E. Fabri *novembre 2020*

Circonferenza bitangente a una cubica

Il problema

Trovare una circonferenza tangente all'asse x e bitangente alla curva

$$y = x^3 - 3\,x^2. \tag{1}$$

Abbiamo due curve: la cubica $\mathcal{C}$ di equazione (1) e la circonferenza $\mathcal{K}$ di equazione generica

$$(x - x_\mathrm{c})^2 + y^2 - 2\,y_\mathrm{c} y = 0. \tag{2}$$

Occorre determinare i parametri x_c, y_c in modo che le due curve siano tra loro bitangenti.

Primi passi

Il sommario del procedimento che seguirò è il seguente. Studio il luogo dei centri delle circonf. tangenti alla cubica. Il centro di una circonf. bitangente dev'essere un punto doppio di tale luogo.

Le intersezioni si ottengono facendo sistema tra le due equazioni. Eliminando y si ottiene un'equazione di 6° grado per x:

$$x^6 - 6\,x^5 + 9\,x^4 - 2\,y_\mathrm{c}\,x^3 + (6\,y_\mathrm{c} + 1)\,x^2 - 2\,x_\mathrm{c}\,x + x_\mathrm{c}^2 = 0. \tag{3}$$

Le 6 radici di (3) (eventualmente complesse) determinano 6 punti d'intersezione.

Se le due curve sono tangenti, 2 di queste intersezioni coincidono. Allora non solo sono comuni le coordinate (x, y), ma anche dy/dx. Per la (1) si ha

$$y' = 3\,x^2 - 6\,x \tag{4}$$

mentre derivando la (2) rispetto a x si trova

$$2\,(x - x_\mathrm{c}) + 2\,(y - y_\mathrm{c})\,y' = 0$$

da cui

$$y' = -\frac{x - x_\mathrm{c}}{y - y_\mathrm{c}}.$$

Eliminando y' tra questa e la (4) si ottiene

$$y = y_\mathrm{c} - \frac{x - x_\mathrm{c}}{3\,x\,(x - 2)}. \tag{5}$$

Confrontando (1) e (5) si ha

$$x^3 - 3\,x^2 = y_\mathrm{c} - \frac{x - x_\mathrm{c}}{3\,x\,(x-2)}$$

$$3\,x\,(x-2)\,(x-3) - 3\,y_\mathrm{c}\,x^2 + (6\,y_\mathrm{c}+1)\,x - x_\mathrm{c} = 0. \tag{6}$$

Il luogo dei centri

Cerchiamo il luogo dei centri $(x_\mathrm{c}, y_\mathrm{c})$. Dalle (3), (6) si possono ottenere le equazioni parametriche del luogo, con x come parametro. Le riscrivo:

$$(x_\mathrm{c} - x)^2 - 2\,x^2(x-3)\,y_\mathrm{c} + x^4(x-3)^2 = 0$$

$$(x_\mathrm{c} - x) + 3\,x\,(x-2)\,y_\mathrm{c} - 3\,x^3(x-2)\,(x-3) = 0 \tag{7}$$

ed elimino y_c:

$$3\,(x-2)\,\bigl(x_\mathrm{c}^2 - x\bigr)^2 + 2\,x\,(x-3)(x_\mathrm{c} - x) - 3\,x^4(x-2)\,(x-3)^2 = 0$$

$$x_\mathrm{c} = x - \frac{x\,(x-3)}{3\,(x-2)}\left(1 \pm \sqrt{1 + 9\,x^2(x-2)^2}\right). \tag{8}$$

Ricavo y_c sostituendo nella (7):

$$3\,x\,(x-2)\,y_\mathrm{c} = 3\,x^3(x-2)\,(x-3) - (x_\mathrm{c} - x)$$

$$y_\mathrm{c} = (x-3)\left[x^2 + \frac{1}{9\,(x-2)^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 9\,x^2(x-2)^2}\right)\right]. \tag{9}$$

Le (8), (9) sono le equazioni parametriche del luogo dei centri. Così scritte hanno per il difetto di una forma indefinita per $x = 2$ nel caso del segno $-$. Conviene perciò distinguere: indicherò con x_cp, y_cp le soluzioni col $+$, con x_cm, y_cm le altre. Per le prime restano valide le (8), (9); invece per x_cm, y_cm userò le espressioni modificate:

$$x_\mathrm{cm} = x + \frac{3\,x^3(x-2)\,(x-3)}{1 + \sqrt{1 + 9\,x^2(x-2)^2}}. \tag{10}$$

$$y_\mathrm{cm} = \frac{x^2(x-3)\,\sqrt{1 + 9\,x^2(x-2)^2}}{1 + \sqrt{1 + 9\,x^2(x-2)^2}}. \tag{11}$$

Il centro cercato è un punto doppio della curva, ossia un punto per il quale la curva ripassa due volte, con due diversi valori di x.

Ricerca del punto doppio

Eliminando x tra (3) e (6) si ottiene l'equazione cartesiana del luogo: un'equazione algebrica $f(x_c, y_c)$ di grado 8, che non è il caso di scrivere. I punti doppi di questa si trovano facendo sistema tra f, f_{x_c}, f_{y_c}. Ho affidato la ricerca delle soluzioni a `maxima`, che mi ha dato 7 soluzioni reali (ce ne sono altre complesse):

$$\begin{array}{llll}
x_c = & -0.070815074496056 & y_c = & -2.611110735006398 \\
x_c = & 0 & y_c = & -0.165993537964459 \\
x_c = & 1.054794989390102 & y_c = & -1.703218346502216 \\
x_c = & 1.347125867195243 & y_c = & -2.058191018342821 \\
x_c = & 1.801552644347404 & y_c = & -1.060217176702863 \\
x_c = & 3 & y_c = & 0 \\
x_c = & 3.777507302823758 & y_c = & -2.453472537448933
\end{array}$$

Commenti

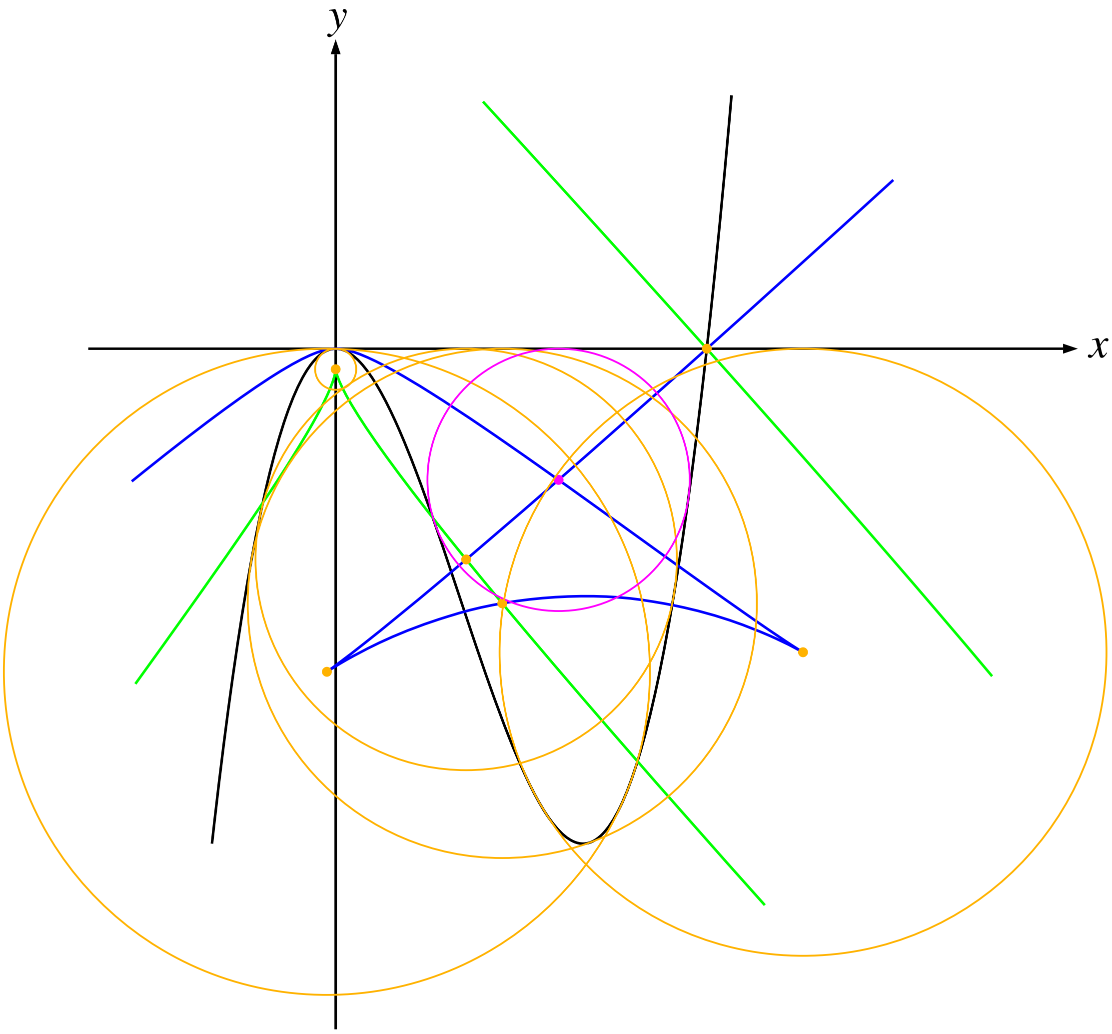
La soluzione che ho dato è algebrica (non numerica) fino alla determinazione di $f(x_c, y_c)$ e delle derivate. In realtà l'ho ottenuta con `maxima`, anche se sarebbe stato possibile trovarla con calcoli a mano. Solo che non so quanto ci avrei messo e quanti errori avrei fatti...

Come ho già scritto, la soluzione del sistema è numerica e non sarebbe stato possibile fare altrimenti. Non sono sicuro, ma sembra che il grado del sistema sia $8 \times 7 \times 7 = 196$. Difficile vedere se qualcuna delle equazioni si spezza, semplificando il calcolo.

Nella figura la cubica è nera, le circonferenze sono arancio, tranne quella viola che corrisponde alla figura del problema. Il luogo dei centri è molto intricato e non l'ho studiato a fondo. Direi che consiste di due rami, tracciati in blu e in verde.

Il ramo blu ha un normale punto doppio (corrispondente alla soluzione viola) e due cuspidi; sembra anche avere un asintoto parallelo alla bisettrice del primo quadrante. Le circonf. con centro nelle cuspidi sembrerebbero avere con la cubica un contatto di ordine superiore a 2, ma non ho chiarito il punto.

Il ramo verde ha una cuspide con $x_c = 0$ ed è piuttoto chiaro che la circonf. corrispondente ha un contatto di ordine 4 con la cubica. Il comportamento all'infinito di questo ramo non mi è affatto chiaro: un asintoto? due? Oppure i rami nel secondo quadrante si uniscono molto lontano?



y
x