Il PR come teorema

Ho ricordato nel cap. prec. che nella meccanica newtoniana il PR è un teorema. Vediamone ora la dimostrazione.

Teorema: Se le forze agenti fra corpi distinti dipendono solo dalle distanze e dalle velocità relative, allora il moto è lo stesso in ogni RI.

Prima di tutto precisiamo l'enunciato. Abbiamo un sistema di punti materiali tra i quali agiscono forze $\vec{F}_{ik}$ che dipendono solo dalla distanze $|\vec{r}_i - \vec{r}_k|$ e dalle velocità relative $\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_k$. In un dato RI, diciamo K, vale la seconda legge della dinamica, che si scrive nella forma di un sistema di equazioni differenziali:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k\neq i} \vec{F}_{ik}. \qquad (0\text{–}8)$$

Queste determinano completamente il moto, una volta assegnate le condizioni iniziali a un istante t_0:

$$\vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{i0}, \quad \dot{\vec{r}}_i(t_0) = \vec{v}_{i0}. \qquad (0\text{–}9)$$

Indichiamo dunque con $\vec{r}_i(t)$ la soluzione delle (0–8) con le condizioni iniziali (0–9).

Si tratta di dimostrare che se si passa a un nuovo RI, diciamo K$'$, e si studia il moto che ha in K$'$ *le stesse condizioni iniziali* (0–9), *esso si svolge ancora con la legge oraria* $\vec{r}_i(t)$.

Per dimostrarlo, consideriamo in K il moto di legge oraria

$$\vec{\varrho}_i(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{r}_0(t)$$

dove $\vec{r}_0(t)$, dato dalla (0–1), esprime il moto di K$'$ rispetto a K. Si vede subito che anche $\vec{\varrho}_i(t)$ soddisfa le (0–8). Infatti il primo membro rimane lo stesso, perché il termine $\vec{r}_0(t)$ si cancella nella derivata seconda; quanto al secondo membro, basta osservare che $\vec{\varrho}_i - \vec{\varrho}_k = \vec{r}_i - \vec{r}_k$, e così pure $\dot{\vec{\varrho}}_i - \dot{\vec{\varrho}}_k = \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_k$: quindi anche le forze sono le stesse.

Osserviamo che sono invece diverse le condizioni iniziali:

$$\vec{\varrho}_i(t_0) = \vec{r}_{i0} + \vec{r}_0(t_0), \quad \dot{\vec{\varrho}}_i(t_0) = \vec{v}_{i0} + \vec{u}.$$

Trasformando il moto $\vec{\varrho}_i$ da K a K$'$ otteniamo:

$$\vec{\varrho}_i'(t) = \vec{r}_i(t) \qquad (0\text{–}10)$$

$$\vec{\varrho}_i'(t_0) = \vec{r}_i(0), \quad \dot{\vec{\varrho}}_i'(t_0) = \vec{v}_i(0). \qquad (0\text{–}11)$$

Le (0–10), (0–11) mostrano che se s'impongono rispetto a K$'$ le stesse condizioni iniziali che si erano inizialmente poste in K, si ottiene lo stesso moto; e questa è appunto la tesi del teorema, che è quindi dimostrato.