L'elettrostatica è difficile

Premessa

È tradizionale iniziare l'insegnamento dell'elettromagnetismo dall'elettrostatica.

Ciò corrisponde allo sviluppo storico, e forse anche a quello concettuale.

C'è però l'inconveniente che *l'elettrostatica è difficile*, forse più di altre parti dell'e.m.

Mi riprometto di sviluppare questa tesi.

Possiamo considerare tre aspetti dell'elettrostatica:

1) la struttura teorica

2) la fenomenologia e gli ordini di grandezza

3) il rapporto con la struttura della materia.

La struttura teorica

I principi base dell'elettrostatica sono pochi, e relativamente semplici:

a) l'esistenza di cariche dei due segni

b) la conservazione della carica

c) la legge di Coulomb

d) il principio di sovrapposizione

e) la mobilità della cariche in un conduttore.

Da qui si ottiene tutto (almeno finché non si studiano i dielettrici).

Su *a*) non c'è molto da dire; anche da un punto di vista sperimentale bastano prove qualitative.

Infatti la presenza di cariche di due segni è stata riconosciuta molto presto, anche se in origine veniva interpretata come *eccesso* o *difetto* di un qualche “fluido elettrico”.

Quanto a *b*), c'è da dire che la prova sperimentale è tutt'altro che facile.

Si presenta qui una situazione frequente in fisica: la validità di un principio teorico, anche semplice, si può fondare soltanto *a posteriori*, sulla base della verifica di conseguenze a volte piuttosto indirette.

Qualcosa di molto simile vale anche per *c*); anzi si può dire che le prove di *b*) e di *c*) vanno strettamente associate.

Il principio di sovrapposizione (PS) è già qualcosa di assai diverso: ha un carattere astratto e lontano dall'esperienza, perché per es. *non è facile applicarlo ai conduttori*.

Una sua conseguenza assai importante è che se si modificano tutte le cariche per uno stesso fattore k, anche il campo in ogni punto dello spazio si moltiplica per lo stesso fattore.

La *e*) ha carattere ancora diverso: è la caratterizzazione *fenomenologica* dei conduttori.

Si noti che a un primo livello (storicamente così è stato fino alla fine dell'800) non occorre sapere *quali* cariche si possono muovere.

Il concetto di campo

La vera difficoltà nasce però dal concetto di *campo*, che non a caso ci porta ben dentro la *fisica matematica* dell'800.

In partenza il concetto di campo appare semplice: la famigerata “forza per unità di carica”.

Però già qui c'è la ben nota cautela da porre: la carica di prova *deve essere piccola*, sì da non perturbare le altre cariche presenti.

(Questo apre una difficoltà a livello microscopico, dove le cariche non si possono prendere piccole a piacere: come si definirebbe operativamente il campo elettrico all'interno di un atomo? Ma ora non voglio soffermarmi su questa difficoltà, che pure qualche studente potrebbe sentire...)

A questo livello siamo a quello che Einstein e Infeld chiamano “il campo come rappresentazione”: il campo appare come un comodo *espediente* per rappresentare (anche graficamente) la situazione delle forze che una carica (o un sistema di cariche) produce su eventuali altre cariche presenti nello spazio circostante.

Tuttavia dal punto di vista matematico abbiamo introdotta un'entità nuova: il *campo vettoriale*.

Linee di forza (o di campo)

La rappresentazione grafica sarebbe però impossibile senza un'altra idea: quella delle *linee di forza*, o *linee di campo*. Più o meno ciò che i matematici chiamano “curve integrali” del campo vettoriale.

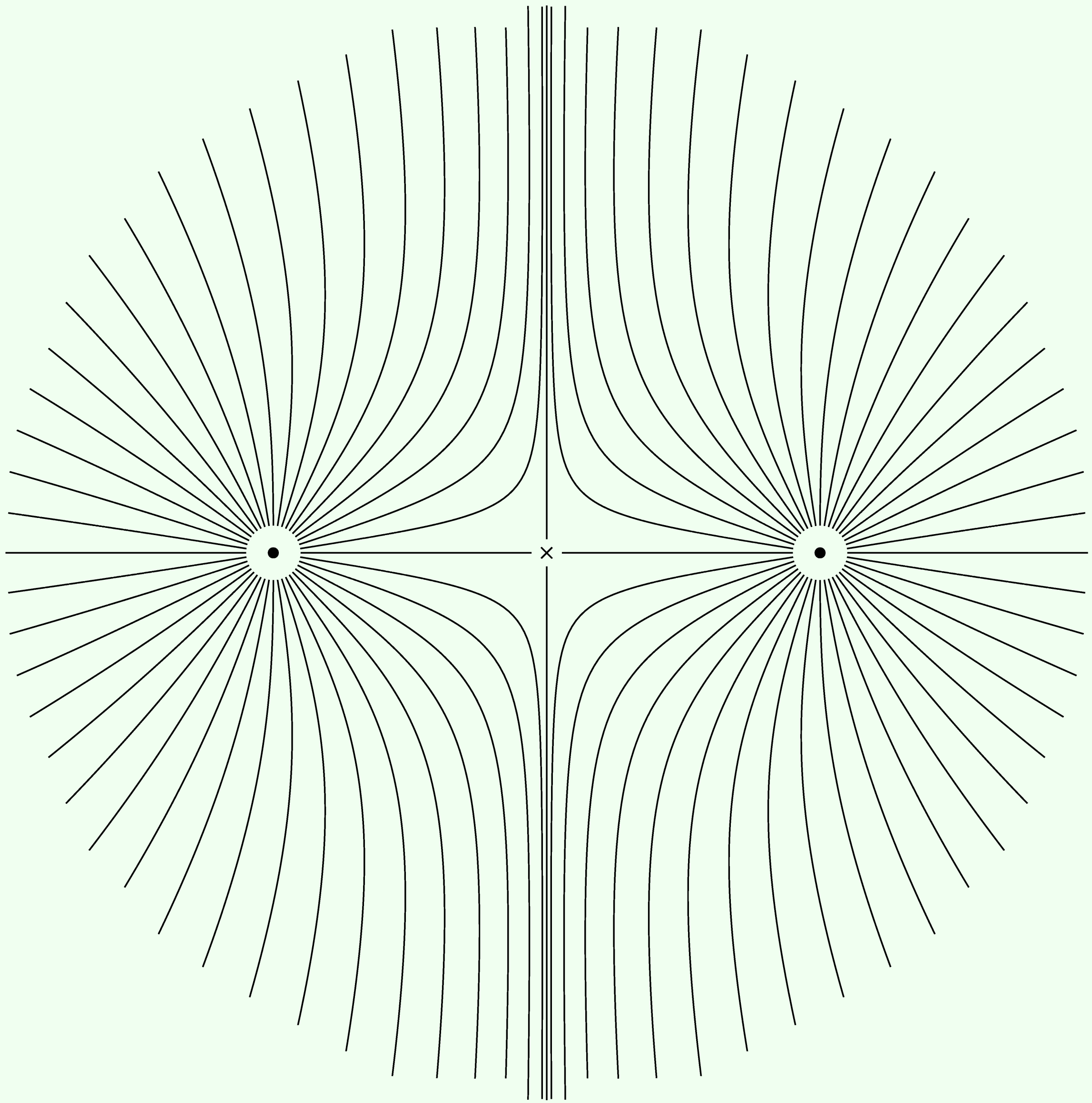
Tutto facile finché le linee sono rette (campo uniforme, campo di una carica sferica).

Meno facile in altri casi: già due cariche, di segni uguali od opposti, danno luogo a linee *curve* e bisogna imparare a “leggerle”: il campo è in ogni punto *tangente* alle linee.

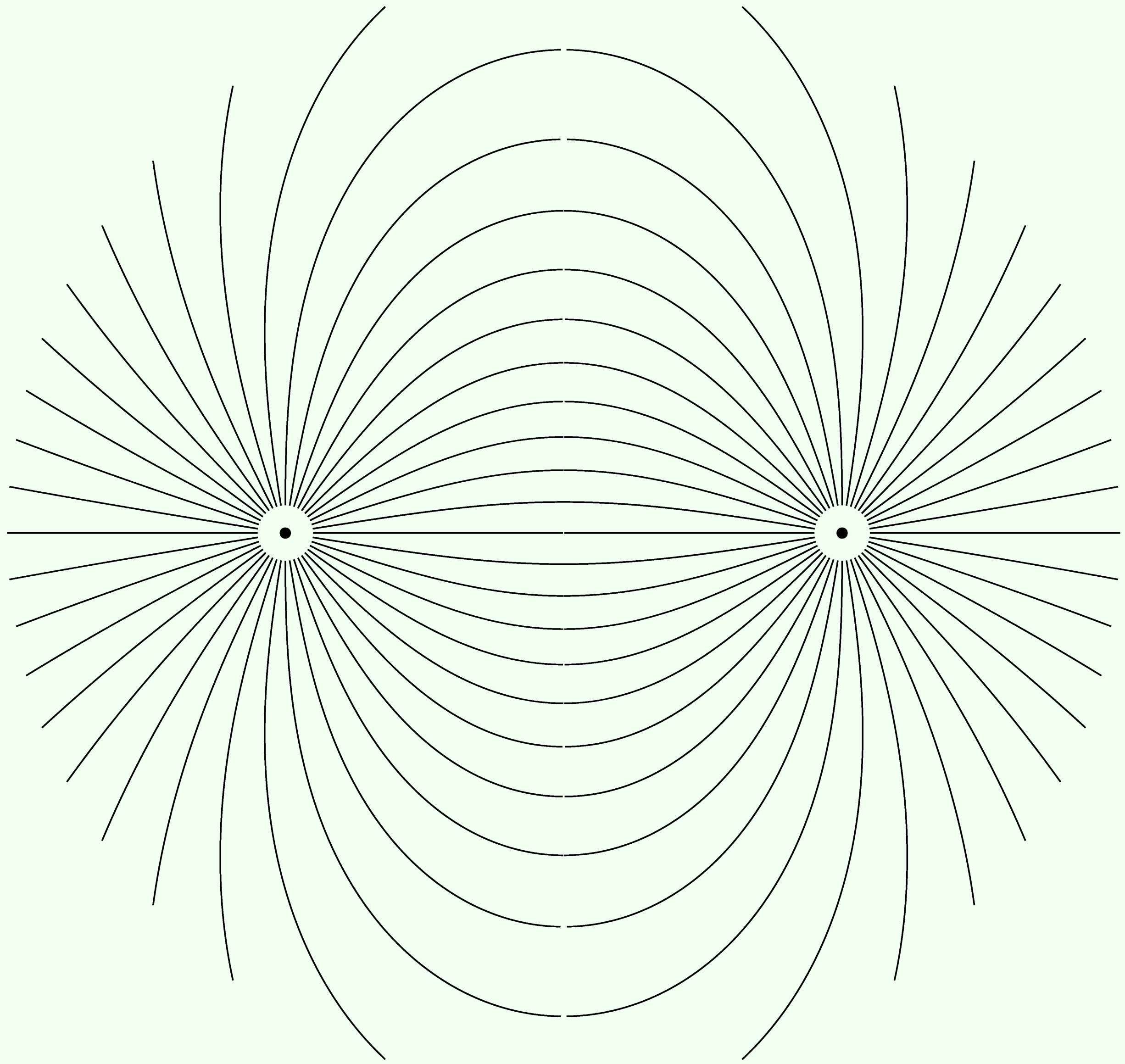
È questo il vantaggio delle linee: invece di disegnare *infinite freccette*, basta una curva o un insieme di curve.

(Sorvoliamo sulla relazione tra “densità” delle linee e “intensità” del campo, solo per economia di discorso.)

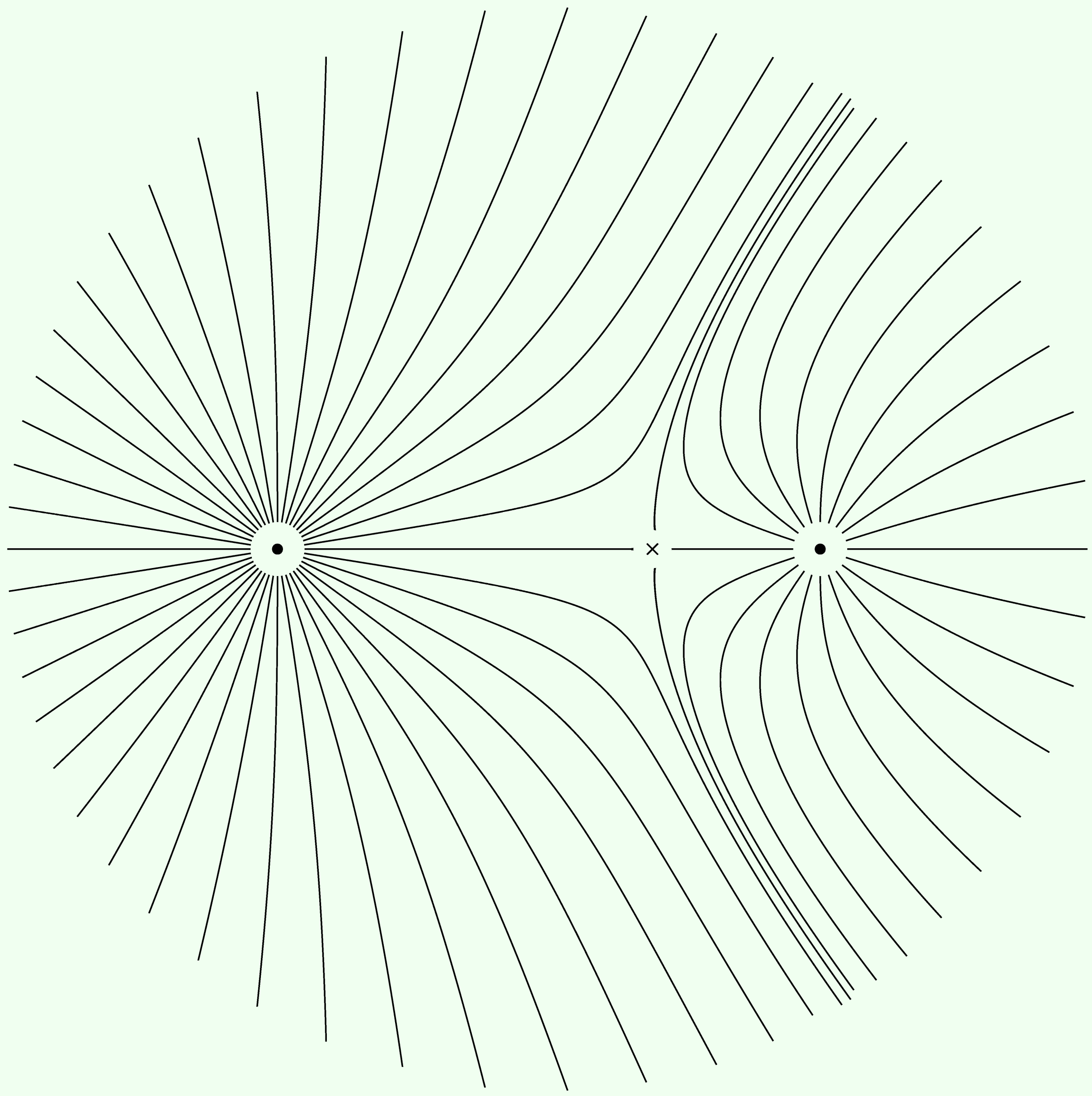
Due cariche uguali



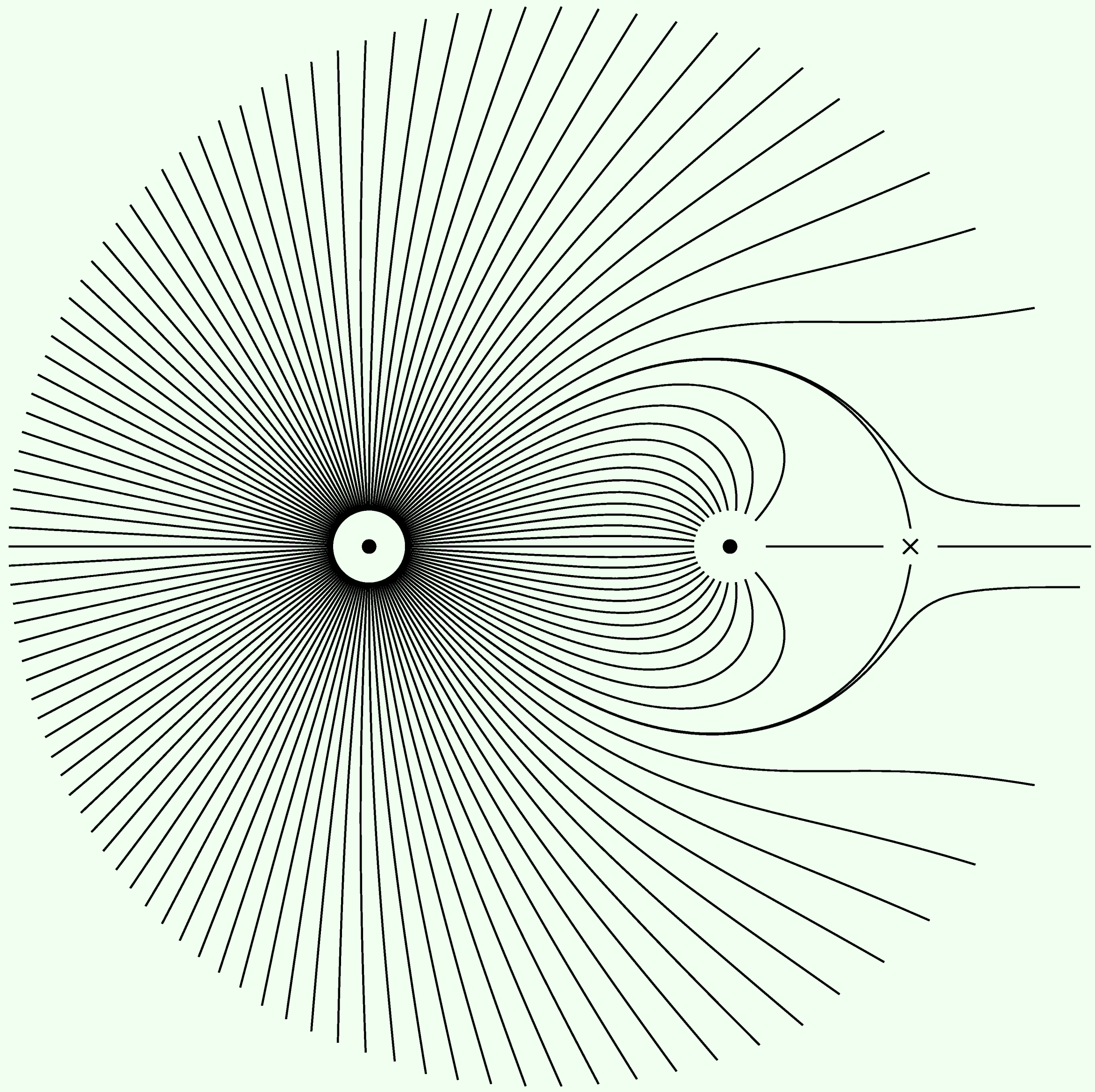
Due cariche opposte



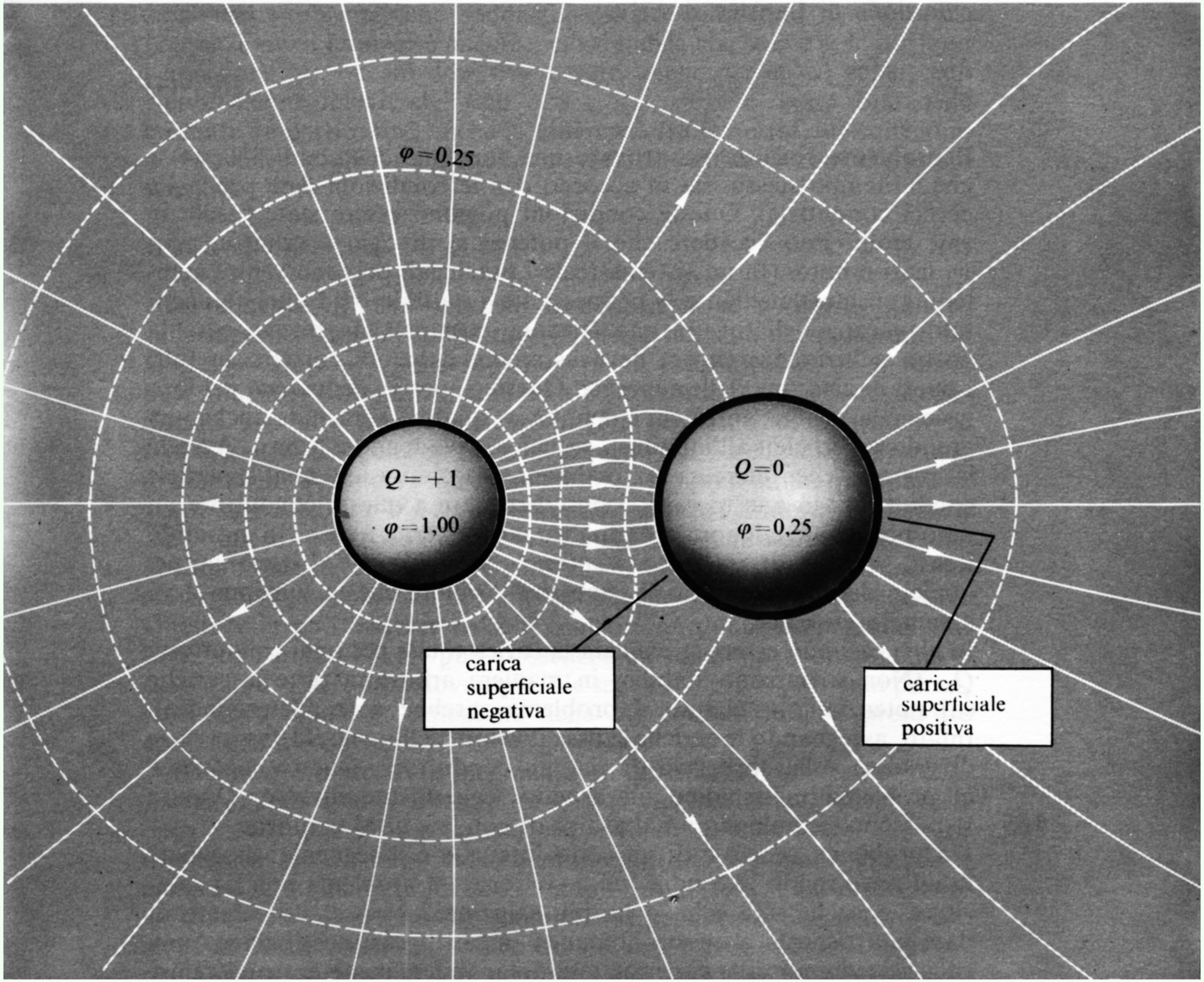
Due cariche di ugual segno, in rapporto 5:1



Due cariche di segno opposto, in rapporto 9:1



Induzione elettrostatica



Il potenziale

Ma c'è molto di più: su questa nuova entità (il campo vettoriale) poi si lavora, tipicamente introducendo il *potenziale* e discutendo il *teorema di Gauss*.

Vediamo.

In realtà il concetto di potenziale usualmente è già stato introdotto per il campo gravitazionale, magari solo come “energia potenziale”.

Però l'uso che se ne fa in elettrostatica è *assai più esteso*.

Inoltre qui viene presentato come *staccato dal corpo* che subisce la forza: come *proprietà del campo* in se stesso.

Si richiede quindi un superiore livello di *astrazione*.

Dal punto di vista matematico, il potenziale è più semplice del campo: si tratta infatti di un *campo scalare* anziché vettoriale.

La complicazione sta nella relazione tra i due, che bisogna afferrare, con ciò che segue: superfici equipotenziali, distanza di queste e intensità del campo...

Ho l'impressione che per i ragazzi il campo sia più accessibile (più primitivo, più legato a fatti *osservabili*, come la forza) che non il potenziale.

Il teorema di Gauss

Ai miei tempi nell'insegnamento liceale non se ne parlava affatto; ora invece sembra diventato necessario.

Però raramente se ne può dare una vera dimostrazione; il che non sarebbe la fine del mondo, se però si riuscisse a far capire

a) le ragioni per cui vale (legge di Coulomb)

b) il suo valore come strumento generale.

Resta però il difetto di usare un risultato (teorema...) già di per sé alquanto complesso (flusso...).

Questo rischia di produrre un distacco tra la situazione fisica e quello che il teorema di Gauss permette di dedurre.

Un esempio

Come si dimostra che il campo nella cavità di un conduttore è nullo?

(Risultato di grande importanza pratica: schermo elettrostatico, gabbia di Faraday...).

a) Il campo è nullo nel corpo del conduttore (questo lo diamo per già dimostrato) quindi la superficie S che delimita la cavità è *equipotenziale*.

b) Supponiamo che in punto P interno alla cavità E non sia nullo: allora per P passa una determinata *linea del campo*.

Dato che nella cavità non ci sono cariche (per ipotesi) questa linea può iniziare e finire *soltanto su* S.

c) Calcoliamo l'integrale di linea di E (il lavoro sulla carica di prova) lungo questa linea: esso è *positivo* per definizione di linea di campo, ma deve anche essere uguale alla *differenza di potenziale* agli estremi, che sappiamo essere nulla.

d) Abbiamo ottenuto una contraddizione, quindi l'ipotesi fatta in *b*) è falsa.

Sono evidenti le difficoltà del ragionamento, senza contare che non è nemmeno del tutto rigoroso, perché *non è vero* che una linea del campo debba iniziare e finire su cariche (esempio e figura delle due cariche uguali).

Ci si può chiedere se una classe media è in grado di seguire questi ragionamenti.

Ma soprattutto, se così non si trasforma il corso di fisica in un corso di fisica matematica...

Linearità e condensatori

La definizione di condensatore è alquanto delicata.

(È necessario ricordare che nella maggior parte dei casi, i ragazzi non avranno *mai visto né adoperato* un condensatore del *mondo reale*?)

La capacità di un conduttore isolato non è troppo difficile.

Nel caso sferico si dimostra facilmente che il potenziale (assunto zero quello all'infinito) è proporzionale alla carica totale, e si calcola anche il coeff. di proporzionalità. Si definisce allora $C = Q/V$.

Che la proporzionalità sussista per *qualsiasi* conduttore, di *qualsiasi* forma, è meno ovvio.

Occorre sapere in primo luogo che assegnata la carica totale, la *distribuzione* di tale carica sulla superficie è determinata dalla condizione che la superficie sia equipotenziale.

Ne segue (linearità) che la densità superficiale, il campo in ogni punto, e anche il potenziale del conduttore, sono tutti proporzionali alla carica totale.

Mi pare che a livello di s.s.s. si possa solo enunciare la proprietà, senza dimostrarla.

Il condensatore

Alcuni testi definiscono "condensatore" un *qualsiasi sistema* di due conduttori.

Altri dicono che debbono essere *molto vicini*.

Altri che le linee di forza vanno *soltanto da uno all'altro* (questo lo chiamerò "condensatore ideale").

Rivediamo la teoria generale: le relazioni fra cariche e potenziali dei conduttori, grazie alla solita linearità, sono:

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$$

$$Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2.$$

Non è per niente ovvio, ma si dimostra, che $C_{12} = C_{21}$.

Per un condensatore *ideale* è $Q_2 = -Q_1$ per tutti i possibili V_1 e V_2: questo significa $C_{21} = -C_{11}$, $C_{22} = -C_{12}$, quindi anche $C_{11} = C_{22}$, ossia

$$Q_1 = C\,(V_1 - V_2)$$

$$Q_2 = C\,(V_2 - V_1).$$

Ma in realtà *questo non è possibile*: si potrà sempre caricare i due conduttori *allo stesso potenziale*, come se fossero collegati formando un unico conduttore di capacità > 0, mentre le relazioni scritte in questo caso darebbero $Q_1 = Q_2 = 0$.

La soluzione è che *nei casi reali* non sarà proprio $C_{21} = -C_{11}$, ma piuttosto $C_{21} = c - C_{11}$, con $c > 0$; inoltre $C_{12} = c' - C_{22}$ ($c' > 0$).

Allora, posto $C_{12} = C_{21} = -C$, sarà

$$C_{11} = C + c, \quad C_{22} = C + c'$$

e quindi

$$Q_1 = C\,(V_1 - V_2) + c'\,V_1$$

$$Q_2 = C\,(V_2 - V_1) + c\,V_2.$$

Un *buon* condensatore avrà $c, c' \ll C$: "quasi" tutte le linee di forza vanno a 1 a 2.

Fenomenologia

Intendo per fenomenologia alcune proprietà generali, che *vengono prima* della struttura teorica:

- la distinzione dielettrici-conduttori
- l'induzione elettrostatica e il ruolo della “terra”
- i due segni delle cariche
- lo schermo elettrostatico
- ...

Qui la vera difficoltà sta negli *esperimenti*, che sono delicati, a volte “non riescono”, e quindi spesso non vengono neppure presentati.

D'altra parte *non esiste* una “conoscenza comune” dei fenomeni elettrici su cui potersi appoggiare.

La difficoltà della fenomenologia elettrostatica è anche dimostrata dalla storia: i fisici hanno speso *tutto il* 18-mo *secolo* per fare conoscenza e mettere ordine in quei fenomeni.

Tutto questo rischia di fare dell'elettrostatica, più di altre parti della fisica, una “fisica del mondo di carta”.

Ordini di grandezza

Sono cruciali per capire quando e come sono importanti gli effetti elettrostatici.

Qui è forte il rapporto col punto 3, ma se ne può parlare anche senza entrare nella struttura della materia.

Vediamo alcuni esempi.

a) *Calcolo delle capacità e loro stima.*

Le formule vanno bene, ma è anche utile avere un'informazione "intuitiva", del tipo: la capacità di un conduttore isolato espressa in pF è circa pari alla sua dimensione in cm.

Infatti per una sfera:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad \text{e} \quad 4\pi\varepsilon_0 = 1.1\times10^{-10}\ \text{F/m} = 1.1\ \text{pF/cm}.$$

Per un corpo non troppo diverso da una sfera, cambierà poco.

Dato interessante: la capacità della Terra è circa 700 μF.

Dunque il farad è un'unità apparentemente molto grande. Però...

Le capacità dei condensatori possono essere *assai maggiori*, di parecchi ordini di grandezza.

Nei circuiti elettronici si usano normalmente condensatori dal pF al μF e oltre, ma oggi esistono in commercio condensatori di *qualche farad*.

b) *Valori ragionevoli del potenziale*.

Il volt in elettrostatica è un'*unità piccola*: è facile raggiungere potenziali di centinaia e anche migliaia di volt in condizioni comuni (conduttori in aria).

In realtà per un conduttore in aria quello che limita è il *campo*, non il potenziale, causa ionizzazione. La *rigidità dielettrica* dell'aria secca è circa 3 MV/m = 30 kV/cm; per gli isolanti solidi può essere 10 volte maggiore.

Com'è noto, l' “effetto delle punte” si spiega appunto col fatto che in un conduttore le parti appuntite hanno una *densità di carica* molto maggiore del resto, e generano un *campo più intenso*. (Ma perché?)

Come si vede, qui rientra la fenomenologia.

Realizzare potenziali di 1 MV o maggiori è possibile, ma richiede un laboratorio e attrezzatura adatta.

c) *Valori ragionevoli delle cariche*.

Seguono da quelli di capacità e potenziali.

Eppure non è raro trovare nei libri esercizi con *valori del tutto sballati*.

Certo, per applicare le formule vanno bene lo stesso, ma è una didattica diseducativa...

La struttura della materia

A rigore, si potrebbe fare elettrostatica con le conoscenze del 1880:

– nei conduttori ci sono cariche libere di muoversi, ma non si sa che cosa siano

– la quantizzazione della carica elettrica (già suggerita dall'elettrolisi) e la struttura atomica della materia possono essere ignorate e sostituite da un modello continuo.

Però sarebbe anacronistico e inammissibile...

Quindi bisogna parlare di elettroni di conduzione, nominare il *lavoro di estrazione* per spiegare come mai non escono liberamente dai metalli.

Purtroppo una difficoltà tira l'altra: infatti non è poi facile giustificare il fatto che il lavoro di estrazione sia *finito*...

Ma soprattutto: se si cita la *quantizzazione* della carica, nasce un altro problema.

Infatti l'elettrostatica è una teoria in cui la carica è trattata come un *mezzo continuo*.

Bisogna quindi giustificare, almeno con gli *ordini di grandezza*, la legittimità di questo approccio.

Allo scopo, può essere utile esaminare in dettaglio qualche esempio.

Che cosa s'impara da una pallina

Consideriamo una sferetta di Al, diametro 1 cm.

La densità dell'alluminio è 2.7 g/cm^3, la massa molare è 27 g/mol.

Numero atomico: $Z = 13$.

Elettroni di conduzione: uno per atomo.

E ora i calcoli...

Risultati

Volume della sferetta: 0.52 cm^3

Massa: 1.4 g

Capacità: 0.55 pF

Carica per potenziale di 1000 V: 0.55 nC

N. totale elettroni: $(1.4 / 27) \times 6\times10^{23} \times 13 = 4.0 \times10^{23}$

N. el. liberi: 3.1×10^{22} pari a 0.052 mol

Massa degli el. liberi: 2.8×10^{-5} g

N. el. sottratti: 3.4×10^{8}

Frazione sul totale di el. liberi: 1.1×10^{-14}

Variazione relativa di massa: 2.2×10^{-19}.

Sono dati molto istruttivi: mostrano ad es. che la carica è *piccolissima* in unità "umane", ma il numero di elettroni è *enorme*, sebbene sia una frazione *assolutamente esigua* del totale.

Mostrano anche che in un fenomeno elettrostatico la massa praticamente non varia, il che giustifica di assumere che il "fluido elettrico" sia "senza peso".

Conclusioni?

All'inizio avevo proposto una tesi: *l'elettrostatica è difficile*.

Forse la dimostrazione era fin troppo facile... Ma che cosa se ne deve concludere?

Bisogna rinunciare a insegnarla?

Non sarebbe possibile...

Si potrebbero però riconsiderare — per esempio — le proposte che *spostano l'ordine* degli argomenti, iniziando da correnti, pile, leggi dei circuiti in c.c.

E soprattutto: la consapevolezza di quali sono i *nodi cruciali* — teorici e fenomenologici — e quali le loro difficoltà, può indicare un approccio caso per caso più adeguato alla classe.