CAPITOLO 18

Approccio moderno ai test cosmologici

Negli ultimi anni le osservazioni interessano sempre più sorgenti ad alto redshift (fino a 4 e più), mentre allo stesso tempo si sono escogitati tutta una serie di possibili confronti fra teoria e osservazione. La situazione è piuttosto complicata e in continua evoluzione, per cui non ha senso descriverla in dettaglio: dedicheremo il capitolo all'impostazione generale comune a diversi metodi, e a una descrizione più dettagliata di due di questi.

Conviene introdurre, per semplificare le notazioni, il *parametro di scala*: $a = R/R_0$ (rapporto fra il raggio a un tempo generico e quello attuale (al tempo presente $a = 1$). La relazione (16–9) col redshift diventa allora

$$1 + z = \frac{1}{a}. \tag{18–1}$$

Riprendiamo poi la (17–12), distinguendo due contributi a Ω: quello Ω_m dovuto alla materia fredda e quello Ω_r dovuto alle particelle ultrarelativistiche. La ragione è che, come sappiamo, è diversa la loro evoluzione in funzione di R, dato che $\varrho_\mathrm{m} \propto R^{-3}$ mentre $\varrho_\mathrm{r} \propto R^{-4}$. Sopprimeremo per brevità l'indice $_0$, restando inteso che tutti gli Ω indicano i valori attuali. Dunque

$$\Omega_\mathrm{r} + \Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{k} + \Omega_\Lambda = 1. \tag{18–2}$$

È allora facile vedere che la (17–10) si può scrivere

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\Omega_\mathrm{r} a^{-4} + \Omega_\mathrm{m} a^{-3} + \Omega_\mathrm{k} a^{-2} + \Omega_\Lambda\right)$$

ossia

$$\frac{\dot a}{a} = H_0\, E(a) \tag{18–3}$$

dove la funzione $E(a)$ è definita da

$$E(a) = \left(\Omega_\mathrm{r} a^{-4} + \Omega_\mathrm{m} a^{-3} + \Omega_\mathrm{k} a^{-2} + \Omega_\Lambda\right)^{1/2}. \tag{18–4}$$

La (18–2) mostra che $E(1) = 1$. Dalla (18–3) si ricava

$$dt = \frac{1}{H_0}\,\frac{da}{a\,E(a)}. \tag{18–5}$$

Nella propagazione radiale della luce (che, come sappiamo, non è una restrizione) vale $dt = R\,d\chi = R_0\,a\,d\chi$; quindi la *distanza attuale* l_a di una sorgente da cui la luce è partita al tempo t, quando il parametro di scala valeva a, è

$$l_\mathrm{a} = R_0\,\chi = \int\limits_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \frac{1}{H_0} \int\limits_a^1 \frac{da'}{a'^2 E(a')}.$$

Ma possiamo anche usare come variabile indipendente z, grazie alla (18–1):

$$l_\mathrm{a} = \frac{1}{H_0} \int\limits_0^z \frac{dz'}{E_1(z')}. \tag{18–6}$$

Questa è la relazione generale *redshift–distanza.* La funzione $E_1(z)$ è definita da $E_1(z) = E(a)$ con a e z legati dalla (18–1).

La relazione flusso-redshift

Si può mettere la relazione tra redshift e distanza in un'altra forma, più direttamente connessa con dati osservabili. Consideriamo una sorgente avente luminosità *assoluta* L (con ciò s'intende la potenza totale irraggiata nel proprio riferimento locale di quiete). Vogliamo conoscere il *flusso* che ci arriva da quella sorgente, supponendo di conoscerne (per ora) la distanza, ossia χ. (Per flusso intendiamo la potenza ricevuta per unità di superficie del rivelatore.)

Dall'espressione (17–1) della metrica di R–W si trova l'area attuale della sfera centrata nella sorgente e passante per l'osservatore: $A = 4\pi R_0^2 \Sigma^2$. Si può dunque calcolare il flusso come L/A? No, perché la radiazione ricevuta è indebolita, a causa dell'espansione, per due effetti: il redshift cosmologico sui singoli fotoni, e il ridotto ritmo di arrivo di questi (si veda la discussione analoga fatta, per la sorgente in caduta libera, al Cap. 8). Entrambi gli effetti riducono il flusso per un fattore $1 + z$; quindi l'espressione corretta è

$$F = \frac{L}{4\pi R_0^2\,\Sigma^2}\,\frac{1}{(1+z)^2}. \tag{18–7}$$

Si può anche esprimere la (18–7) introducendo la *distanza di luminosità* l_L in modo che sia

$$F = \frac{L}{4\pi\,l_\mathrm{L}^2}.$$

ossia intendendo per l_L la distanza che si ricaverebbe, per una sorgente di luminosità L, se valesse la geometria euclidea e la legge $1/r^2$ per l'intensità della luce. Allora la (18–7) implica

$$l_\mathrm{L} = R_0\,\Sigma\,(1+z). \tag{18–8}$$

Nelle (18–7), (18–8) $\Sigma(\chi)$ va espressa come funzione di z, tramite la

$$\chi = \frac{1}{H_0 R_0} \int_0^z \frac{dz'}{E_1(z')} \tag{18–9}$$

che deriva immediatamente dalla (18–6). Otteniamo così la *relazione flusso–redshift* valida in generale. Purtroppo non è possibile darne una forma analitica comoda, perché l'integrale che appare in (18–9) non si esprime con funzioni elementari (è un integrale ellittico). Ciò non impedisce, naturalmente, un calcolo numerico accurato quanto occorre.

La relazione magnitudine–redshift

Alla relazione flusso–redshift si dà spesso la forma di una *relazione magnitudine–redshift*, procedendo come segue. La definizione di *magnitudine apparente* usata in astronomia è

$$m = -2.5\,\log(F/F_0)$$

dove F_0 è il flusso che arriva da una sorgente di riferimento (log è il logaritmo decimale). Si definisce poi *magnitudine assoluta* M la magnitudine apparente che l'oggetto avrebbe se si trovasse alla distanza convenzionale di 10 pc. Allora dalla definizione di l_L segue

$$m - M = 5 \log\left(\frac{l_\mathrm{L}}{10\,\mathrm{pc}}\right) = 5 \log\left(\frac{l_\mathrm{L}}{1\,\mathrm{Mpc}}\right) + 25. \tag{18–10}$$

La (18–10) viene applicata, esprimendo l_L in funzione di z, per il confronto tra sorgenti di cui sia nota la magnitudine assoluta: per es. supernovæ di un dato tipo. Allora le osservazioni danno per ciascuna sorgente m e z; l'espressione teorica (18–10) contiene i 4 parametri Ω_m, Ω_r, Ω_k, Ω_Λ che è possibile ricavare (ovviamente con un certo errore, più o meno grande) dal fit sui dati osservati.

Come abbiamo già accennato in precedenza, il punto delicato di queste misure è sempre la stima della distanza, che nel caso della relazione magnitudine–redshift risale alla difficoltà di stimare la magnitudine assoluta degli oggetti osservati.

Il test d'isotropia

Un possibile modo per determinare la distanza di una sorgente si basa sulla misura del suo diametro angolare α. Se infatti è noto il diametro lineare D, avremo $D = l\alpha$, da cui $l = D/\alpha$. Però questa relazione è corretta solo in un universo piatto e statico: vogliamo ora studiare come va modificata se si tiene conto della curvatura e dell'evoluzione.

Formuleremo il problema come segue: diciamo *distanza ottica* $l_{\rm o}$ quella definita da

$$l_{\rm o} \stackrel{\rm def}{=} \frac{D}{\alpha}. \tag{18–11}$$

Vogliamo trovare la dipendenza di $l_{\rm o}$ da z.

Dalla solita espressione della metrica, si vede che

$$D = R\,\Sigma\,\alpha \tag{18–12}$$

essendo R il valore all'emissione. Infatti se ci si mette al tempo di emissione, e si considera la sezione spaziale a quel tempo, la parte spaziale della metrica porta proprio alla (18–12), dato che la propagazione della luce da ogni punto della sorgente all'osservatore sarà radiale. Combinando (18–11) e (18–12) si arriva a

$$l_{\rm o} = R\,\Sigma = \frac{R_0\Sigma}{1+z}. \tag{18–13}$$

Supponiamo ora di osservare un oggetto isotropo, ossia avente simmetria sferica. Possiamo misurare direttamente due cose:

a) la differenza di redshift Δz tra le parti più vicine e quelle più lontane dell'oggetto

b) il suo diametro angolare α.

Vogliamo vedere che relazione prevede la teoria tra queste due grandezze.

Per quanto riguarda α la risposta è semplice, ed è già contenuta nella definizione (18–11) di distanza ottica $l_{\rm o}$:

$$\alpha = \frac{D}{l_{\rm o}} = \frac{D\,(1+z)}{R_0\Sigma}. \tag{18–14}$$

Quanto a Δz, differenziando la (18–9) troviamo

$$dz = H_0 R_0 E_1(z)\,d\chi$$

e quindi al primo ordine

$$\Delta z = H_0 R_0 E_1(z)\,\Delta\chi = H_0 R\,(1+z)\,E_1(z)\,\Delta\chi = H_0 D\,(1+z)\,E_1(z) \tag{18–15}$$

perché all'epoca di emissione $D = R\,\Delta\chi$.

Confrontando (18–14) e (18–15) si ha

$$\frac{\Delta z}{\alpha} = H_0 R_0 E_1(z)\,\Sigma(\chi) \tag{18–16}$$

dove il secondo membro è esprimibile in termini di z e dei parametri Ω del modello. Pertanto la (18–16) fornisce una relazione fra la grandezza osservabile a primo membro e quella teorica a secondo membro.

Situazione attuale dei parametri cosmologici

Cercando di dare un quadro schematico, si può dire che dalle osservazioni più recenti — principalmente dalla relazione magnitudine–redshift di supernovæ e dalle fluttuazioni della radiazione di fondo — si ricava:

a) Il valore presente di Ω_r è trascurabile, come già detto.

b) Il valore di Ω_m sembra decisamente minore di 1, forse intorno a 0.3.

c) I dati sono compatibili con $\Omega_\mathrm{k} = 0$ (spazio piatto).

d) Sembra quindi necessario un $\Omega_\Lambda > 0$, attorno a 0.7.

Un problema è fornito proprio dal valore non nullo di Ω_Λ, perché non si sa dare un'origine plausibile di questo termine cosmologico. Paradossalmente, dalla teoria delle interazioni fondamentali si potrebbe dedurre un contributo che si comporta come un termine cosmologico, ma qualsiasi stima ragionevole porta a valutarlo troppo grande, per oltre 50 ordini di grandezza! Quindi: mentre non sarebbe strano che il termine cosmologico sia nullo (si potrebbero cercare ragioni per cui la previsione teorica non vale) è invece preoccupante un termine non nullo, ma così piccolo che riesce impossibile vederlo come risultato di una cancellazione quasi completa, ma non proprio.

Si è perciò proposto che esista della materia sconosciuta, con proprietà del tutto diverse da quella ordinaria, e che potrebbe produrre un effetto analogo a quello del termine cosmologico. Ma si tratta di speculazioni prive di una base solida, per cui il problema rimane aperto.

Un modello ragionevole

Ricordiamo alcune definizioni date nel cap. precedente:

$$\Omega_\mathrm{r} = \frac{8\pi\varrho_\mathrm{r}}{3H^2} \qquad \Omega_\mathrm{m} = \frac{8\pi\varrho_\mathrm{m}}{3H^2} \qquad \Omega_\mathrm{k} = -\frac{k}{R^2H^2} \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}.$$

In base a quanto detto si può assumere come modello ragionevole per calcoli orientativi il seguente:

$$\Omega_\mathrm{r} = 0 \qquad \Omega_\mathrm{m} = 0.3 \qquad \Omega_\mathrm{k} = 0 \qquad \Omega_\Lambda = 0.7. \tag{18–17}$$

Per definire completamente il modello occorre solo dare il valore di H_0:

$$H_0 = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}.$$

Riesce utile anche l'inverso di H:

$$1/H_0 = 1.40 \cdot 10^{10}\,\mathrm{anni} = 4.3\,\mathrm{Gpc}.$$

Quando $1/H_0$ viene espresso in unità di tempo, prende il nome di *tempo di Hubble.*

Per l'uso che dobbiamo farne, non ci preoccuperemo delle incertezze di cui sono affetti tutti i dati.

Un commento va fatto per quanto riguarda Ω_r. Al tempo presente, come abbiamo visto nel cap. precedente, ϱ_r è per 4 ordini di grandezza inferiore a ϱ_m, e quindi è certamente lecito trascurare Ω_r. Data però la diversa potenza di a con cui i due termini figurano nella definizione (18–4) di $E(a)$, questo non sarà più vero quando a è $\lesssim 10^{-4}$. Perciò il nostro modello semplificato non può essere esteso a valori così piccoli di a, ossia a valori corrispondentemente grandi di z.

Usando le (18–17) l'espressione di $E(a)$ si semplifica in

$$E(a) = \left(\Omega_\mathrm{m} a^{-3} + \Omega_\Lambda\right)^{1/2}$$

e la (18–5) può essere integrata esattamente:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_\mathrm{m}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} (\sinh pt)^{2/3} \tag{18–18}$$

dove $p = \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}$.

Il tempo presente t_0 si ottiene dalla (18–18) ricordando che per definizione $a(t_0) = 1$. Tralasciando i passaggi, ecco il risultato:

$$H_0 t_0 = \frac{1}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{1 - \sqrt{\Omega_\Lambda}}.$$

Usando i valori di H_0 e Ω_Λ, si ha $t_0 = 1.34 \cdot 10^{10}$ anni, che differisce pochissimo dal tempo di Hubble.

Un oggetto ad alto redshift

È assai recente (inizio 2004) la notizia dell'osservazione di un oggetto con redshift vicino a 10. Proviamo ad applicare il nostro modello per rispondere ad alcune domande:

1) a che tempo è partita la luce che oggi riceviamo da quell'oggetto?
2) qual è la sua distanza attuale?
3) qual era la distanza quando la luce è partita?

La risposta a 1) si ricava facilmente dalla (18–18), dato che $z = 10$ significa $a = 1/11$. Risulta $t = 4.7 \cdot 10^8$ anni.

Meno semplice rispondere alla 2): occorre infatti usare la (18–6), che anche nel nostro caso particolare rimane un integrale ellittico. Il calcolo numerico fornisce $l_\mathrm{a} = 9.5\,\mathrm{Gpc}$.

Infine la risposta a 3) è facile, perché basta moltiplicare l_{a} per a: otteniano 0.86 Gpc.

Può anche essere istruttivo chiedersi come vari la distanza nel tempo, dove per distanza intendiamo sempre $l = l_{\mathrm{a}} a(t)$, ossia la distanza misurata su una determinata sezione spaziale, corrispondente al valore t del tempo cosmico. Allora

$$\frac{dl}{dt} = l_{\mathrm{a}} \dot{a} = H_0 \, l_{\mathrm{a}} \, a \, E(a) = H_0 \, l \, E(a) \tag{18–19}$$

per la (18–3).

La (18–19) mostra in primo luogo che

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_{t_0} = H_0 \, l_{\mathrm{a}} = 6.6 \cdot 10^5 \, \mathrm{km/s},$$

più del doppio della velocità della luce. All'istante dell'emissione invece

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_{t} = 1.24 \cdot 10^6 \, \mathrm{km/s}$$

ossia oltre 4 volte c.

Il risultato non deve meravigliare: c è una velocità limite per i moti *rispetto a un* RIL, mentre qui stiamo studiando la variazione di distanza fra corpi che sono entrambi fermi rispetto alle coordinate comoventi, ma così lontani tra loro che l'approssimazione del RIL non è più neppure vagamente utilizzabile. In altre parole: non ha senso interpretare dl/dt come una velocità, nel significato che ha questo termine in fisica.