

La fisica dello spazio-tempo

Come introdurre la relatività nella scuola
secondaria superiore

Relatività: che cosa fare, e perché?

La relatività interessa e affascina: perché?

Parla di spazio, tempo, luce, universo... Dei “misteri” del tempo, di cose che non sono come sembra suggerire il senso comune, di paradossi...

Il problema è trasformare questo interesse generico, emotivo e anche superficiale, in comprensione scientifica.

Si presentano poi delle alternative, tra le quali scegliere: a che cosa va dedicato il tempo disponibile, che è comunque poco?

– A discutere gli aspetti di principio, i cambiamenti di punto di vista, le possibili diverse interpretazioni?

– A sviluppare il paradigma relativistico, attraverso fatti e fenomeni non meno che per mezzo di ragionamenti teorici, per illustrare il posto che occupa oggi la relatività nel quadro complessivo della fisica?

Per più motivi la mia preferenza va alla seconda alternativa.

Questioni didattiche

Insegnare relatività richiede prima di tutto di trattare in modo diverso e approfondito le basi della meccanica.

In particolare:

- *referimenti inerziali e non*
- *il principio di relatività galileiana*
- *moto dei gravi e cambiamenti di riferimento.*

Ma è anche un'opportunità e una grande motivazione per argomenti che presi a sé possono apparire poco interessanti, al limite noiosi.

Primo fra tutti, proprio la *caduta dei gravi*, da Galileo ad Einstein.

Alcuni nodi e alcune difficoltà

1. La relatività non è solo simultaneità, dilatazioni ecc.: è fatti, fenomeni, esperimenti *reali*.

2. *Massa ed energia*: uno dei nodi centrali.

Chi non conosce $E = m c^2$?

Ma conoscere la formula è un conto, aver capito che cosa significa è un altro. E qui purtroppo è molto facile trovare, anche nei testi, dei veri e propri errori.

3. *Il problema della geometria*: nell'attuale insegnamento matematico e nella formazione degli insegnanti.

Vediamo meglio.

Approccio “tradizionale” e approccio “geometrico”

Quello che definisco approccio tradizionale posso supporlo noto, perché è prevalente nella tradizione didattica, nell'università e nei testi per la s.s.s.

L'approccio geometrico lo è molto meno, e forse a volte viene anche frainteso.

Non si tratta — poniamo — di rappresentare graficamente le trasformazioni di Lorentz, ma di *non usarle affatto*.

Così come nell'usuale geometria euclidea (sintetica) non si usano coordinate cartesiane, equazioni di rette o curve e trasformazioni di coordinate, per dimostrare teoremi e risolvere problemi.

Approccio geometrico vuol dire **Minkowski**:

– *spazio-tempo*

e soprattutto

– *metrica invariante*.

Un problema didattico concreto per l'approccio geometrico è il sostanziale abbandono della geometria classica (euclidea) nell'attuale insegnamento della matematica e nella formazione degli insegnanti.

Un esempio

Una pulsar che si allontana da noi con velocità $v = 0.6 c$ emette lampi di luce a intervalli di 0.2 s (nel suo riferimento di quiete).

Disegna il diagramma orario della pulsar, e dei lampi di luce che arrivano a noi.

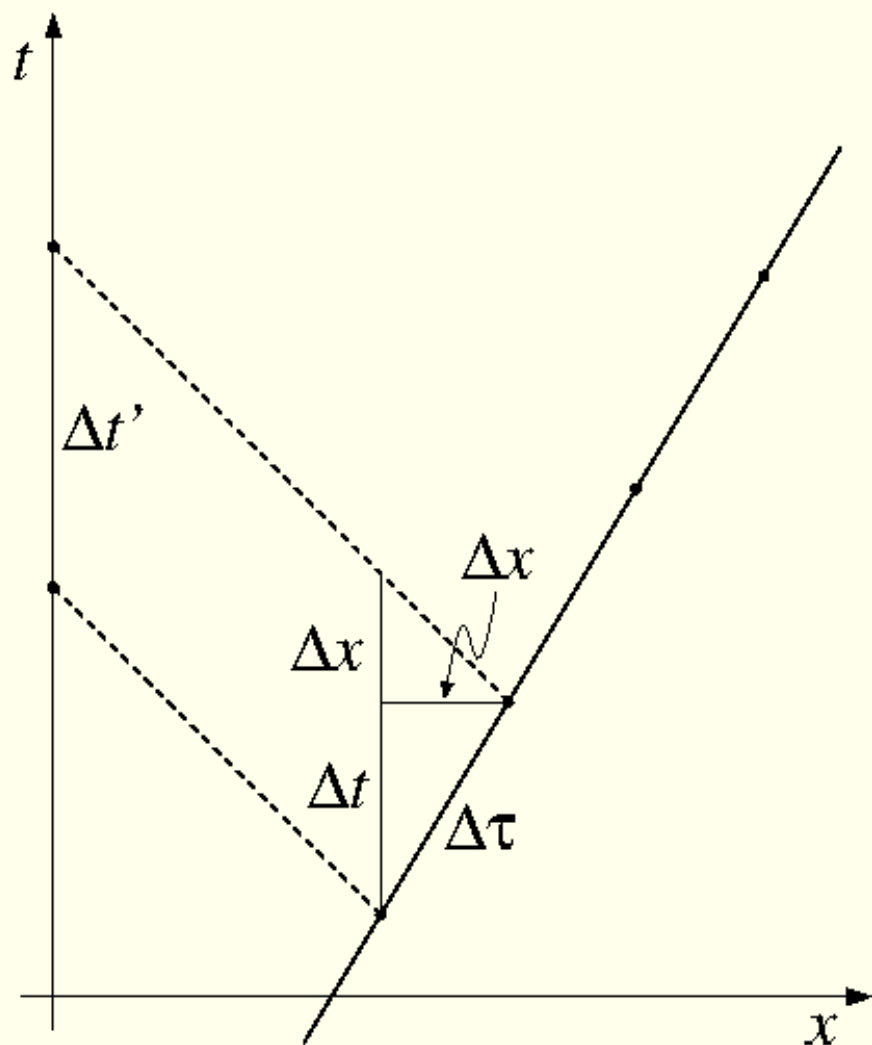
Qual è l'intervallo di tempo tra le emissioni di due lampi successivi, nel nostro riferimento?

Con quali intervalli riceviamo i lampi?

Nota 1: Mentre esistono molte pulsar con lampi a quella frequenza e anche maggiori, non ne conosciamo di così veloci. Perciò il dato sulla velocità non va preso sul serio: è stato scelto per rendere più evidenti gli effetti relativistici.

Nota 2: Nella discussione dell'esempio si usano unità in cui $c = 1$.

Semplifica le formule, e aiuta a vedere lo spazio-tempo come un tutto unitario.



$$\Delta x = v \Delta t$$

$$\Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = (1 - v^2) \Delta t^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2}} = 1.25 \Delta \tau$$

$$\Delta x = \frac{v \Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$\Delta t' = \Delta t + \Delta x = \frac{1 + v}{\sqrt{1 - v^2}} \Delta \tau$$

$$= \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} \Delta \tau = 2 \Delta \tau.$$

Considerazioni generali

1. Avevo detto all'inizio:

Insegnare relatività richiede prima di tutto di trattare in modo diverso e approfondito le basi della meccanica.

In particolare:

- *riferimenti inerziali e non*
- *il principio di relatività galileiana*
- *moto dei gravi e cambiamenti di riferimento.*

Ma è anche un'opportunità e una grande motivazione per argomenti che presi a sé possono apparire poco interessanti, al limite noiosi.

Primo fra tutti, proprio la *caduta dei gravi*, da Galileo ad Einstein.

Sottolineo soprattutto un punto: la relatività non può (non deve) essere materia *solo dell'ultimo anno*.

Almeno gli argomenti che ho appena ricordato debbono essere trattati, fin dall'inizio, avendo in mente che *serviranno come base* per la relatività.

E viceversa, che la loro importanza sta anche in questo: la riflessione di Einstein su certi temi *ha costituito la spinta* alla costruzione della relatività.

Il PR di Galileo è *identico* a quello di Einstein: la differenza sta solo nell'affermazione, esplicita in Einstein, che si tratta di una *legge di validità universale*.

Il PE nasce dalla scoperta di Galileo: *tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione.*

Einstein ne conclude: ma allora se ci mettiamo in un rif. in caduta libera (l' "ascensore di Einstein") *la gravità sparisce.*

E precisa: *a tutti gli effetti*, non solo in ambito meccanico.

Ma ci sono altri temi che possono essere anticipati, in parte anche nel primo biennio.

Un esempio per tutti: la riflessione sulla misura del tempo.

Che cos'è un orologio?

Che cosa significa che due orologi vanno (o no) d'accordo?

Se non vanno d'accordo, come si può sapere qual è quello “giusto”?

2. L'eterna questione del tempo, inteso come ore disponibili...

La chiamo “eterna” perché si è continuamente obbligati a delle scelte.

L'importante è farle consapevolmente, e sfuggendo la tentazione di fare “di tutto un po'”: di solito questo modo di procedere non lascia niente.

Perciò se si decide di trattare la relatività, non si potrà forse trattare tutto quello che c'è nel *Quaderno* 16, ma è importante individuare alcuni temi fondamentali, e dedicarsi a quelli.

Inoltre: ho già detto che una parte del contenuto del *Quaderno* può (deve) essere anticipata ai primi anni (i primi 4 capitoli e parte del quinto).

Quindi il tempo richiesto dalla relatività “in senso stretto” si riduce non poco.

3. I problemi.

Tutti sappiamo che insegnando fisica occorre dedicare un tempo adeguato alla discussione e risoluzione di problemi.

Nel *Quaderno* ce ne sono 75, con le soluzioni.

Però sono di un livello medio-alto, alcuni non adatti a studenti.

Non ci sono invece problemi “iniziali”, di base, che forse sarebbe più giusto chiamare “esercizi”.

Per fare degli esempi, non ci troverete

“Un elettrone ha velocità pari a $0.9 c$; calcola (in joule) la sua energia cinetica”.

Dove c'è solo da applicare una formula.

Oppure questo:

“Un elettrone è stato accelerato con una d.d.p. di 200 kV: qual è la sua velocità?”

Che è più difficile del precedente, perché bisogna ricordare la relazione tra d.d.p. ed energia di una particella carica, e poi bisogna invertire la formula dell'energia.

E nemmeno questo:

“Perché la frase che si legge spesso: ‘nello LHC i protoni vengono accelerati fino quasi alla velocità della luce’ è priva di senso?”

(Più adatto a una discussione in classe, non solo qualitativa, ma con esempi numerici.)

4. Una lettura collaterale, che contiene anche molti problemi, è *Fisica dello spazio-tempo* di Taylor e Wheeler.

La linea generale della trattazione è la stessa, ma ci sono anche delle differenze.

- Manca una discussione delle parti preliminari (quelle che ho detto si potrebbero anticipare).
- È molto più ristretta la RG (praticamente solo il PE).
- È un libro “americano”, nel bene e nel male.

Se ne potrebbero leggere alcune parti, per esempio certi dialoghi.

Comunque una lettura molto consigliabile per l'insegnante.

Il principio di relatività

È il primo ([5] lez04.pdf) dei due famosi “postulati di Einstein” (del secondo parleremo fra poco).

Ecco come lo enuncia Einstein:

[...] alla supposizione che il concetto di quiete assoluta non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza, e che inoltre per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni meccaniche debbano valere anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche [...]. Assumeremo questa congettura (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato “principio di relatività”) come postulato [...]

Ci sono da notare due cose:

- 1) E. parla di SC, oggi preferiamo dire “rif.”
- 2) L'enunciato di E. ricalca esattamente quello di Galileo, a parte la forma più astratta: E. parla di “leggi”, G. parla di “esperimenti”.

La forma galileiana è più adatta a una classe iniziale.

In questa forma, non vedo ostacoli a enunciarlo fin dall'inizio della meccanica.

Raccomando vivamente la lettura del famoso brano dei *Massimi Sistemi*.

I ragazzi *possono anche sperimentare*: è stato fatto.

C'è chi dice che tra E. e G. c'è una differenza, perché G. parla solo di meccanica, mentre E. dice chiaramente che il PR ha validità universale.

A mio parere è un argomento storicamente infondato.

Al tempo di G. la fisica non esisteva neppure come termine indicante una disciplina scientifica a sé: esisteva solo la generica “filosofia naturale”.

Figuriamoci se si poteva pensare a distinzioni come “meccanica”, “ottica” “elettromagnetismo” (del tutto sconosciuto)...

Quando G. enuncia il PR nel *Massimi Sistemi*, lo fa descrivendo una serie di esperimenti: tutti quelli che gli vengono in mente. (E si può discutere se siano strettamente di meccanica.)

Non può proporre esperimenti (poniamo) di elettromagnetismo, e non poteva neppure sognarsi di dire che il PR avesse validità limitata alla meccanica...

È solo nell'800, quando la fisica è ben definita come scienza, e cominciano a esistere distinti capitoli (soprattutto la meccanica) che si può porre il problema.

Il PR nella meccanica newtoniana è un *teorema*: segue dall'ipotesi che le forze dipendano solo dalle *distanze* e dalle *velocità relative*.

Quando si sviluppa una teoria completa dell'elettromagnetismo (Maxwell) ci si accorge che l'*estensione* del PR a questo nuovo capitolo della fisica è *problematica*.

I famosi “due postulati” della RR

Il primo è il PR, e ne abbiamo già parlato.

Il secondo E. lo enuncia così:

[...] introdurremo inoltre il postulato — con questo solo apparentemente incompatibile — che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata V , indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti.

Viene sempre indicato come “postulato dell'invarianza della velocità della luce”, ma vale la pena di rifletterci un po'.

Se il PR già enuncia l'invarianza di tutte le leggi fisiche, e quindi in particolare delle eq. di Maxwell, che bisogno c'è di questo secondo postulato?

Dalle eq. di Maxwell segue l'esistenza delle onde e.m. e anche il valore della loro velocità nel vuoto. Quindi?

Forse la risposta sta nella clausola finale:

indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti.

Anche questa sembrerebbe inutile, date le eq. di Maxwell.

Siamo quindi costretti ad ammettere che a quella data (1905) E. non si sentisse di dare per scontato l'assenso dei fisici sulla validità delle eq. di M.

Non dimentichiamo che per risolvere il problema posto dall'esperimento di M-M erano state pensate delle “teorie balistiche”, secondo cui la velocità delle onde *dipenderebbe dalla velocità* delle cariche che le emettono.

Le teorie balistiche decadde quando arrivarono prove sperimentali (luce dalle *stelle doppie*: de Sitter, 1913) che sembravano confutarle.

Tuttavia la storia ancora una volta è complessa, perché la confutazione di de Sitter fu a sua volta invalidata dalla scoperta del *teorema di estinzione* (Ewald, Oseen: 1912-1915).

Per essere in seguito ripresa usando radiazione X al posto della luce visibile.

Conclusione: *un secolo dopo*, quando non ci sono più dubbi sulle eq. di Maxwell, *il secondo postulato di E. è inutile.*

Il primo postulato (PR) *è sufficiente da solo.*

Relatività ristretta e relatività generale

(solo pochi cenni per un grande argomento)

Come vedremo meglio in seguito, fa parte della mia proposta che RR e RG vadano *trattate insieme*: arrivo a dire che *la relatività è una*.

Purtroppo ci si scontra con una resistenza non piccola degli insegnanti.

Motivazioni addotte:

- la solita “mancanza di tempo”
- una supposta maggiore difficoltà.

La mancanza di tempo vale per qualunque argomento, quindi si tratta di *fare delle scelte*. Occorrerebbe approfondire, ma non posso permetterme-
lo: appunto per ragioni di tempo.

Quanto alla difficoltà, che è un'aura che avvolge a tutti i livelli la RG, credo di aver dimostrato nel corso di questi anni che *non esiste* (a parte la questione già accennata della geometria).

C'è invece a mio parere un “gap” culturale.

La RG richiede una sensibilità, meglio che una conoscenza, in campi particolari anche se fondamentali:

- *gravitazione*
- *astronomia*
- *cosmologia*.

Da tempo i laureati in fisica ricevono pochissimi stimoli in queste direzioni (non era così ai tempi di Einstein o di Heisenberg...).

Perfino la “vecchia” gravitazione newtoniana non di rado è trascurata nell'insegnamento della dinamica; dimenticando che senza la meccanica del sistema solare tutto il lavoro di Newton e dei suoi continuatori sarebbe storicamente privo di senso.

Si può insegnare la RG?

Esiste un fortissimo *pregiudizio* contrario, motivato dal modo obiettivamente complesso come la teoria è nata, e dal fatto che ancor oggi sono pochissimi i fisici che la conoscono a sufficienza.

D'altra parte si tratta di una teoria di *estrema importanza* nella fisica del 20-mo secolo: ha fornito la spiegazione di molti fenomeni, è *largamente confermata*, ha trasformato la *cosmologia* da tema filosofico in *capitolo della fisica*.

Per non parlare del fascino esercitato da alcuni argomenti di conoscenza comune (come parole):

- *big bang* ed *espansione dell'universo*
- *onde gravitazionali*
- *buchi neri* e *stelle di neutroni*.

I risultati della RG hanno oggi perfino *applicazioni tecniche* (GPS).

C'è poi una motivazione di altro genere: da un punto di vista moderno è corretto dire che **la relatività è una**: la distinzione RR/RG ha un senso nell'ambito della teoria, ma non giustifica di considerarle teorie separate.

Di fatto, non solo è possibile dare i primi elementi della RG, ma è giusto farne una *presentazione unificata*.

Così ad es. il PE può essere trattato abbastanza presto, almeno fino al punto di dare significato all'espressione:

in una navicella spaziale in orbita i corpi sono senza peso.

Avendo tempo si può fare molto di più, con *mezzi matematici elementari e con pieno rigore scientifico*.

Qui non posso parlarne: rimando a [5], dove è mostrato come questo si possa fare.

Il principio di equivalenza

La storia del PE ([5] lez05.pdf, lez06.pdf) va spiegata meglio, perché coincide con la nascita della Relatività Generale.

E. non è soddisfatto del ruolo privilegiato dei RI, e vorrebbe trovare una formulazione delle leggi fisiche che valga in *qualunque* rif., anche non inerziale. Da qui l'idea di una *Teoria generale della relatività*, brevemente RG.

Si sofferma sul fatto (ben noto) che nei rif. non inerziali per salvare la seconda legge di Newton occorre introdurre *forze apparenti*, che sono sempre *proporzionali alla massa* del corpo su cui agiscono.

L'idea cruciale di E. sta nell'associare questo fatto con l'altro, ugualmente noto (dai tempi di Newton): anche *la gravità è proporzionale alla massa* del corpo su cui agisce.

Del resto, proprio in ciò consiste la scoperta di G.: l'*universalità* del moto in campo gravitazionale.

E. fa poi un altro passo: in un rif. in *caduta libera* in campo gravitazionale la forza apparente *cancella* la forza di gravità: i corpi sono *senza peso*.

In realtà anche questo era noto a N., che l'aveva usato (all'inverso) nei *Principia* appunto per dimostrare che la gravità è proporzionale alla massa del corpo su cui agisce: N. osserva che i satelliti di Giove si muovono attorno al pianeta *come se l'attrazione del Sole non ci fosse*.

Ma vale anche il *viceversa*: agli effetti meccanici la forza apparente in un rif. accelerato è *equivalente* a un campo gravitazionale agente in un rif. inerziale.

È questo il *principio di equivalenza* (PE) (debole).

Dunque fin qui nessuna scoperta, ma E. va oltre:

a) afferma che l'*equivalenza* tra forza apparente e forza di gravità non *deve valere* solo per la meccanica, ma *per tutta la fisica* (lo stesso passo che aveva fatto col PR): questo è il PE *forte*

b) comprende che se questa proprietà della gravità è generale, deve valere anche in ambito relativistico, e ciò richiede quindi la costruzione di una *teoria relativistica della gravitazione*

c) arriva a un'intuizione: se l'azione della gravità è indipendente dalla massa e dalla natura dei corpi, sembra ragionevole vederla non come una *proprietà* dei corpi stessi, ma *dello spazio* in cui si muovono: anzi *dello spazio-tempo*

d) con un ragionamento in realtà scorretto, ma di grande valore euristico, si convince che questa proprietà dello spazio-tempo dovrà avere a che fare con la sua struttura geometrica: *in presenza di gravità* lo spazio-tempo deve essere *curvo*.

Da qui in poi, con un lavoro che dura anni, e che gli richiede d'imparare della matematica nuovissima (il cosiddetto *calcolo differenziale assoluto*) arriva a costruire la teoria completa, che è universalmente nota come RG.

Il primo grande successo della teoria (1915) è la *precessione del perielio* di Mercurio, nota da almeno 60 anni e ancora inspiegata.

Fa poi delle previsioni su fenomeni allora sconosciuti, che verranno verificati in seguito: alcuni abbastanza presto, altri solo dopo decenni.

Mette infine al lavoro la RG per studiare la *struttura e l'evoluzione* dell'Universo, facendo nascere la *cosmologia scientifica*.

Osserviamo che l'iniziale *programma di ricerca* (generalizzare la relatività a rif. in moto qualsiasi) ha finito per essere dimenticato, cedendo il posto a quello che ho già indicato:

costruire una teoria relativistica della gravitazione.

Sembrerà strano, ma questo fatto non è ancora stato capito da tutti: si legge spesso che la RG *generalizza* la RR ai rif. *non inerziali*.

Quando invece la vera distinzione è un'altra:

- RR: spazio-tempo *piatto* (o almeno, curvatura *trascurabile*)
- RG: spazio-tempo curvo (quindi presenza di *materia* che produce la *curvatura*).

Un “buco” doloroso

A questo punto dovrei trattare un argomento che fa parte essenziale della mia proposta: *il tempo in RG*.

Ossia: redshift gravitazionale, discordanza tra orologi in posizioni diverse in un campo gravitazionale, alcuni esperimenti classici (Pound–Rebka, Briatore–Leschiutta).

Purtroppo proprio il tempo non me lo consente.

Rimando perciò alla parte iniziale di [4] (lez. 3).

Non posso fare diversamente, ma voglio sottolineare ancora: una trattazione della relatività che ignori quegli argomenti è a mio giudizio *gravemente incompleta*.

Riassumendo

Rivediamo l'approccio che propongo per la parte iniziale della relatività.

- Iniziare i primi passi *fin dalla terza*.
- La relatività è *una*: presentare insieme, fin dall'inizio, le basi della RR e della RG (PR e PE).
- Dedicare adeguato spazio ai *riferimenti*.
- Chiarire (con esempi) la *trasformazione* di grandezze fisiche da un rif. a un altro. *Non sto parlando di formule*, tipo trasformazioni di Galileo o di Lorentz!
- Fare ampio uso delle *rappresentazioni grafiche* (diagrammi spazio-tempo) per la soluzione di problemi, ma anche per illustrare le idee centrali della relatività.

- Chiarire il concetto d'invariante. *Tempo* invariante (assoluto) nella fisica newtoniana, *velocità della luce* invariante nella fisica einsteiniana.
- Sono due scelte incompatibili: l'orologio a luce.
- La geometria dello spazio-tempo. I diagrammi spazio-tempo come *carte geografiche*.
- Rif. in caduta libera: *scomparsa della gravità*. L'interpretazione alla Newton e quella alla Einstein ([5] [lez06.pdf](#)).
- Tempo e gravità. Gli esperimenti classici (P-R, B-L). Di nuovo le carte geografiche.

La dinamica relativistica

Le prime indicazioni che la meccanica newtoniana non vale per particelle veloci appaiono agli inizi del '900, da una serie di esperimenti di Kaufmann, Bucherer, e altri, fatti con elettroni emessi nei decadimenti β .

Poi le prove sperimentali si sono moltiplicate, e qui non dirò di più, salvo richiami in punti particolari.

I principi della dinamica relativistica

Nei principi c'è poco da cambiare rispetto alla meccanica newtoniana.

Il primo (inerzia) resta identico.

Il secondo pure, se lo si scrive nella forma $F = dp/dt$.

Questo è un ritorno a Newton. Infatti il suo enunciato del secondo principio è:

$$\textit{mutatio motus} = \textit{vis impressa}$$

dove “motus” è la nostra quantità di moto.

Il terzo principio (azione e reazione) invece *non vale in questa forma*, ma deve essere sostituito dalla *conservazione della quantità di moto*.

Il terzo principio

Per un sistema isolato il principio di azione e reazione (PAR) implica la conservazione della q. di moto, ma *il viceversa non è vero*.

I motivi sono essenzialmente due:

- 1) il PAR non dice solo che le forze sono opposte come vettori, ma anche che *sono sulla stessa retta*
- 2) se il sistema consiste di più di due punti materiali, il PAR vale per *tutte le coppie* azione-reazione, e questo non si può ricavare dalla sola conservazione della q. di moto totale.

Tralascieremo questi problemi; per ragioni didattiche, e perché abbiamo cose più fondamentali di cui occuparci...

Il PAR non vale in relatività

Il punto essenziale è che nella fisica newtoniana il PAR viene enunciato per *azioni a distanza*.

Nella fisica relativistica le azioni a distanza *non possono esistere*, perché significano che le forze tra due corpi *a un stesso istante* dipendano solo dalla loro *distanza a quell'istante*.

Ma dire “stesso istante” *dipende dal rif.*, quindi un'azione a distanza *non può soddisfare il PR*.

Nella fisica relativistica le forze tra corpi distanti sono necessariamente *mediate da un campo*.

Potremo far conservare la *q.* di moto, ma nel bilancio dovremo includere anche la *q. di moto del campo*.

È facile trovare esempi nel caso d'interazione e.m., ma qui debbo sorvolare.

Purtroppo anche la trattazione in [5] `lez11.pdf` mi pare oggi troppo sbrogativa...

Fa eccezione il caso degli *urti*, dove l'interazione è a *brevissima distanza* ed è nulla se i corpi non sono assai vicini.

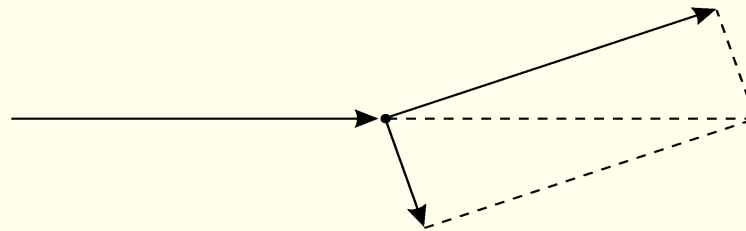
È quindi lecito conservare la q. di moto *fra un istante precedente e uno successivo* all'urto, perché a quegli istanti la q. di moto del campo non contribuisce.

Relazioni logiche e fatti sperimentali

Il cambiamento essenziale nella dinamica relativistica rispetto a quella newtoniana sta nella diversa relazione tra *energia*, *impulso* e *velocità*.

Ci sono alcune leggi o proposizioni che sono logicamente connesse:

- 1) La legge di “composizione” [7] galileiana delle velocità.
- 2) La legge dell'angolo retto nell'urto elastico tra particelle di ugual massa, di cui una ferma.
- 3) La relazione $T = p^2/(2m)$.



Ciascuna di queste *implica l'altra*, sotto ragionevoli ipotesi.

Il ragionamento esteso si trova in [5] lez11.pdf.

Si procede così:

a) La legge dell'angolo retto segue dalla relazione newtoniana tra impulso ed energia cinetica, e viceversa.

b) La legge dell'angolo retto segue dalla “composizione” galileiana, e viceversa.

c) Ci sono *evidenze sperimentali* che vanno contro la legge dell'angolo retto.

(A partire dai primi esperimenti in camera di Wilson, dove si vede che l'urto di due elettroni, di cui uno fermo, produce in uscita traiettorie che formano un angolo acuto.)

d) Il tempo *non è assoluto*, quindi la dimostrazione classica della legge di composizione non vale.

e) Esiste una *velocità limite* per una particella, e ciò è *incompatibile* con la relazione newtoniana tra impulso ed energia cinetica.

La velocità limite

Se la relazione newtoniana tra impulso ed energia cinetica (e quindi anche quella tra velocità e impulso) fosse esattamente valida a qualunque velocità, si potrebbe accrescere *senza limiti* la velocità di una particella cedendo *sufficiente energia*.

Per es. basterebbe accelerare un elettrone in un potenziale di 250 kV per fargli raggiungere la velocità della luce.

L'esperimento dimostra che *ciò non accade*: anche con energia di diversi MeV l'elettrone ha sempre velocità minore di c .

(L'esperimento è mostrato nel film PSSC *La velocità limite*.)

Conclusione provvisoria

Abbiamo dunque diverse prove sperimentali che le leggi newtoniane:

$$p = mv \quad T = p^2/(2m)$$

non sono valide quando v non è trascurabile rispetto a c , e in generale *non sono compatibili con la relatività*.

Ma quali sono le relazioni relativistiche corrette?

Si può dimostrare (in base alla conservazione della q. di moto negli urti: [5] lez11.pdf) che l'espressione per p è

$$p = m v \gamma.$$

Quanto all'energia cinetica, si dimostra

$$T = E - m c^2$$

dove E è definita come

$$E = m c^2 \gamma.$$

La relazione più importante della dinamica relativistica

Dalle due relazioni

$$p = m v \gamma \quad E = m c^2 \gamma$$

si ricava facilmente

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4.$$

Questa relazione, che lega energia, impulso e massa, è di gran lunga *più importante* delle due precedenti.

Sia dal punto di vista *pratico* (utilità nei calcoli) sia da quello *concettuale*.

Esprime infatti l'esistenza di un *invariante*, costruito a partire da E e da p .

Ma come è definita la massa?

In tutte le relazioni compare una m , che abbiamo chiamato “massa”.

Abbiamo poi detto che in $E^2 - c^2p^2 = m^2c^4$ si vede un invariante; perché?

Le due cose sono connesse: vediamo.

Che cosa sia la m che appare in tutte le formule, lo si capisce da

$$p = m v \gamma$$

che a piccola velocità si riduce a $p = mv$ a meno di termini di secondo ordine in v/c .

Dunque m è la massa misurata nel rif. in cui il corpo è fermo (o si muove a velocità $\ll c$).

L'invariante fondamentale della dinamica relativistica

In un RI, K , misuriamo impulso p ed energia E di un corpo.

Troviamo che vale la relazione $E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$.

Passiamo a un nuovo RI, K' , e misuriamo di nuovo energia e impulso: troveremo nuovi valori E' , p' .

Anche con questi nuovi valori, vale ancora

$$E'^2 - c^2 p'^2 = m^2 c^4$$

con lo stesso valore di m .

Dunque $E^2 - c^2 p^2$ è *invariante*.

L'inerzia dell'energia

Questa è la denominazione più corretta, al posto della consueta “equivalenza massa-energia.”

Einstein intitola un lavoro del 1905:

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?

In breve: se a un corpo *fermo* cediamo energia in modo che *resti fermo*, *la sua massa aumenta*.

Esempi:

- si scalda un corpo
- si carica la molla di un orologio
- si porta un atomo in uno stato eccitato.

Viceversa:

- un corpo cede calore all'esterno
- il Sole emette radiazione
- l'atomo torna allo stato fondamentale.

In termini quantitativi, Einstein dimostrò che in quelle condizioni si ha

$$\Delta m = \Delta E / c^2.$$

È così che si arriva alla famosa relazione

$$E = mc^2$$

che però — **attenzione!** — vale per un corpo *fermo*.

Massa invariante e inerzia dell'energia

Supponiamo di avere già stabilito la relazione fondamentale

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

dove m è la massa *invariante*, ossia quella che si misura con $F = ma$ in un rif. nel quale la velocità del corpo è $\ll c$.

L'inerzia dell'energia si riferisce a *questa* massa. Dobbiamo ora vedere come si dimostra e che cosa significa.

Supponiamo ancora di aver già dimostrato che la relazione tra quantità di moto e velocità è:

$$p = m \gamma v$$

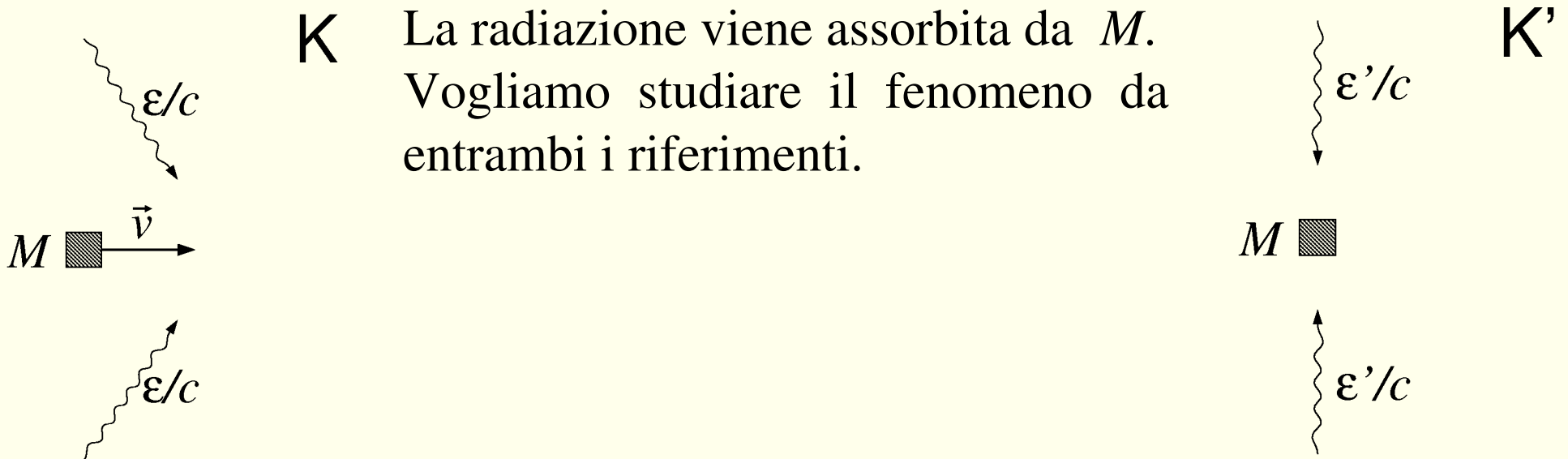
dove γ ha la nota espressione

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Un esperimento ideale

Abbiamo un corpo di massa M , nero (assorbitore ideale). Su di esso mandiamo due pacchetti di radiazione (es. impulsi laser) uguali, che provengono da direzioni opposte nel rif. K' in cui M è fermo. Sia ε' l'energia di ciascun pacchetto.

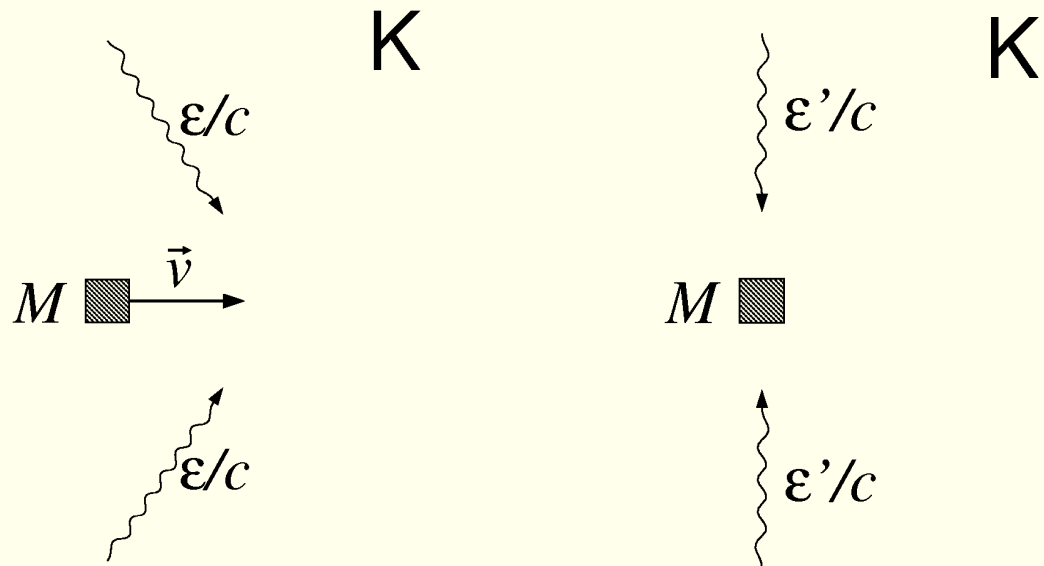
Nel rif. K (laboratorio) M si muove verso destra, con velocità v . I pacchetti di radiazione si muovono obliquamente (e hanno energia ε diversa da ε' , che non occorre conoscere).



Iniziamo dal rif. K' .

Qui M è inizialmente fermo; la q. di moto si conserva, quindi M *rimane fermo* anche dopo aver assorbito la radiazione.

Ne segue che anche in K la sua velocità, che era inizialmente v , dovrà restare *invariata*.

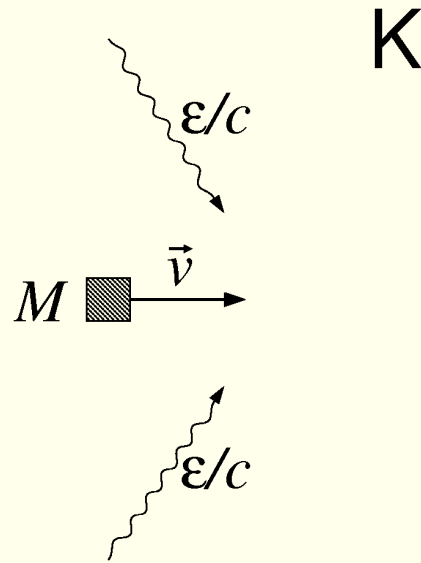


Ragioniamo invece applicando la conservazione della q. di moto in **K**. Sia α l'angolo che la direzione della radiazione forma con la verticale; sappiamo che un pacchetto di energia ε ha q. di moto (modulo) ε / c .

Dunque se v_f è la velocità finale di M , avremo:

$$M \gamma_f v_f = M \gamma v + 2 (\varepsilon / c) \sin \alpha$$

che è in contraddizione con $v_f = v$!



Dov'è l'errore?

L'idea di Einstein è che l'errore stia nell'aver dato per scontato che la massa *resti invariata*. Proviamo infatti a supporre che la massa finale M_f sia diversa da M ; allora potremo salvare $v_f = v$.

Scriviamo

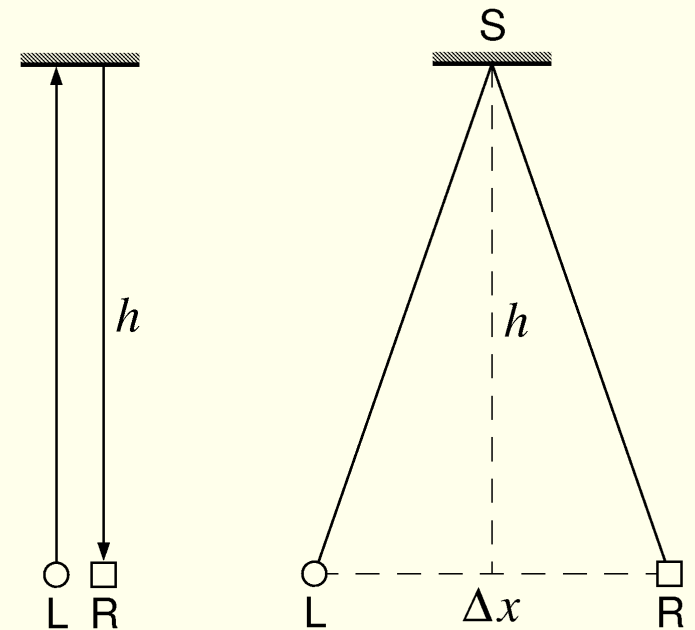
$$M_f \gamma v = M \gamma v + 2 (\varepsilon/c) \sin \alpha$$

Per arrivare al risultato finale abbiamo ancora bisogno di determinare α , ma per questo basta ripensare all'orologio a luce: si vede che $\sin \alpha = v/c$. Allora

$$M_f = M + 2 \varepsilon / (\gamma c^2).$$

Ma il corpo M ha giusto assorbito l'energia 2ε , che possiamo quindi sostituire con ΔE :

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2).$$



Interpretazione

Siamo arrivati a

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2) \quad (*)$$

che in parole si esprime così:

*Quando un corpo che si muove con velocità v assorbe un'energia ΔE senza cambiare velocità, la sua massa **aumenta** come indicato dalla (*).*

In particolare, dato che per un corpo fermo $\gamma = 1$:

*Quando un corpo **fermo** assorbe un'energia ΔE **restando fermo**, la sua massa **aumenta** di*

$$\Delta M = \Delta E / c^2.$$

Nelle parole di Einstein:

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia.

Commenti importanti

1. Abbiamo stabilito la relazione $\Delta M = \Delta E / c^2$ con un particolare esperimento ideale, ma la sua validità è *universale*.

Infatti possiamo dare energia al corpo per una strada e poi toglierla per un'altra strada. Se la variazione di massa non fosse sempre la stessa, ci troveremmo ad avere uno stato finale del corpo uguale a quello iniziale, ma con massa diversa...

2. Abbiamo usato un esperimento *ideale*; questo non significa che “nella realtà” le cose vadano diversamente...

Un esperimento ideale usa la fisica conosciuta: è solo un modo per descrivere una deduzione teorica.

Se accettiamo la tale e tale legge generale, allora ne segue necessariamente che ...

La cosiddetta “massa relativistica”

L'inerzia dell'energia *non ha niente a che fare* con la “massa relativistica”.

Questa viene introdotta per salvare la relazione $p = m v$, che nella dinamica relativistica non vale se m è la *massa invariante*: quella che figura in

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4.$$

In realtà la massa relativistica *non è che l'energia* di un corpo in moto, divisa per c^2 . Apparentemente sembra giustificare la “famosa relazione” $E = mc^2$.

Ma è *del tutto inutile*: nessun fisico la usa mai, e serve solo a creare confusione.

La relazione valida in generale è

$$E = m \gamma c^2$$

dove si legge che *ci sono due modi distinti* per cambiare l'energia di un corpo:

- a) cambiarne la velocità, col che cambia γ
- b) cedergli energia senza cambiare la velocità (es. dell'esperimento ideale)
- c) col che cambia m .

Che succede quando si scalda un corpo?

Per es. un pezzo di ferro...

Succede che la sua massa *aumenta* (di pochissimo: nessuna bilancia potrebbe rivelarlo).

Ma a livello microscopico?

Gli atomi del ferro sono sempre in movimento: oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio. Se si aumenta la temperatura, l'ampiezza media delle oscillazioni cresce: crescono quindi tanto l'energia cinetica come quella potenziale.

E le masse?

Le masse (invarianti) degli atomi non cambiano; eppure la massa del pezzo di ferro aumenta...

Dobbiamo quindi concludere che la massa *non è additiva*:

in generale la massa di un sistema non è uguale alla somma delle masse delle parti componenti.

Massa non additiva e difetto di massa

Nel caso del pezzo di ferro, o anche di un gas, la massa del sistema è *maggiore* della somma di quelle dei componenti.

Ma può anche essere *minore*: è quello che accade

- in una *molecola* rispetto agli *atomi* che la formano
- in un *atomo* rispetto a *nucleo ed elettroni*
- in un *nucleo* rispetto ai *protoni e neutroni*.

In tutti questi casi si parla di *difetto di massa*.

Per atomi e molecole il difetto di massa è piccolissimo e non misurabile: 10^{-9} o 10^{-10} della massa.

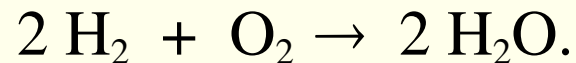
Per i nuclei invece è dell'ordine di 10^{-3} e può essere misurato con grande precisione.

Ma in linea di principio *non c'è nessuna differenza*.

Un esempio più complicato: una reazione chimica

In un recipiente (a pareti robuste e isolanti) mettiamo due moli d'idrogeno e una di ossigeno, a temperatura e pressione ambientali. Il volume totale è quindi circa 67 litri.

Con la solita scintilla inneschiamo la reazione che produce acqua:



Domanda: Confrontare la massa totale prima e dopo la reazione.

Risposta 1: Dato che due molecole di H_2O hanno massa minore di una molecola di O_2 più due di H_2 , la massa sarà *diminuita*.

Risposta 2: Dato che il sistema è isolato, l'energia e quindi la massa *non cambia*.

La risposta esatta è la 2.

Spiegazione e numeri

L'entalpia di reazione è **572 kJ**.

Questo è il calore che occorre sottrarre perché la reazione avvenga a temperatura e pressione costanti: in queste condizioni si formerebbero **36** grammi di acqua liquida (**36 cm³**).

La massa diminuirebbe in corrispondenza:

$$572 \text{ kJ} / c^2 = 6.4 \times 10^{-12} \text{ kg} = 6.4 \times 10^{-9} \text{ g}.$$

La diminuzione è dovuta in buona parte al *difetto di massa* delle molecole di H₂O, ma anche all'*ulteriore legame* delle molecole nell'acqua liquida.

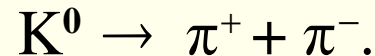
Se invece si lascia il sistema isolato, la temperatura e la pressione salgono moltissimo.

Ma dato che l'energia non è cambiata, non cambia neppure la massa.

N.B. L'esperimento è irrealizzabile, per varie ragioni...

L'esempio del K^0

Il mesone K^0 è una delle prime particelle “strane” che sono state scoperte. Ha una vita media molto breve ($< 10^{-10}$ s) e diversi modi di decadimento. A noi interessa quello in due pioni:



La massa del K^0 è $498 \text{ MeV}/c^2$; quella di ciascun pione è $140 \text{ MeV}/c^2$.

Come si vede, mancano $218 \text{ MeV}/c^2$: dov'è finita la massa mancante?

Si dice di solito che questa massa si è “convertita in energia”: infatti i due pioni non sono fermi, ma hanno un'energia cinetica, che fra tutti e due vale appunto 218 MeV .

Però attenzione: *se si vuole usare la massa relativistica*, i pioni — essendo in moto — hanno una massa *maggiore* di quella di riposo, esattamente **249 MeV/c²** ciascuno.

Infatti l'energia si conserva, e l'energia di riposo iniziale del K⁰, che è **498 MeV**, si sarà ripartita tra i due pioni: **249 MeV** per ciascuno.

Ma allora la somma delle masse finali è uguale alla massa iniziale, e **non c'è nessuna conversione di massa in energia!**

Se invece usiamo la *massa invariante*, allora effettivamente la somma delle masse finali è minore di quella iniziale, e la differenza si ritrova come energia cinetica.

Però l'energia si conserva comunque, e quindi non si deve parlare in ogni caso di conversione di massa in energia: se mai, di conversione di *energia di riposo* in *energia cinetica*.

Le “indicazioni nazionali”

[...] l'aver affrontato l'equivalenza massa-energia gli permetterà di sviluppare un'interpretazione energetica dei fenomeni nucleari (radioattività, fissione, fusione).

Ci sarebbe da capire che cosa sia una “interpretazione energetica”.

E che cosa c'entri l'equivalenza massa-energia.

Perché non hanno scritto anche

“l'aver affrontato l'equivalenza massa-energia gli permetterà di sviluppare un'interpretazione energetica delle reazioni chimiche”?

Dov'è la differenza?

Eppure quella frase lascia pensare che chi ha scritto le IN aderisca a un'idea purtroppo assai diffusa: che i fenomeni nucleari “si spieghino” con la famigerata “equivalenza”.

In realtà la differenza in *termini energetici* tra i comuni fenomeni chimico-fisici e quelli nucleari sta a indicare una cosa sola: che nei fenomeni nucleari è in gioco un'interazione diversa (l'interazione *forte*), molto *più intensa* dell'interazione e.m.

Il maggiore difetto di massa è una *conseguenza*, non una spiegazione.

Il che non toglie che il difetto di massa possa essere usato per *misurare* l'energia di legame di un nucleo...

Riassumendo

- Rivediamo l'approccio che propongo per la seconda parte della relatività.
- Dinamica relativistica: riesame dei principi. *Il terzo principio non vale.*
 - *Espressioni relativistiche* di impulso ed energia cinetica. La velocità limite.
 - Relazione tra impulso ed energia: *l'invariante fondamentale*. Significato della massa.
 - *L'inerzia dell'energia*. Significato, dimostrazione, interpretazione.
 - Un concetto *inutile*: la cosiddetta “massa relativistica”. Non additività della massa.
 - Il *difetto di massa*: significato, esempi, ordini di grandezza.

Collegamenti (links)

[1] Indicazioni Nazionali:

http://www.sagredo.eu/PI-14-fismod/Liceo_Scientifico.pdf

[2] Syllabus:

<http://www.sagredo.eu/PI-14-fismod/Syllabus.pdf>

[3] Seminario al Congresso AIF 2008:

<http://www.sagredo.eu/articoli/fismod.pdf>

[4] Lezioni di Pisa:

<http://www.sagredo.eu/PI-14-fismod/Pisa-2014-fismod-n.pdf>

(n sta per il n. d'ordine della lezione).

Questa è una collocazione temporanea.

[5] Relatività:

<http://www.sagredo.eu/Q16>

(esiste anche la versione stampata).

[6] Esempio di seconda prova:

http://www.aif.it/ArchivioA/AIF_seconda_prova_di_fisica.pdf

[7] Sulla “addizione” delle velocità:

<http://www.sagredo.eu/articoli/addvel-2.pdf>

[8] Sul paradosso dei gemelli:

<http://www.sagredo.eu/divulgazione/relgem/relgem1.htm>

[9] Le “mie indicazioni nazionali”:

<http://www.sagredo.eu/varie/mie-indicazioni-short.pdf>

[10] Obiettivi dell'insegnamento della meccanica:

<http://www.sagredo.eu/varie/Pavia-2012-short.pdf>

[11] Il redshift gravitazionale

<http://www.sagredo.eu/varie/Ins-mod-rel-13-14-15.pdf>

[12] Come accorciarsi la vita di 23 ns in un weekend

<http://www.leapsecond.com/great2005/>

[13] Questa lezione:

<http://www.sagredo.eu/varie/Arezzo-2015.pdf>