

Il problema dell'ago carico

Il problema

Si tratta di capire qual è la distribuzione di carica all'equilibrio per un ago carico (se esiste).

Considero l'ago come caso limite di un ellissoide rotondo allungato, per il quale si conosce la soluzione esatta [1].

Soluzione per l'ellissoide

Siano a, b, c, e i soliti simboli in uso per l'ellisse. Assumo coordinate cartesiane (x, y, z) , con z lungo l'asse maggiore; x e y di conseguenza.

Pongo

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{u^2 + (z + c)^2} \\ r_2 &= \sqrt{u^2 + (z - c)^2} \\ \xi &= \frac{r_1 + r_2}{2c} \\ \eta &= \frac{r_1 - r_2}{2c}. \end{aligned} \tag{1}$$

dove $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si vede che ξ va da 1 (sul segmento tra i fuochi) a ∞ ; η da -1 a 1 . Le superfici $\xi = \text{cost.}$ sono equipotenziali; quindi si può assumere che il conduttore abbia $\xi = \xi_0 > 1$ e potenziale V_0 . Inoltre

- Il semiasse maggiore vale $c \xi_0$.
- Il semiasse minore vale $c \sqrt{\xi_0^2 - 1}$.
- L'eccentricità è $1/\xi_0$.

In queste coordinate il potenziale si scrive ([1] in fondo a pag. 1285):

$$V(x, y, z) = V_0 \frac{\log(\xi + 1) - \log(\xi - 1)}{\log(\xi_0 + 1) - \log(\xi_0 - 1)} = W [\log(\xi + 1) - \log(\xi - 1)]$$

con ovvia abbreviazione.

Inversione

Conviene invertire le (1):

$$\begin{aligned} u &= c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \\ z &= c \xi \eta \end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned}x &= u \cos \varphi \\y &= u \sin \varphi \\z &= c \xi \eta.\end{aligned}\tag{2}$$

Mi serviranno le relazioni

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{c^2}{u} \xi (1 - \eta^2) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{c^2}{u} \eta (\xi^2 - 1).\tag{3}$$

La metrica

Voglio calcolare

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Abbiamo dalle (2)

$$\begin{aligned}dx^2 + dy^2 &= du^2 + u^2 d\varphi^2 \\dz &= c (\eta d\xi + \xi d\eta) \\dz^2 &= c^2 (\eta^2 d\xi^2 + \xi^2 d\eta^2 + 2 \xi \eta d\xi d\eta)\end{aligned}$$

e dalle (3)

$$\begin{aligned}du &= \frac{c^2}{u} [\xi (1 - \eta^2) d\xi - \eta (\xi^2 - 1) d\eta] \\du^2 &= \frac{c^4}{u^2} [\xi^2 (1 - \eta^2)^2 d\xi^2 + \eta^2 (\xi^2 - 1)^2 d\eta^2 - \frac{2}{c^2} \xi \eta u^2 d\xi d\eta] \\&= c^2 \left[\frac{\xi^2 (1 - \eta^2)}{\xi^2 - 1} d\xi^2 + \frac{\eta^2 (\xi^2 - 1)}{1 - \eta^2} d\eta^2 - 2 \xi \eta d\xi d\eta \right] \\ds^2 &= c^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} d\xi^2 + c^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} d\eta^2 + c^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) d\varphi^2.\end{aligned}$$

Ne segue per l'elemento di volume

$$dV = c^3 (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta d\varphi\tag{4}$$

e per l'elemento di superficie (ellissoide $\xi = \xi_0$)

$$dS = c^2 \sqrt{(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \eta^2)} d\eta d\varphi.\tag{5}$$

Esempio 1

Applichiamo la (4) al calcolo del volume del solido delimitato dalla superficie $\xi = \xi_0$. Avremo

$$\begin{aligned}V &= 2\pi c^3 \int_1^{\xi_0} d\xi \int_{-1}^1 d\eta (\xi^2 - \eta^2) = 2\pi c^3 \left[\frac{2}{3} (\xi_0^3 - 1) - \frac{2}{3} (\xi_0^3 - 1) \right] \\&= \frac{4}{3} \pi c^3 \xi_0 (\xi_0^2 - 1) = \frac{4}{3} \pi a b^2.\end{aligned}$$

Esempio 2

Calcoliamo con la (5) la superficie dell'ellissoide:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi c^2 \sqrt{\xi_0^2 - 1} \int_{-1}^1 d\eta \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} = 4\pi c^2 \xi_0^2 \sqrt{\xi_0^2 - 1} \int_0^\alpha \cos^2 t dt \\ &= 2\pi b \left(\frac{a}{e} \arcsin e + b \right) \end{aligned}$$

(ho posto $e = \sin \alpha$).

La densità di carica superficiale

Si ricava da

$$\sigma = \varepsilon_0 |\text{grad } V|$$

per $\xi = \xi_0$. Abbiamo

$$\text{grad } V = \frac{dV}{d\xi} \text{grad } \xi$$

$$\frac{dV}{d\xi} = -\frac{2W}{\xi^2 - 1}$$

$$\text{grad } \xi = \frac{1}{2c} (\text{grad } r_1 + \text{grad } r_2) = \frac{1}{2c} \left(\frac{\mathbf{r} + c\mathbf{k}}{r_1} + \frac{\mathbf{r} - c\mathbf{k}}{r_2} \right)$$

dove \mathbf{k} è il versore dell'asse z .

Quindi

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\varepsilon_0 W}{c(\xi_0^2 - 1)} \left| \frac{\mathbf{r} + c\mathbf{k}}{r_1} + \frac{\mathbf{r} - c\mathbf{k}}{r_2} \right| \\ &= \frac{\varepsilon_0 W}{c(\xi_0^2 - 1)r_1 r_2} |(r_1 + r_2)\mathbf{r} + c(r_2 - r_1)\mathbf{k}| \\ &= \frac{\varepsilon_0 W}{c(\xi_0^2 - 1)r_1 r_2} \sqrt{2(r^2 + c^2)^2 + 2r_1 r_2 (r^2 - c^2) - 8c^2 z^2}. \end{aligned}$$

Osservando che dalle (1) $r_1 r_2 = c^2(\xi^2 - \eta^2)$ abbiamo

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 W}{c^3(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \eta^2)} \sqrt{2(r^2 + c^2)^2 + 2c^2(\xi_0^2 - \eta^2)(r^2 - c^2) - 8c^4 \xi_0^2 \eta^2}.$$

Poi, sempre dalle (1) $r^2 + c^2 = c^2(\xi^2 + \eta^2)$ e sostituendo

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 W}{c\sqrt{(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \eta^2)}}. \quad (6)$$

La carica totale è (v. (5))

$$Q = 4\pi c^2 \sqrt{\xi_0^2 - 1} \int_0^1 \sigma(\eta) \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} d\eta = 8\pi \varepsilon_0 c W \quad (7)$$

$$= \frac{8\pi \varepsilon_0 c V_0}{\log(\xi_0 + 1) - \log(\xi_0 - 1)}. \quad (8)$$

Si verifica che per $\xi_0 \rightarrow \infty$ si ha asintoticamente

$$Q = 4\pi \varepsilon_0 a V_0$$

che è la corretta relazione per un conduttore sferico.

Dalla (8) si ha la capacità

$$C = \frac{8\pi \varepsilon_0 c}{\log(\xi_0 + 1) - \log(\xi_0 - 1)}.$$

Si vede che $C \rightarrow 0$ per $\xi_0 \rightarrow 1$, il che è ragionevole: un pezzo finito di filo, di diametro trascurabile, ha capacità nulla. Dobbiamo quindi aspettarci $Q \rightarrow 0$ se si fa il limite a potenziale costante, mentre $V_0 \rightarrow \infty$ se si fa il limite a Q costante. La (8) mostra proprio questo.

Distribuzione limite

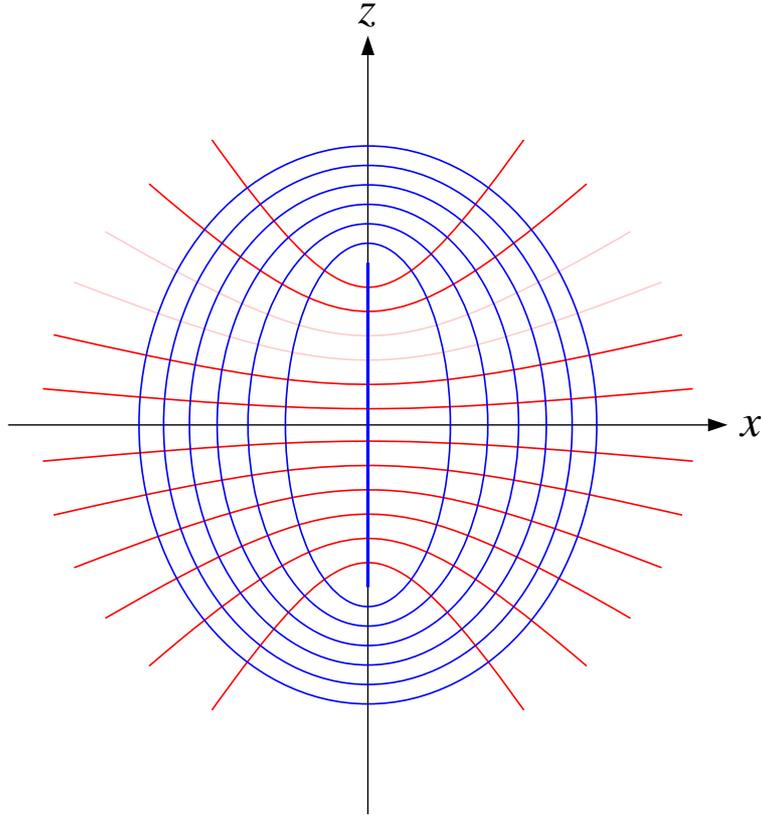
La figura a pag. seguente rappresenta la sezione nel piano (x, z) delle superfici equipotenziali (ellissoidi) e delle linee del campo (iperboli); le prime in blu e le seconde in rosso o arancio. Il segmento marcato dell'asse z è l'equipotenziale limite $\xi_0 = 1$. Tutte le ellissi e iperboli sono *confocali*: i fuochi sono agli estremi del segmento.

La figura rimane la stessa se si cambia la superficie conduttrice ($\xi = \xi_0$) e anche se si cambia il potenziale V_0 su questa. Se si tiene fissa la carica Q , usando la (8), il potenziale in ogni punto e anche il campo non cambiano, perché il flusso di \mathbf{E} è lo stesso su ogni ellissoide. La densità di carica sul conduttore ha l'espressione

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi c^2 \sqrt{(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \eta^2)}}$$

che discende dalle (6), (7). Usando la (5)

$$\sigma dS = \frac{Q}{4\pi} d\eta d\varphi. \quad (9)$$



Consideriamo ora la striscia di conduttore compresa fra η e $\eta + d\eta$. Al variare di ξ_0 (quindi del conduttore) questa striscia resta sempre compresa fra due iperboloidi ($\eta = \text{cost.}$ su un iperboloide). La carica dQ sulla striscia si ottiene integrando la (9) su φ , ossia moltiplicando per 2π :

$$dQ = \frac{1}{2} Q d\eta$$

espressione che resta valida anche al limite $\xi_0 \rightarrow 1$, ossia se il conduttore si riduce al segmento lungo $2c$ dell'asse z . Ma l'ultima delle (2) per $\xi = 1$ ci dice $dz = c d\eta$, quindi al limite

$$dQ = \frac{Q}{2c} dz$$

e la densità lineare risulta costante:

$$\lambda = \frac{Q}{2c}.$$

Risultato inatteso: non c'è alcuna concentrazione di carica agli estremi!

Bibliografia

- [1] Morse & Feshbach: *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill 1953), 1284-1285.