CAPITOLO 20

Sorgenti di onde gravitazionali

Dobbiamo ora occuparci dell'emissione di onde gravitazionali, per collegarla alle caratteristiche dinamiche delle sorgenti. Potremo così discutere quali siano le sorgenti astrofisiche di onde e la relativa potenza; avremo allora i dati per esaminare le possibilità di rivelazione.

Una teoria completa dell'emissione di onde gravitazionali occuperebbe troppo spazio nell'economia del corso; ci limiteremo dunque a un ragionamento analogico, basato su risultati noti per le onde e.m. Ricordiamo un'espressione per il campo di radiazione e.m. emesso da una distribuzione di cariche:

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R} \left\{ \left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{n} \right) \times \vec{n} + \left(\dddot{\vec{q}} \times \vec{n} \right) \times \vec{n} + \vec{n} \times \ddot{\vec{\mu}} \right\} \tag{20–1}$$

L'espressione (20–1) dà i primi termini di uno sviluppo in multipoli: R è la distanza tra sorgente e osservatore, $\vec{n}$ il vettore unitario nella direzione di $\vec{R}$. I vettori $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{\mu}$ sono così definiti:

$$\vec{p} = \sum_a e_a \vec{r}_a$$

è il *momento di dipolo elettrico*; $\vec{q}$ è dato in termini del *momento di quadrupolo elettrico* Q^{ij} come segue:

$$q^i = \frac{1}{2c} Q^{ij} n_j$$

e infine il *momento di dipolo magnetico* è

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a.$$

Dalla (20–1) si calcola subito la luminosità e.m., ossia la potenza irraggiata:

$$L_{\text{em}} = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{p}} \right|^2 + \frac{1}{20c^5} \dddot{Q}^{ij} \dddot{Q}_{ij} + \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{\mu}} \right|^2 \tag{20–2}$$

dalla quale si vede che i termini di dipolo elettrico, di quadrupolo elettrico e di dipolo magnetico danno contributi additivi alla luminosità totale (integrata su tutte le direzioni).

Nota: In tutte le formule che precedono, come nelle successive, gli indici vengono alzati e abbassati con la metrica euclidea, quindi senza problemi di segno.

Dobbiamo ora trasportare tutte le relazioni viste, e in particolare la (20–2), al caso gravitazionale. È ovvio che si potranno introdurre anche in questo caso i diversi momenti di multipolo, con la sola sostituzione delle masse alle cariche. Abbiamo quindi in primo luogo

$$\vec{p} = \sum_a m_a \vec{r}_a$$

e si vede che $\ddot{\vec{p}} = 0$ per la conservazione della quantità di moto. Analogamente

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a$$

e questa volta è già $\dot{\vec{\mu}} = 0$ (conservazione del momento angolare).

Resta quindi solo il termine di quadrupolo "elettrico," la cui definizione è

$$Q^{ij} = \sum_a m_a (x_a^i x_a^j - \tfrac{1}{3} r_a^2 \, \delta^{ij}).$$

Come si vede, il momento di quadrupolo è la parte a traccia nulla del tensore d'inerzia. Al posto della (20–2) la RG fornisce, se usiamo le unità geometriche ($c = 1$, $G = 1$),

$$L_{\mathrm{grav}} = \tfrac{1}{5} \, \langle \dddot{Q}^{ij} \dddot{Q}_{ij} \rangle \tag{20–3}$$

dove $\langle \ldots \rangle$ indica una media temporale. Anche la (20–3) è valida se sono trascurabili i multipoli di ordine superiore.

È bene non dimenticare che la (20–3), come del resto la (20–2), è approssimata: può dare un risultato utile solo quando le dimensioni del sistema sono piccole rispetto alla lunghezza della radiazione emessa, oppure — il che è lo stesso — quando le velocità sono piccole. Inoltre la (20–3) è valida in approssimazione di campo debole, con le ulteriori limitazioni che ciò comporta per i rapporti M/R nel sistema che emette.

La trasformazione della (20–3) alle unità consuete richiede d'introdurre la giusta combinazione di potenze di c e di G. A questo scopo osserviamo che $\dddot{Q}$ ha esattamente le dimensioni di una potenza (luminosità), e che quindi la (20–3) va divisa per una luminosità. Con c e G si può costruire una sola grandezza con le giuste dimensioni:

$$L_0 = \frac{c^5}{G} = 3.6 \cdot 10^{59} \, \mathrm{erg/s}$$

per cui la (20–3) diventa

$$L_{\mathrm{grav}} = \frac{G}{5c^5} \, \langle \dddot{Q}^{ij} \dddot{Q}_{ij} \rangle.$$

Ordini di grandezza

Per avere un'idea degli ordini di grandezza in gioco, conviene anzitutto osservare che L_0 è pari alla luminosità di almeno 10^{15} delle più grandi galassie conosciute.

È anche utile un'interpretazione semiqualitativa di $\dddot{Q}$, per un sistema di masse che si muova di moto periodico (come ad es. una stella binaria). Il tensore d'inerzia avrà un ordine di grandezza pari al prodotto della massa del sistema per il quadrato del suo diametro: MR^2. La derivata terza richiederà di dividere per la terza potenza del periodo; quindi $\dddot{Q} \sim MR^2/T^3$. Ma R/T dà una tipica velocità del moto, e si arriva a $\dddot{Q} \sim Mv^2/T$. Poiché Mv^2 è l'energia cinetica del sistema, abbiamo $\dddot{Q} \sim E_{\text{cin}}/T$. Il significato di E_{cin}/T è il seguente: l'energia cinetica è localizzata, a un certo istante, là dove si trovano le masse. Nel corso del moto queste si spostano, cambiando completamente posizione in un tempo dell'ordine di T. Dunque E_{cin}/T misura la potenza del trasporto di energia interno al sistema, e possiamo chiamarla L_{int}. Concludendo: la (20–3) ci dice che la potenza irraggiata è dell'ordine del quadrato della potenza interna:

$$L_{\text{grav}} \sim L_{\text{int}}^2$$

dove è inteso che le luminosità sono misurate in unità L_0.

Procediamo con la stima degli ordini di grandezza: in un sistema legato gravitazionalmente l'energia cinetica è dello stesso ordine dell'energia potenziale, e possiamo stimarla come M^2/R. D'altra parte la terza legge di Keplero ci dice che $R^3 \sim MT^2$. Eliminando T:

$$L_{\text{grav}} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^5. \tag{20–4}$$

La (20–4) mostra che la radiazione gravitazionale cresce molto rapidamente col rapporto M/R, che è necessariamente minore di 1, e anzi molto minore salvo casi estremi. Ricordiamo infatti che qui M è misurato in unità di lunghezza, e perciò $M \gtrsim R$ corrisponderebbe a un buco nero. A titolo di esempio, per due stelle di massa solare, a distanza di un'unità astronomica, $M/R \simeq 10^{-8}$, che porta a $L_{\text{grav}} \sim 10^{-40}\,L_0 \simeq 10^{19}\,\text{erg/s} \simeq 10^{-14}L_\odot$. Basta però passare a $M/R \simeq 10^{-5}$ per trovare $L_{\text{grav}} \simeq 10\,L_\odot$.

Gli eventi dai quali ci si può aspettare una radiazione gravitazionale osservabile sono:

- le esplosioni di supernovæ e meglio ancora il conseguente collasso gravitazionale del nucleo a formare un buco nero
- la fusione di un sistema binario stretto (stelle di neutroni, buchi neri) le cui componenti si avvicinano a causa della perdita di energia per onde gravitazionali (v. dopo).

Le antenne in costruzione, come quelle già realizzate, mirano a rivelare questi oggetti. Per avere un'apprezzabile frequenza degli eventi occorre poterli rivelare anche se avvengono in altre galassie.

Caso di un sistema binario

L'emissione di onde gravitazionali comporta perdita di energia del sistema. Vediamone le conseguenze osservabili, pensando per semplicità a un sistema binario composto di due masse uguali m. Sappiamo che l'energia dipende solo dal semiasse maggiore dell'orbita relativa, e dalle masse:

$$E = -\frac{m^2}{8a}.$$

Perciò una variazione di E comporta una variazione di a:

$$\frac{dE}{E} = \frac{da}{a}.$$

Essendo $dE/dt \propto -(m/a)^5$, ne segue

$$\frac{da}{dt} \propto -\left(\frac{m}{a}\right)^3$$

e usando la relazione di Keplero $a^3 \propto m T^2$:

$$\frac{dT}{dt} \propto -\left(\frac{m}{a}\right)^{5/2} \propto -\left(\frac{a}{T}\right)^5 \propto -\left(\frac{m}{T}\right)^{5/3}.$$

Si vede che tanto il semiasse quanto il periodo decrescono nel tempo, e questi potrebbero essere effetti osservabili. Entrambi vanno come una potenza di m/a, che sarà bene prendere il più grande possibile. La sola speranza è quindi un sistema binario formato da oggetti compatti (come le stelle di neutroni) che possono stare a distanze non troppo più grandi del loro raggio di Schwarzschild.

La più bella conferma della RG negli ultimi 30 anni è senza dubbio quella costituita dai sistemi binari di stelle di neutroni, di cui vogliamo ora occuparci. Tra l'altro questi sistemi hanno fornito la prima evidenza dell'esistenza delle onde gravitazionali.

Le pulsar

La storia comincia nel 1974, quando R.A. Hulse e J.H. Taylor scoprono una pulsar con caratteristiche peculiari. Dal punto di vista osservativo il termine "pulsar" (abbreviazione di "pulsating radio source") designa una radiosorgente che viene ricevuta in forma di brevissimi impulsi regolarmente spaziati, in genere con un intervallo dell'ordine del secondo o frazione. Pulsar sono note fin dagli anni '60; la più famosa è quella che si trova al centro della nebulosa del Granchio, residuo della supernova del 1054; il suo periodo è di soli 33 ms.

La brevità del periodo di pulsazione fornisce già indicazioni sulla natura dell'oggetto, se si considera che in 33 ms la luce percorre 10 000 km. Anche una nana bianca è troppo grande, e tra gli oggetti che abbiamo fin qui incontrato il solo candidato possibile è una stella di neutroni.

Proviamo a stimare il periodo di rotazione di una stella di neutroni che abbia la massa e il momento angolare del Sole, ma raggio intorno a 10 km, come si legge in fig. 13–3. Se facciamo il semplice modello che la stella risulti dalla compressione in scala della materia solare, a una riduzione di un fattore $7 \cdot 10^4$ nel raggio corrisponderà una riduzione di un fattore $5 \cdot 10^9$ del momento d'inerzia, quindi un corrispondente aumento della velocità angolare. Partendo dal periodo del Sole (circa 27 giorni) si arriva a meno di 0.5 ms, il che mostra che i periodi osservati sono perfettamente compatibili con l'ipotesi che si tratti di una stella di neutroni, residuo collassato dell'esplosione di una supernova.

Resta da spiegare il meccanismo di emissione della radiazione. A questo scopo si consideri che ogni stella ha un campo magnetico, con l'andamento di un dipolo, e che anche questo viene compresso durante il collasso (si conserva il flusso, mentre l'area diminuisce). Ci si deve dunque aspettare che una stella di neutroni abbia un intenso campo magnetico polare, anche se — come accade per la Terra — la direzione dei poli magnetici in generale non coinciderà esattamente con quella dell'asse di rotazione.

Inoltre i neutroni della stella non sono tutti stabili: nelle considerazioni del Cap. 13 abbiamo trascurato le differenze di densità tra centro e superficie, nel senso che abbiamo supposto che la densità fosse sempre sufficiente a imporre la completa neutronizzazione. Ma questo non può essere vero in superficie, dove perciò i neutroni decadono, e gli elettroni emessi possono sfuggire, con alta energia. Attraversando il forte campo magnetico polare, questi elettroni emettono radiazione di sincrotrone, concentrata nella direzione del loro moto e molto più intensa dove il campo è più forte, ossia nelle regioni dei poli magnetici.

Risultato: la stella emette una radiazione fortemente direzionale, nella direzione dei poli magnetici. Dato che la stella ruota, questa direzione spazza un cono nello spazio. Se accade che la Terra si trovi in prossimità del cono, verrà ricevuto un picco di radiazione per il breve tempo in cui sussiste l'allineamento, e il picco si ripeterà col periodo di rotazione della stella.

È da tener presente che la stella emette energia, a spese della sua energia cinetica: quindi il periodo della pulsar dovrà lentamente aumentare (e la frequenza degli impulsi dovrà diminuire).

La pulsar B1913+16

Quella scoperta da Hulse e Taylor è nota come B1913+16, che è solo una denominazione convenzionale in un catalogo di pulsar. Vediamo alcune delle sue caratteristiche osservative:

– periodo degli impulsi: circa 59 ms
– variazione della frequenza: $-2.47583(2) \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s}^{-2}$

Fin qui niente di strano. Osserviamo solo due cose:

– la frequenza è circa 17 Hz, e il fatto che la sua variazione sia dell'ordine di $10^{-15}\,\mathrm{s}^{-2}$ e sia data con un errore sulla sesta cifra, dà un'idea di quanto sia precisa la misura di frequenza
– la variazione di frequenza è così piccola da mettere la pulsar sullo stesso piano di un orologio atomico: infatti era stato proposto di usare le pulsar come campioni di tempo, prima che i recenti sviluppi degli orologi atomici a fontana di cesio dessero a questi un nuovo vantaggio.

È il caso di accennare che misure di così elevata precisione richiedono da un lato tecniche sperimentali e di analisi dei dati della più alta sofisticazione, ma anche che si tenga conto di una quantità di effetti sulla propagazione della radiazione dalla pulsar a noi. Tra questi effetti va ricordata ad es. la dispersione causata dal plasma interstellare, che può essere corretta osservando gli impulsi su diverse frequenze.

Ci sono poi effetti di RG, nella propagazione degli impulsi nel sistema solare. C'è il ritardo gravitazionale, di cui abbiamo parlato nel Cap. 7 (anche il ritardo dovuto ai pianeti può essere tutt'altro che trascurabile). Ma soprattutto occorre tener conto che i tempi vengono misurati con un orologio solidale alla Terra: a parte il moto della Terra, che cambia la sua velocità e la distanza dal Sole, contano anche i campi gravitazionali di tutti gli altri pianeti.

Un'accurata valutazione di tutte le influenze rilevanti riesce estremamente complessa, ma solo dopo averla portata a termine è possibile dare i risultati delle osservazioni con le cifre significative che si sono viste sopra.

Variazioni periodiche

Però non c'è solo una diminuzione regolare della frequenza degli impulsi, come ci si aspetta causa la dissipazione di energia dovuta all'emissione di radiazione elettromagnetica. Si nota anche una variazione periodica:

– periodo della variazione: 27906.9807804(6) s (si noti di nuovo il numero di cifre significative)
– ampiezza relativa della variazione: circa 10^{-3} (vedremo fra poco perché non ha senso dare più cifre).

L'interpretazione più ovvia è che si tratti di un effetto Doppler, derivante dal moto orbitale della stella in un sistema binario. Siamo quindi in una situazione ben nota dall'astronomia classica: quella di una *binaria spettroscopica* in cui sia visibile solo lo spettro di una componente del sistema. Dal periodo orbitale, tramite la terza legge di Keplero, si ricava il valore dell'espressione $a^3(m_1+m_2)^2/m_2^3$, dove a è il semiasse maggiore dell'orbita della componente visibile attorno al centro di massa, m_1, m_2 sono le masse delle due componenti. Dalla grandezza dell'effetto Doppler osservato si ricava invece il *semiasse proiettato* $a' = a \sin i$ dove i è l'inclinazione dell'orbita sul "piano del cielo," perpendicolare alla direzione di osservazione.

Assumendo che le masse siano dell'ordine di quella del Sole, risulta $a \simeq 2 \cdot 10^6$ km: poco più del diametro del Sole. Dall'andamento dettagliato della variazione di frequenza si può anche ricavare l'eccentricità dell'orbita, che è alta: $e \simeq 0.62$. Perciò la distanza minima fra le due stelle è meno di $8 \cdot 10^5$ km.

Non si può trattare altro che di un sistema di due stelle di neutroni (di cui solo una è visibile come pulsar).

B1913+16 come "laboratorio" di RG

Fin qui abbiamo ragionato come se per il sistema binario valesse la meccanica newtoniana; ma il sistema è così stretto che la meccanica newtoniana può essere usata solo come prima, grossolana approssimazione.

Per cominciare, considerando i dati appena visti si capisce che in realtà la variazione di frequenza non è solo dovuta all'effetto Doppler: esiste anche un significativo redshift gravitazionale nel campo dell'altra stella. A conti fatti, la variazione relativa di frequenza tra apoastro e periastro (massima e minima distanza) è circa $3 \cdot 10^{-5}$. Né si può trascurare l'effetto di ritardo.

Inoltre lo studio dettagliato del moto orbitale evidenzia un notevole spostamento del periastro, nella misura di $4.226621(11)\,^\circ$/anno. Sappiamo che il moto del periastro è previsto dalla RG; mettendolo insieme al redshift gravitazionale, e confrontando con le previsioni teoriche, si arriva a determinare tutti i parametri del sistema. In particolare, le masse delle due stelle:

$$m_1 = 1.4410(5)\,M_\odot, \qquad m_2 = 1.3784(5)\,M_\odot.$$

Il semiasse maggiore proiettato vale $2.3417592(19)$ s, mentre $e = 0.6171308(4)$. Per il semiasse vero si ha $a = 1.947 \cdot 10^6$ km (molto vicino, come si vede, alla stima iniziale).

Il forte spostamento del periastro spiega perché non avesse senso dare in modo più preciso l'effetto Doppler sul periodo della pulsar. Dato che l'orbita è fortemente eccentrica, la velocità varia molto lungo l'orbita (al periastro arriva a $0.0014\,c$). D'altra parte sull'effetto Doppler influisce solo la componente nella direzione di osservazione, e si vede che l'intervallo in cui essa varia cambia notevolmente con l'orientazione dell'orbita.

Radiazione gravitazionale

Le osservazioni del sistema, prolungate nel tempo, mostrano un altro fatto: il periodo orbitale non è costante, ma decresce lentamente:

$$\dot{T} = -2.422(6) \cdot 10^{-12}.$$

Come si vede la diminuzione è assai lenta, ma ben misurabile data l'altissima precisione con cui il periodo è noto. Una diminuzione del periodo orbitale si deve accompagnare a una diminuzione del semiasse e quindi a una perdita di energia del sistema, che si valuta in

$$\dot{E} \simeq -5.6 \cdot 10^{31}\,\mathrm{erg/s} \qquad (20\text{–}1)$$

contro un'energia totale di $-9.67 \cdot 10^{47}\,\mathrm{erg}$.

Non si vede altro meccanismo per questa perdita di energia, se non l'emissione di onde gravitazionali. La perdita di energia per radiazione prevista dalla RG nell'approssimazione di quadrupolo (sufficiente per questo caso) è stata studiata da diversi autori e risulta

$$\dot{E} = -\frac{32}{5}\,\frac{G^4\,m_1^2\,m_2^7}{c^5 a^5 (m_1 + m_2)^4}\,\frac{1 + 73\,e^2/24 + 37\,e^4/96}{(1 - e^2)^{7/2}}.$$

Si noti la forte dipendenza dall'eccentricità, e l'apparente asimmetria tra le due masse. In realtà l'espressione sarebbe simmetrica, se si usasse non il semiasse dell'orbita di m_1, ma quello del moto relativo.

È dunque possibile un confronto teoria-osservazioni. Questo, condotto nell'arco di oltre 20 anni, ha dato il seguente risultato: 1.0032 ± 0.0035. Nel 1993 Hulse e Taylor hanno ricevuto il Nobel per la fisica.

Si può sperare di rivelare questa radiazione con un'antenna? Possiamo valutare il flusso che arriva sulla Terra in base alla (20–1) e alla distanza, stimata in 5 kpc, se per semplicità supponiamo che la radiazione sia emessa in modo isotropo (il che certo non è, ma può darci l'ordine di grandezza). Avremo $S = |\dot{E}|/(4\pi D^2)$, che possiamo combinare con la (19–13) per calcolare l'ampiezza a dell'onda (da non confondere col semiasse, indicato fin qui con lo stesso simbolo!).

Il risultato è:

$$a^2 = \frac{G}{2\pi^2 c^3}\,\frac{|\dot{E}|}{D^2}\,T^2$$

(occorre tener presente che la frequenza emessa, trattandosi di quadrupolo, è doppia di quella del moto orbitale). A conti fatti, si trova $a \simeq 4 \cdot 10^{-22}$, quindi molto superiore alla soglia che abbiamo data per VIRGO. C'è però da tener presente che la frequenza è parecchio più bassa (6 ordini di grandezza) e che il rumore sismico cresce assai rapidamente andando a frequenze così basse.

Visto che le antenne terrestri sono intrinsecamente inadatte alle basse frequenze, è stato proposto di realizzare un sistema interferometrico (LISA) interamente basato su satelliti, distanti tra loro qualche milione di km.

Appendice: dati su B1913+16

Fonti: *Europhysics News*, Nov. 93 e *Princeton Pulsar Catalog*

- Scoperta: estate 1974
- Periodo della pulsar: 0.059029997929613(7) s
- Potenza radio: 0.7 mJy a 1.4 GHz
- Variazione della frequenza: $-2.47583(2) \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s}^{-2}$
- Derivata del periodo: $8.62713(8) \cdot 10^{-18}$
- Periodo orbitale: 27906.9807804(6) s
- Semiasse maggiore proiettato: 2.3417592(19) s
- Eccentricità: 0.6171308(4)
- Avanzamento del periastro: 4.226621(11) °/anno
- Derivata del periodo orbitale: $-2.422(6) \cdot 10^{-12}$
- Masse delle componenti: $m_1 = 1.4410(5)\,M_\odot$, $m_2 = 1.3784(5)\,M_\odot$
- Rapporto osservazione/teoria per $\dot{P}$: 1.0032 ± 0.0035
- Semiasse (calcolato dai dati prec.): 3.175(1) s
- Velocità orbitale max (calcolata dai dati prec.): 440 km/s