E. Fabri *aprile 2023*

Sulla "metrica di Landau"

Oggetto

Voglio approfondire il significato delle cosiddetta "metrica di Landau" per il rif. rotante ([1] §90, problema). Nell'enunciato del problema si suggerisce di usare la (84.6):

$$dl^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k = -\left(g_{ik} - \frac{g_{0i}\, g_{0k}}{g_{00}}\right) dx^i\, dx^k \tag{1}$$

con $g_{\alpha\beta}$ definito da

$$c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = (c^2 - \omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\,\omega\, r^2\, dt\, d\varphi - dr^2 - r^2\, d\varphi^2 \tag{2}$$

(ho trascurato la coord. z). Abbiamo dunque

$$g_{tt} = c^2 - \omega^2 r^2 \qquad g_{t\varphi} = g_{\varphi t} = -\omega\, r^2 \qquad g_{rr} = -1 \qquad g_{\varphi\varphi} = -r^2. \tag{3}$$

Nota: Ho modificato i segni: [1] usa la segnatura $(-+++)$ mentre io preferisco $(+---)$.

Osservazione

Non è male sottolineare che la metrica (2) si riduce a una metrica lorentziana (detta anche minkowskiana) mediante una trasf. che interessa la sola coord. φ. Se si pone

$$\varphi = \psi - \omega\, t$$

si ottiene

$$c^2 d\tau^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2\, d\psi^2$$

che a parte l'uso di coord. cilindriche è la metrica di uno spazio-tempo *piatto*.

Naturalmente l'assenza di curvatura non viene alterata qualunque siano le coord. usate: anche calcolando il tensore di Riemann a partire dalla (2) lo si troverebbe nullo.

Calcoli

Da (1), (3)

$$\begin{aligned}
\gamma_{rr} &= -g_{rr} + \frac{g_{tr}^2}{g_{tt}} = 1 \\
\gamma_{r\varphi} &= -g_{r\varphi} + \frac{g_{tr}\, g_{t\varphi}}{g_{tt}} = 0 \\
\gamma_{\varphi\varphi} &= -g_{\varphi\varphi} + \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{tt}} = r^2 + \frac{\omega^2 r^4}{c^2 - \omega^2 r^2} = \frac{c^2 r^2}{c^2 - \omega^2 r^2}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$dl^2 = dr^2 + \frac{c^2 r^2}{c^2 - \omega^2 r^2}\, d\varphi^2. \tag{4}$$

Commento

Quando LL dice "tempo" intende la sottovarietà unidimensionale che ha per coordinata x^0 (nel nostro caso t). Questa coordinata è quella segnata da un orologio, che può essere qualsiasi, situato "in un dato punto dello spazio." La t scandisce univocamente il tempo; può solo marciare in modo arbitrario rispetto al tempo proprio, che infatti viene definito come

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \sqrt{g_{tt}}\, dt$$

per due eventi A,B aventi le stesse coord. spaziali (LL dicono "occurring in the same point of space").

Sempre in [1], §84, si osserva che la condizione $g_{00} > 0$ sebbene non necessaria perché la metrica (1) possa rappresentare uno spazio-tempo fisico, lo è se il dato sistema di coordinate deve essere realizzato con oggetti materiali (in particolare — aggiungo io — perché possano esistere orologi le cui linee orarie hanno costanti le coord. spaziali)

Quando LL dice "spazio" intende la sottovarietà che ha per coordinate le x^i ($i = 1, 2, 3$). Non ci sono maggiori spiegazioni. Mi sembra lecito aggiungere la condizione che tale sottovarietà sia di tipo spazio (ossia che tutti i vettori tangenti in ogni punto siano di tipo spazio.

Le sottovarietà che possono essere chiamate spazio sono quindi infinite, anche se si sceglie che debbano passare per un evento assegnato. Sembra ragionevole assumere che uno "spazio" sia definito fissando, per ogni terna (x^1, x^2, x^3) il valore di x^0. Nel nostro esempio assegnando quindi una funzione $t = f(r, \varphi)$ (al solito, tralascio z). Il che non garantisce che la sottovarietà sia di tipo spazio; bisogna anche richiedere la condizione sui vettori tangenti. Vedremo però che almeno nel nostro caso non ce n'è bisogno.

Un antiteorema

Dimostriamo ora il seguente "antiteorema":

Nello spazio-tempo definito dalla (2) *non esiste nessuno spazio avente la metrica* (4).

Dim.: Sostituiamo per dt nella (2) il differenziale di $f(r, \varphi)$:

$$dt = df = \frac{\partial f}{\partial r}\, dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\, d\varphi$$

$$
\begin{aligned}
c^2\, d\tau^2 = (c^2 - \omega^2 r^2) \left(\frac{\partial f}{\partial r}\, dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\, d\varphi \right)^2 - \\
2\, \omega\, r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r}\, dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\, d\varphi \right) d\varphi - dr^2 - r^2\, d\varphi^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Affinché la (5) cambiata di segno coincida con la (4) debbono essere soddisfatte tre condizioni:

$$(c^2 - \omega^2 r^2) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 = 0 \tag{6}$$

$$(c^2 - \omega^2 r^2)\, \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \omega\, r^2\, \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \tag{7}$$

$$(c^2 - \omega^2 r^2) \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2 - 2\, \omega\, r^2 \frac{\partial f}{\partial \varphi} = r^2 - \frac{c^2 r^2}{c^2 - \omega^2 r^2}. \tag{8}$$

L'ultma equivale a

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\omega\, r^2}{c^2 - \omega^2 r^2} \tag{9}$$

mentre la (6) equivale a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \tag{10}$$

col che anche la (7) è soddisfatta.

Però (9) e (10) sono incompatibili, come si vede derivando la prima rispetto a r e la seconda rispetto a φ; quindi la f non esiste e l'antiteorema è dimostrato. ■

Generalizzazione

Questo risultato ha validità più generale, nella forma di un secondo antiteorema:

In un generico spazio-tempo della RG non esiste nessuno spazio (nel senso inteso in questa nota) avente la metrica (1).

Dim.: Sostituiamo per dx^0 nella forma generica della (2) il differenziale di $f(x^1, x^2, x^3)$:

$$dx^0 = df = \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\, dx^3$$

$$c^2 d\tau^2 = g_{00} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\, dx^k \right)^2 + \left(g_{0k}\, \frac{\partial f}{\partial x^i} + g_{0i}\, \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i dx^k + g_{ij}\, dx^i dx^j$$

Questa è una forma quadratica nei dx^i che deve identificarsi con la (1) cambiata di segno:

$$g_{00}\, \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} + g_{0i}\, \frac{\partial f}{\partial x^k} + g_{0k}\, \frac{\partial f}{\partial x^i} + g_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{0i}\, g_{0k}}{g_{00}}$$

$$g_{00}\,\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial f}{\partial x^k} + g_{0i}\,\frac{\partial f}{\partial x^k} + g_{0k}\,\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{g_{0i}\,g_{0k}}{g_{00}} = 0. \tag{11}$$

Conviene riscrivere la (11) introducendo le abbreviazioni:

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad h_i = \frac{g_{0i}}{g_{00}}$$

$$f_i\,f_k + f_k h_i + f_i h_k + h_i\,h_k = 0$$

$$(f_i + h_i)(f_k + h_k) = 0. \tag{12}$$

La (12) deve valere per tutte le scelte di i e k, incluse $i = k$; quindi equivale a

$$\forall i\,\bigl(f_i = -h_i\bigr)$$

ossia al sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

che per essere risolubile deve soddisfare le condizioni di compatibilità

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\,\frac{g_{0i}}{g_{00}} = \frac{\partial}{\partial x^i}\,\frac{g_{0j}}{g_{00}} \quad \text{per} \quad i \neq j. \tag{13}$$

Queste condizioni non sono soddisfatte da una metrica generica. ∎

Verifica

Controlliamo sul caso (3), che ora è meglio completare con

$$g_{zz} = -1$$

(tutte le altre componenti sono nulle). Le (13) sono tre:

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\,\frac{g_{tr}}{g_{tt}}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{g_{tz}}{g_{tt}} = \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{g_{tr}}{g_{tt}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\,\frac{g_{tz}}{g_{tt}} = \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}}$$

di cui solo una è non banale:

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\omega r^2}{c^2 - \omega^2 r^2} = 0$$

ed è falsa.

Bibliografia

[1] Landau, Lifschitz: *The classical theory of fields.*