E. Fabri *maggio 2023*

Sul riferimento rigido rotante relativistico*

Premessa programmatica

Premetto che eviterò di confondere due problemi del tutto distinti:

1) la definizione ”operativa” di qualcosa che possa chiamarsi rif. rigido rotante
2) la possibile realizzazione di detto rif. con un “corpo rigido” in un senso che si avvicini a quello della meccanica classica; intendo occuparmi solo del primo punto.

A questo scopo cercherò di dare le prescrizioni per realizzare un rif. rigido rotante, inteso in un modo preciso. Penso a un sistema di corpi, piccoli, posti in una regione di spazio-tempo che si possa considerare piatta, che nel loro insieme in un dato rif. inerziale si possano ritenere in rotazione rigida uniforme attorno a un asse.

Con ”rotazione rigida uniforme” intendo questo:

a) ciascun corpo, visto dal dato rif. inerziale, si muove di moto circolare uniforme attorno all'asse

b) i corpi conservano tra loro distanze costanti nel tempo

c) (molto meno chiaro per ora) distanze e angoli soddisfano la geometria euclidea.

In alternativa a *c*):

c') si dimostri che le dette distanze e angoli non possono obbedire alla geometria euclidea e si enunci la geometria che risulta valida.

Naturalmente quando parlo di distanze e angoli debbo precisare “misurati come”; prima di tutto in quale rif.

Non mi curo dei mezzi tecnologici necessari per assicurare questi requisiti (motori, strumenti di misura di cui parlerò); mi basta verificare che niente violi le leggi fisiche che sappiamo valide nei rif. inerziali. (Debbo dire questo perché — come ho scritto più volte — della fisica valida nei rif. rotanti sappiamo ben poco, troppo poco; soprattutto non abbiamo praticamente fatti sperimentali.)

Primo esempio

Considero 7 corpi (O A B C D E F) disposti a formare un esagono regolare: O al centro, A ecc. ai vertici, in senso orario. (Naturalmente quando parlo di “corpi” si deve intendere in realtà capsule, sonde, o simili, dotate di tutta la strumentazione necessaria.)

* Versione 2.3: aggiunto lo studio di un generico n-gono rotante

Per formare un esagono regolare con dato centro occorre soddisfare due condizioni:

a) Che A … F abbiano tutti la stessa distanza da O. Questo si realizza mediante misure con metodo radar fatte da O. (Approfondirò più avanti come funziona il metodo radar su corpi in moto.)

b) Che le distanze AB, BC, ecc. siano tutte uguali. Non occorre che siano uguali alle distanze dal centro, anzi ciò potrebbe risultare impossibile; anche questo verrà discusso in seguito.

Per mezzo di manovre coi razzi di cui i corpi sono dotati, essi (escluso O) verranno posti in moto circolare uniforme attorno a O. Nel corso della manovra si dovrà assicurare che le condizioni *a*), *b*) siano mantenute. Non mi preoccupo di come si debba operare per garantire questo obiettivo; mi limito a supporre che si riesca a raggiungere una situazione stabile, al più corretta da deviazioni grazie a misure e a opportuni comandi ai razzi.

Misura radar su corpi in moto

Occorre considerare la situazione generica per includere il caso in cui non sia ancora stata raggiunta la configurazione ideale. La stazione centrale O emette un impulso radar *non direzionale* (al fine di poter raggiungere un corpo di cui non sono esattamente noti posizione e moto). Una volta ricevuta un'eco di ritorno, O commuta su un'antenna direzionale, in modo da poter determinare con precisione azimut del bersaglio e tempo di volo del segnale. Vediamo quantitativamente che cosa ci si aspetta in condizioni ideali.

Prese coord. cilindriche t, r, φ nel rif. inerziale K (la z è inutile) scelgo l'origine dei tempi all'istante in cui gli azimut di A … F sono 0, $\pi/3$ … $5\,\pi/3$. Allora a un generico istante t l'azimut di A sarà

$$\varphi_{\mathrm{A}} = \omega\, t$$

(con ω velocità angolare dei corpi periferici) mentre $r = R$. Per gli altri corpi le coord. si calcolano in modo del tutto analogo.

Se un segnale viene emesso da O a $t = t_{\mathrm{e}}$, l'antenna dovrà essere puntata a un azimut $\varphi_{\mathrm{e}} > \omega\, t_{\mathrm{e}}$ perché il segnale possa raggiungere A; i tempi di arrivo in A e di ritorno del segnale a O saranno $t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{er}}$, $t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{es}}$ e avremo

$$t_{\mathrm{er}} = R/c \qquad t_{\mathrm{es}} = 2\,R/c \qquad \varphi_{\mathrm{A}} = \omega\,(t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{er}}).$$

I segnali successivi per raggiungere B … F saranno intervallati di $\Delta t = \pi/(3\,\omega)$.

Si noti che t_{es} è il tempo di andata e ritorno misurato in O in corrispondenza alla distanza R; un generico tempo Δt starà a significare distanza $c\,\Delta t/2$.

Come andrebbero le cose se la misura fosse fatta da A? Possiamo rispondere, senza cambiare rif., al modo seguente. Siano E,R,S gli eventi "partenza del segnale," "arrivo del segnale," ritorno del segnale." Le loro coord. in K sono:

– $\mathrm{E} = (t_\mathrm{e},\, R,\, \omega\, t_\mathrm{e})$
– $\mathrm{R} = (t_\mathrm{e} + t_\mathrm{er},\, 0,\, ?)$
– $\mathrm{S} = (t_\mathrm{e} + t_\mathrm{es},\, R,\, \omega\,(t_\mathrm{e} + t_\mathrm{es}))$.

(il ? per la φ di R è dovuto al fatto che per $r = 0$ la φ è indeterminata).

Dobbiamo ora calcolare che cosa segna l'orologio A tra i due eventi E e S. Dato che la velocità di A è costante (in modulo) si ha

$$\tau = t/\gamma$$

dove $\gamma = \left(1 - \omega^2 R^2/c^2\right)^{-1/2}$ quindi

$$\tau_\mathrm{es} = \frac{1}{\gamma}\, t_\mathrm{es} = \frac{2R}{c\,\gamma}.$$

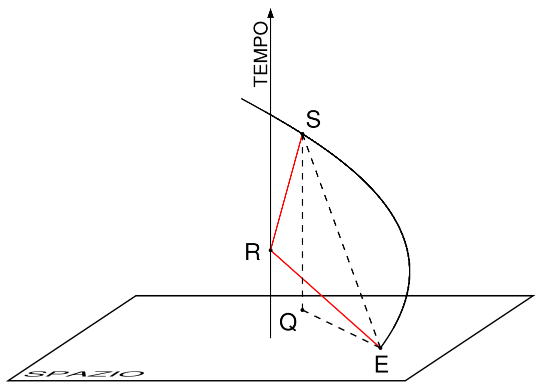
Commento 1

Il tempo t e tutti i tempi particolari (t_e, t_er, t_es) sono misurati con gli orologi sincronizzati del rif. K. Invece τ_es è il tempo tra gli eventi E, S, misurato da un orologio solidale con A.

Non è stato usato nessun "rif. rotante"; che i corpi A, B, … siano insieme in moto circolare uniforme attorno a O è determinato dalla regolazione dei razzi di cui sono dotati e dalle misure, non da qualche vincolo rigido. Tuttavia i detti corpi conservano distanze costanti se misurate da K e anche le distanze da uno all'altro, misurate con metodo radar sono costanti. Non c'è bisogno di fare il conto: deriva dal fatto che il moto in K è uniforme (la cosa non sarebbe più vera se ω variasse nel tempo).

Si vede che la distanza radar OA non è la stessa se la si misura con un orologio in O oppure con uno in A: è $c\,t_\mathrm{es}/2$ nel primo caso, $c\,\tau_\mathrm{es}/2$ nel secondo. La differenza non è che la semplice "dilatazione del tempo": per dirlo in modo alquanto criticabile, l'orologio in A va più lento, quindi segna un tempo minore.

Un modo di ragionare secondo me più corretto è indicato nella figura accanto (non in scala) in cui lo spazio è rappresentato con due sole dimensioni, sopprimendo la z. Si vede l'asse t, che è anche la curva oraria del punto O, e la curva oraria del punto A. E, R, S sono i tre eventi, le cui coord. temporali in K sono risp. t_e, t_r, t_s. Il vettore che dà la separazione spazio-temporale tra E e S è stato scomposto nella sua parte spaziale EQ e in quella temporale QS; la lunghezza di QS è $c\,t_\mathrm{es}$.



Il 4-vettore ES ha estremi le cui coord. spaziali coincidono con quelle di A alla partenza e all'arrivo del segnale. Secondo la metrica di Minkowski il quadrato della lunghezza di ES è la *differenza* dei quadrati di QS e di EQ, quindi ES < QS. Tuttavia l'intervallo τ_{es} è il tempo segnato dall'orologio fermo in A, che non si muove di moto rettilineo uniforme tra E e S, bensì di un moto circolare uniforme, la cui curva oraria è l'elica rappresentata in figura. La lunghezza $c\,\tau_{\mathrm{es}}$ dell'arco ES è *minore* di quella del segmento ES, secondo un teorema generale della geometria minkowskiana: a differenza della geom. euclidea in quella minkowskiana un segmento di tipo tempo ha lunghezza *maggiore* di qualunque arco di tipo tempo tra gli stessi estremi. Tutto questo spiega perché $\tau_{\mathrm{es}} < t_{\mathrm{es}}$: più esattamente, $\tau_{\mathrm{es}} = t_{\mathrm{es}}/\gamma$ perché la velocità in K dell'orologio ha modulo $v = \omega\, r$ costante.

Ho usato un orologio posto in A, e allo stesso modo potrei ragionare con B ecc. Non è richiesta (almeno per ora) alcuna sincronizzazione degli orologi in A … F; è però richiesto che gli orologi abbiano la stessa marcia, e questo si può verificare per mezzo dei segnali appena discussi. Anche se si tratta di orologi in moto rispetto a quello in O, sono comunque nella stessa situazione: velocità tutte uguali in modulo e trasversali rispetto alle congiungenti OA, OB, ecc. Quindi i fattori γ debbono risultare tutti uguali.

Distanze lungo l'esagono

Misuriamo ora le distanze AB, ecc. nei due versi. Il procedimento è analogo al precedente: per misurare AB partendo da A: emetto un segnale da A (evento E) che viene ricevuto in B (evento R) e rinviato verso A, dove viene ricevuto (evento S).

Occorre calcolare il tempo di R e quello di S, dato t_{e} per E. Per B abbiamo $r = R$, $\varphi_{\mathrm{B}} = \omega\, t - \pi/3$. Quindi al tempo t_{r}:

$$\mathrm{R} = (t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{er}},\, R,\, \omega\,(t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{er}}) - \pi/3).$$

Per il ritorno in A

$$\mathrm{S} = (t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{es}},\, R,\, \omega(t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{es}}))$$

(si noti che t_{er}, t_{es} hanno ora un significato diverso da prima). La distanza tra le posizioni di A al tempo t_{e} e B al tempo $t_{\mathrm{e}} + t_{\mathrm{er}}$, che è

$$\mathrm{AB} = 2\,R\,\sin[(\pi/3 - \omega\, t_{\mathrm{er}})/2] \tag{1}$$

deve uguagliare $c\, t_{\mathrm{er}}$:

$$2\,R\,\sin[(\pi/3 - \omega\, t_{\mathrm{er}})/2] = c\, t_{\mathrm{er}} \tag{2}$$

$$\xi = 2\,\beta\sin(\pi/6 - \xi). \tag{3}$$

con $\xi = \omega\, t_{\mathrm{er}}/2$ e $\beta = \omega R/(2\,c)$. La (3) andrebbe risolta rispetto a ξ, ma la soluzione non si può esprimere in termini finiti con funzioni elementari.

Per S si procede analogamente. La distanza tra le posizioni di B al tempo $t_\mathrm{e} + t_\mathrm{er}$ e A al tempo $t_\mathrm{e} + t_\mathrm{es}$ è

$$\mathrm{BA} = 2\,R\,\sin[(\pi/3 + \omega\,t_\mathrm{rs})/2] \tag{4}$$

e deve uguagliare $c\,t_\mathrm{rs}$:

$$2\,R\,\sin[(\pi/3 + \omega\,t_\mathrm{rs})/2] = c\,t_\mathrm{rs} \tag{5}$$

$$\eta = 2\,\beta\,\sin(\pi/6 + \eta). \tag{6}$$

con $\eta = \omega\,t_\mathrm{rs}/2$. Anche la soluzione della (6) non si esprime in termini finiti con funzioni elementari.

Possiamo risolvere (3) e (6) per iterazione: di ξ e η:

$$\xi = \beta\,(\cos\xi - q\,\sin\xi) \tag{7}$$

$$\eta = \beta\,(\cos\eta + q\,\sin\eta). \tag{8}$$

(ho posto $q = \sqrt{3}$ per comodità). Iteriamo la (7):

$$\xi = \beta\left(1 - q\,\xi - \tfrac{1}{2}\,\xi^2 + \tfrac{1}{6}\,q\,\xi^3 + \tfrac{1}{24}\,\xi^4 + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned}
&\xi = 0\\
&\xi = \beta\\
&\xi = \beta - q\,\beta^2\\
&\xi = \beta - q\,\beta\,(\beta - q\,\beta^2) - \tfrac{1}{2}\,\beta\,(\beta - q\,\beta^2)^2 =\\
&\qquad \beta - q\,\beta^2 + q^2\beta^3 - \tfrac{1}{2}\,\beta^3 = \beta - q\,\beta^2 + \left(q^2 - \tfrac{1}{2}\right)\beta^3.
\end{aligned}$$

η si ottiene semplicemente cambiando segno a q:

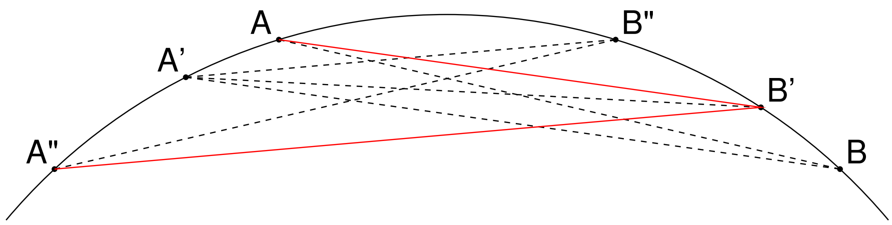
$$\eta = \beta + q\,\beta^2 + \left(q^2 - \tfrac{1}{2}\right)\beta^3$$

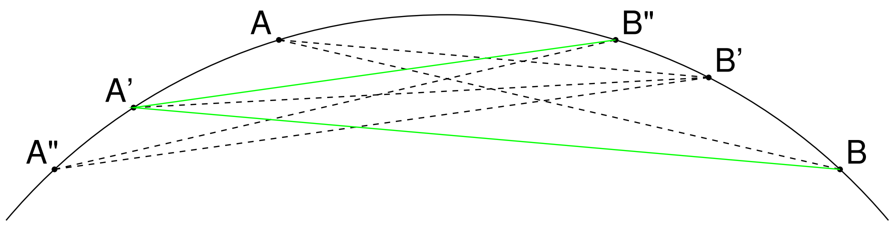
$$\xi + \eta = 2\,\beta + 5\,\beta^3.$$

Da qui finalmente, al secondo ordine in $\omega R/c$:

$$c\,t_\mathrm{es} = 2\,R + \frac{5\,\omega^2 R^3}{4\,c^2}.$$

È facile verificare che se si parte da B, mandando un segnale verso A e aspettando la riflessione, si trova lo stesso tempo. Conviene ragionare sulle figure. In entrambe sono indicate le posizioni dei punti A, B in tre istanti: t_e, t_r, t_s. La differenza è che nella figura superiore il segnale parte da A, raggiunge B (nella posizione B$'$, dopo un tempo t_er) e il segnale riflesso torna in A, dopo un tempo t_{rs} quando questo punto è arrivato in A$''$. I percorsi del segnale sono indicati in rosso. Nella figura inferiore invece il segnale (in verde) parte da B, raggiunge A in A$'$ dopo un tempo t_{er} (diverso dall'altro caso), poi torna in B (arrivato in B$''$) dopo un tempo t_{rs}, anche questo diverso dall'altro caso.





Soffermiamoci ora sulla prima figura. Il segmento AB$'$ è lungo $c\,t_{\mathrm{er}}$, mentre l'arco BB$'$ è lungo vt_{er} ($v = \omega R$), quindi

$$(\text{arco BB}')/(\text{seg. AB}') = v/c.$$

Il segmento B$'$A$''$ è lungo $c\,t_{\mathrm{rs}}$, mentre l'arco A$'$A$''$ è lungo vt_{rs}, quindi

$$(\text{arco A}'\text{A}'')/(\text{seg. B}'\text{A}'') = v/c$$

(la proporzione non è rispettata nella figura, per evidenziare la differenza tra gli archi BB$'$ e A$'$A$''$). La stessa idea è espressa nelle eq. (1), (2), (4), (5).

Passando alla seconda figura si hanno relazioni analoghe:

$$(\text{arco AA}')/(\text{seg. BA}') = v/c.$$

$$(\text{arco B}'\text{B}'')/(\text{seg. A}'\text{B}'') = v/c$$

e ne segue che AB$'$ della prima figura = A$'$B$''$ della seconda e lo stesso vale per B$'$A$''$ della prima e BA$'$ della seconda. Il che dimostra quanto già detto: i tempi t_{es} sono uguali nei due casi.

Questo t_{es} però è il tempo degli orologi fermi in K; per un orologio in A o in B c'è il solito fattore γ:

$$c\,\tau_{\mathrm{es}} = \frac{2\,R}{\gamma}\left(1 + \frac{5\,\omega^2 R^2}{8\,c^2}\right) = 2\,R\left(1 + \frac{\omega^2 R^2}{8\,c^2}\right)$$

(al secondo ordine). Se si assume (su che basi?) che la velocità della luce misurata da A sia c, ne risulta AB $> R$.

Osservazione: Trovo difficile spiegare questo risultato ragionando in un "rif. rotante."

Commento 2

Può sembrare strano che mentre per la distanza radiale si trova un risultato diverso a seconda che si faccia partire il segnale da O oppure da A, per la distanza tra vertici dell'esagono il risultato non cambia a seconda del verso.

La spiegazione è che nel primo caso si coinvolgono due orologi (in O e in A) che si trovano in posizioni non equivalenti, e che — col modo comune di esprimersi, che non condivido — marciano in modo diverso. Invece nel secondo caso si lavora con due vertici (A e B) dell'esagono che sono in posizioni equivalenti (si tenga anche presente che il moto dei punti A, B, ecc. è uniforme; quindi i tempi a cui si fanno le varie misure non possono avere influenza).

Ecco perché i tempi $t_{\rm er}$, $t_{\rm rs}$ della prima misura coincidono risp. coi tempi $t_{\rm rs}$, $t_{\rm er}$ della seconda.

Secondo esempio

Generalizzo il primo, passando da 7 corpi a $n+1$, quindi a un n-gono. Indicherò i vertici con $\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_n$. per quanto riguarda le misure di OA_1 ecc., non cambia niente; occupiamoci invece di $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$.

Le (1), (3) diventano

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = 2\,R \sin(\pi/n - \omega t_{\rm er}/2) \tag{9}$$

$$\xi = 2\,\beta \sin(\pi/n - \xi) \tag{10}$$

e analogamente per le (4), (6):

$$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1 = 2\,R\,\sin(\pi/n - \omega t_{\rm rs}/2) \tag{11}$$

$$\eta = 2\,\beta\,\sin(\pi/n + \eta). \tag{12}$$

Le (10), (12) si scrivono

$$\xi = \beta\,(p \cos\xi - q \sin\xi) \tag{13}$$

$$\eta = \beta\,(p \cos\eta + q \sin\eta). \tag{14}$$

con

$$p = 2\,\sin(\pi/n) \qquad q = 2\,\cos(\pi/n).$$

Iteriamo la (13):

$$\xi = \beta \left(p - q\,\xi - \tfrac{1}{2}\,p\,\xi^2 + \tfrac{1}{6}\,q\,\xi^3 + \tfrac{1}{24}\,p\,\xi^4 + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned}
\xi &= 0 \\
\xi &= p\,\beta \\
\xi &= p\,\beta - q\,\beta\,p\,\beta = p\,\beta - p\,q\,\beta^2 \\
\xi &= p\,\beta - q\,\beta\,(p\,\beta - p\,q\,\beta^2) - \tfrac{1}{2}\,p\,\beta\,(p\,\beta - p\,q\,\beta^2)^2 \\
&= p\,\beta - p\,q\,\beta^2 + p\,q^2\beta^3 - \tfrac{1}{2}\,p^3\beta^3 = \\
&= p\,\beta - p\,q\,\beta^2 + p\left(q^2 - \tfrac{1}{2}\,p^2\right)\beta^3 \\
&= p\,\beta - p\,q\,\beta^2 + 4\,p\left(1 - \tfrac{3}{8}\,p^2\right)\beta^3
\end{aligned}$$

$$\eta = p\,\beta + p\,q\,\beta^2 + 4\,p\left(1 - \tfrac{3}{8}\,p^2\right)\beta^3$$

$$\xi + \eta = 2\,p\,\beta + 8\,p\left(1 - \tfrac{3}{8}\,p^2\right)\beta^3 = 2\,p\,\beta\left[1 + 4\left(1 - \tfrac{3}{8}\,p^2\right)\beta^2\right]. \qquad (15)$$

Sostituiamo in (15) le espressioni per β, ξ, η, p:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega\,(t_{\mathrm{er}} + t_{\mathrm{rs}}) = \frac{2\,\omega\,R}{c}\,\sin\frac{\pi}{n}\left[1 + \left(1 + \tfrac{3}{2}\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{\omega\,R}{c}\right)^2\right]$$

$$n\,c\,t_{\mathrm{es}} = 4\,n\,R\,\sin\frac{\pi}{n}\left[1 + \left(1 + \tfrac{3}{2}\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{\omega\,R}{c}\right)^2\right]$$

$$n\,c\,\tau_{\mathrm{es}} = \frac{4\,n\,R}{\gamma}\,\sin\frac{\pi}{n}\left[1 + \left(1 + \tfrac{3}{2}\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{\omega\,R}{c}\right)^2\right].$$

Questo è il doppio del perimetro dell'n-gono; passando al limite per $n \to \infty$

$$2\,L = \frac{4\pi R}{\gamma}\left[1 + \left(\frac{\omega\,R}{c}\right)^2\right] = 4\pi R\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\omega\,R}{c}\right)^2\right]$$

$$L = 2\,\pi\gamma R \qquad (16)$$

dove L è la misura, fatta da A_1, della lunghezza della circonferenza, a meno di termini in β^4.

Commento 3

Non va dimenticato che la (16) è stata dedotta assumendo che la velocità di andata e ritorno della luce, misurata da A_1, sia c. D'altra parte si tratta del limite $n \to \infty$, e in questo limite si può prendere la misura in A_1 come misura nel rif. inerziale tangente; quindi non dovrebbero esservi dubbi.