

In B_- invece c'è dell'acqua *in più*, che ha energia negativa:

$$E_- = -\tfrac{1}{2} \int_{B_-} \varrho\, g\, z^2\, d\sigma.$$

Si vede dunque che l'energia totale è semplicemente

$$E_{\rm gr} = E_+ + E_- = -\tfrac{1}{2}\, \varrho\, g \int_B z^2\, d\sigma. \tag{3}$$

Passiamo all'energia della tensione superficiale. Questa sarà $\tau\,(S - S_0)$, essendo S l'area della superficie libera deformata, $S_0 = \pi a^2$ quella di equilibrio. L'espressione di S è

$$S = \int_B \sqrt{1 + \bigl|\vec\nabla z\bigr|^2}\, d\sigma \simeq \int_B \Bigl(1 + \tfrac{1}{2}\, \bigl|\vec\nabla z\bigr|^2\Bigr)\, d\sigma = \pi a^2 + \tfrac{1}{2} \int_B \bigl|\vec\nabla z\bigr|^2\, d\sigma$$

(l'approssimazione si giustifica assumendo che sia $\bigl|\vec\nabla z\bigr| \ll 1$).

Arriviamo quindi a

$$E_{\text{ts}} = \tfrac{1}{2}\,\tau \int\limits_B \bigl|\vec{\nabla} z\bigr|^2 \, d\sigma$$

che può essere trasformata integrando per parti:

$$E_{\text{ts}} = -\tfrac{1}{2}\,\tau \int\limits_B z\,\nabla^2 z\,d\sigma. \tag{4}$$

Ne segue per l'energia totale:

$$E = -\tfrac{1}{2} \int\limits_B z\,\bigl(\varrho\,g\,z + \tau\,\nabla^2 z\bigr)\;d\sigma.$$

Sviluppo di $z(r, \varphi)$

Dalla (4) si vede che conviene esprimere $z(r, \varphi)$ come serie di autofunzioni di ∇^2, che formano un sistema completo (*Morse & Feshbach* (11.2.24)):

$$z(r, \varphi) = \sum_{mn} \zeta_{mn}(r, \varphi) \tag{5}$$

dove

$$\zeta_{mn}(r, \varphi) = (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi)\; J_m(j_{mn}\,r/a)$$

(j_{mn} è l'n-mo zero non nullo di J_m). Si verifica facilmente, usando l'equazione differenziale per le funzioni di Bessel e l'espressione del laplaciano in coordinate polari, che

$$\nabla^2 \zeta_{mn} = -k_{mn}^2\,\zeta_{mn} \tag{6}$$

avendo posto $k_{mn} = j_{mn}/a$. Inoltre le ζ_{mn} sono ortogonali:

$$\int\limits_0^a r\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\;\zeta_{mn}(r, \varphi)\,\zeta_{m'n'}(r, \varphi) =$$

$$\tfrac{1}{2}\,\pi\,a^2 \bigl(A_{mn}^2 + B_{mn}^2\bigr)\;J_{m-1}^2(j_{mn})\;\delta_{mm'}\,\delta_{nn'}.$$

Si vede pure che tutte le ζ_{mn} soddisfano le condizioni (1). La (2) va esaminata con più attenzione. ζ_{mn} con $m > 0$ ha nullo l'integrale su φ; pertanto la (2) si riduce a

$$\int\limits_0^a r\,dr\;J_0(j_{0n} r/a) = 0$$

ossia

$$\int_0^{j_{0n}} u\,du\,J_0(u) = 0.$$

L'integrale vale $j_{0n}\,J_1(j_{0n})$ (*Abramowitz* 9.1.30, prima riga). D'altra parte $J_1(u) = -J_0'(u)$ (*Abramowitz* 9.1.31, seconda riga); quindi gli zeri di J_1 coincidono coi massimi e minimi di J_0, non coi suoi zeri. Ne segue che l'integrale non si annulla mai. Perciò la somma su m nella (5) deve partire da 1.

Conviene considerare separatamente i due termini $E_{\rm gr}$ ed $E_{\rm ts}$ di E. Sostituendo la (5) in (3) abbiamo

$$\begin{aligned} E_{\rm gr} &= -\tfrac{1}{2}\,\varrho\,g \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\,\sum_{mn} \zeta_{mn}^2(r,\varphi) \\ &= -\tfrac{1}{4}\,\pi\,a^2\varrho\,g \sum_{mn} \bigl(A_{mn}^2 + B_{mn}^2\bigr)\,J_{m-1}^2(j_{mn}). \end{aligned} \tag{7}$$

Passiamo a $E_{\rm ts}$. Usando (5) e (6):

$$\begin{aligned} E_{\rm ts} &= \tfrac{1}{2}\,\tau \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\,\sum_{mn} \zeta_{mn} \sum_{m'n'} k_{m'n'}^2\,\zeta_{m'n'} \\ &= \tfrac{1}{4}\,\pi\,\tau \sum_{mn} j_{mn}^2\,\bigl(A_{mn}^2 + B_{mn}^2\bigr)\,J_{m-1}^2(j_{mn}). \end{aligned} \tag{8}$$

Mettendo insieme (7) e (8):

$$E = \tfrac{1}{4}\,\pi \sum_{mn} \bigl(\tau j_{mn}^2 - a^2\varrho\,g\bigr)\,\bigl(A_{mn}^2 + B_{mn}^2\bigr)\,J_{m-1}^2(j_{mn}).$$

Per la stabilità occorre (e basta) che tutti i coefficienti $\tau\,j_{mn}^2 - a^2\varrho\,g$ siano positivi, il che si ottiene per a sufficientemente piccolo. Infatti per dato m la successione $\{j_{mn}\}$ è crescente, quindi basta considerare i primi termini $\{j_{m1}\}$. Ma anche questa successione è crescente, e perciò la condizione nec. e suff. per la stabilità è

$$\tau\,j_{11}^2 > a^2\varrho\,g$$

$$a < j_{11}\sqrt{\frac{\tau}{\varrho\,g}}. \tag{9}$$

Numeri

Finalmente diamo i numeri...

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= 1.2197 \\
\tau &= 7.28 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N/m} \quad \text{(acqua a 20°C)} \\
\varrho &= 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \quad \text{(c.s.)} \\
g &= 9.8\,\mathrm{N/kg}.
\end{aligned}$$

Risulta $a < 10.4\,\mathrm{mm}$.

Se si prova col mercurio, si potrebbe credere che a debba aumentare, visto che la tensione superficiale è parecchio maggiore. Ma è maggiore anche la densità...

$$\begin{aligned}
\tau &= 0.425\,\mathrm{N/m} \quad \text{(Hg a 20°C)} \\
\varrho &= 1.36 \cdot 10^4\,\mathrm{kg/m^3} \quad \text{(c.s.)}
\end{aligned}$$

e si trova $a < 6.8\,\mathrm{mm}$.

Tutto salvo errori...

Controprova

Se studiamo una scelta particolare per $z(r.\varphi)$, otterremo una maggiorazione al valore critico di a. Proviamo questa:

$$z(r, \varphi) = C\, x\, (a^2 - r^2). \tag{10}$$

(ovviamente $x = r\,\cos\varphi$). La (10) soddisfa tutte le condizioni richieste. La costante C, inserita solo per far tornare le dimensioni di z, non è essenziale: si elimina dalla condizione finale.

Calcoliamo E_{gr}. Dalla (3)

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{gr}} &= -\tfrac{1}{2}\, C^2 \varrho\, g \int_B x^2 (a^2 - r^2)^2\, d\sigma \\
&= -\tfrac{1}{2}\, C^2 \varrho\, g \int_B (a^4 r^2 - 2\, a^2 r^4 + r^6) \cos^2\!\varphi\; d\sigma = -\tfrac{1}{48}\, \pi\, C^2 \varrho\, g\, a^8.
\end{aligned}$$

Quanto a E_{ts}, Calcoliamo il laplaciano di (10):

$$\nabla^2 z = -8\, C\, x.$$

Quindi, dalla (4)

$$E_{\mathrm{ts}} = 4\, C^2 \tau \int_B x^2 (a^2 - r^2)\, d\sigma = 4\pi\, C^2 \tau \int_0^a r^3 (a^2 - r^2)\, dr = \tfrac{1}{3}\, \pi\, \tau\, a^6.$$

La condizione $E > 0$ porta a

$$a < 4\sqrt{\frac{\tau}{\varrho\, g}}$$

che è molto vicina alla (9), visto che $\pi\beta_{11} = 3.832$.