CAPITOLO 14

Il teorema di Birkhoff

Nel Cap. 12 abbiamo visto che la geometria di Schwarzschild è la soluzione statica a simmetria sferica delle equazioni di Einstein per lo spazio vuoto. In realtà alla stessa geometria si arriva sotto ipotesi più deboli: basta la sola simmetria sferica, senza imporre la condizione statica. È questo il *teorema di Birkhoff*.

Prima di dare la dimostrazione, discutiamo brevemente il significato del teorema. Esso mostra come la geometria di Schwarzschild descriva lo spazio-tempo al di fuori della materia anche se questa non è in quiete, purché mantenga la simmetria sferica: il caso per noi importante è quello del *collasso gravitazionale*. Naturalmente nella regione di spazio-tempo occupata dalla materia la geometria sarà diversa, come già abbiamo visto nel Cap. 12 per il modello (statico) di Schwarzschild.

Possiamo rendere vagamente plausibile il teorema di Birkhoff osservando che qualcosa di simile accade per il campo elettromagnetico: una distribuzione di cariche a simmetria sferica, anche se non statica (quindi in moto esclusivamente radiale) produce all'esterno lo stesso campo di una carica puntiforme (teorema di Gauss).

Per dimostrare il teorema basta scrivere la metrica come al Cap. 12:

$$d\tau^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 \bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta \, d\varphi^2\bigr) \tag{14–1}$$

con la sola differenza che ora non supponiamo in partenza che Φ e Λ dipendano solo da r, ma lasciamo la possibilità di una dipendenza da t. Il teorema sarà dimostrato se faremo vedere che in realtà la dipendenza da t non c'è.

Le equazioni di Einstein sono state già scritte in parte al Cap. 12, e restano invariate, sebbene Φ e Λ possano anche dipendere da t: da $G^{tt} = 0$ e $G^{rr} = 0$ si ha (ponendo ora $p = 0$, $\varrho = 0$)

$$2r\Lambda_{,r} = 1 - e^{2\Lambda} \qquad 2r\,\Phi_{,r} = e^{2\Lambda} - 1. \tag{14–2}$$

Occorre aggiungere però l'equazione $G^{tr} = 0$, che non è banalmente soddisfatta, ma a conti fatti si riduce a $\Lambda_{,t} = 0$: dunque Λ in realtà non dipende da t. Allora la prima delle (14–2) dà subito

$$e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{14–3}$$

con M costante d'integrazione, di evidente significato.

Nota: Osserviamo che la (14–3) ha senso solo per $r > 2M$, dato che $e^{2\Lambda}$ è sempre positivo. Riprenderemo la questione tra poco.

Resta da integrare la seconda delle (14–2): poiché non possiamo escludere che Φ dipenda da t, dobbiamo scrivere (sempre per $r > 2M$)

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + f(t),$$

con f funzione arbitraria. Si arriva così alla metrica

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{2f(t)}\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2M/r} - r^2\bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\bigr)$$

che a prima vista sembra diversa da quella di Schwarzschild, e non statica. Tuttavia basta fare il cambiamento di variabile

$$t' = \int e^{f(t)}\, dt$$

per ottenere il risultato cercato. ∎

Osservazione: Per completezza occorrerebbe dimostrare che le equazioni dedotte dalle altre componenti di $\mathbf{G}$ non aggiungono niente: ciò deriva ancora una volta dalla simmetria del sistema, e dall'annullarsi della divergenza di $\mathbf{G}$.

Quanto alla restrizione $r > 2M$, in realtà essa non sussiste: basta cambiare i segni ai primi due termini della (14–1) e verificare che si arriva ancora allo stesso risultato.

Collasso di una "stella di polvere": la geometria interna

Il più semplice modello possibile per studiare il collasso gravitazionale si fa supponendo che la pressione all'interno della stella sia trascurabile (Oppenheimer e Snyder, 1939). Avremo allora

$$\mathbf{T} = \varrho\, \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$$

e le (12–5), (12–8) diventano

$$\frac{d\varrho}{d\tau} + \varrho\, \nabla\!\cdot\mathbf{u} = 0 \qquad \text{e} \qquad u^\beta u^\alpha{}_{;\beta} = 0. \tag{14–4}$$

Ricordando la discussione fatta al Cap. 12 (12–7) la prima di queste equazioni si può scrivere $\varrho V = \text{cost.}$ e dice semplicemente che l'energia si conserva: ϱ varia solo perché cambia il volume occupato da una data porzione di materia.

La seconda coincide con la (9–21), e mostra che la materia segue le geodetiche: essa è in caduta libera, poiché non ci sono forze di pressione.

Renderemo ancora più semplice il modello supponendo che la densità ϱ non dipenda neppure da r (stella omogenea), anche se la simmetria sferica sarebbe compatibile con una ϱ variabile radialmente. Dovremmo ora scrivere e risolvere le equazioni di Einstein, ma rimandiamo il calcolo al Cap. 16, dove incontreremo lo stesso problema in un contesto diverso. Anticipiamo quindi soltanto i risultati, che si riassumono nella geometria di Robertson–Walker:

$$d\tau^2 = R^2\Big(d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\!\chi\,\left(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\,d\varphi^2\right)\Big) \qquad (14\text{–}5)$$

dove R è una funzione di η che preciseremo tra poco (η in questa metrica è la coordinata temporale).

Dalla (14–5) segue l'espressione dell'elemento di volume:

$$dV = R\,d\chi \cdot R\,\sin\chi\,d\vartheta \cdot R\,\sin\chi\,\sin\vartheta\,d\varphi = R^3\sin^2\!\chi\,\sin\vartheta\,d\chi\,d\vartheta\,d\varphi. \qquad (14\text{–}6)$$

Sempre nel Cap. 16 dimostreremo che la materia (in caduta libera) segue le geodetiche $\chi = \text{cost.}$, $\vartheta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ Allora la (14–6) con $\varrho\,V = \text{cost.}$ ci dice che $\varrho\,R^3$ è costante. Conviene quindi introdurre il parametro R_0 ponendo

$$\varrho\,R^3 = \frac{3R_0}{8\pi}. \qquad (14\text{–}7)$$

Vedremo nel Cap. 16 che dalle equazioni di Einstein discende

$$R = \tfrac{1}{2}R_0\,(1 + \cos\eta) \qquad (14\text{–}8)$$

mentre il tempo proprio della materia è dato da

$$\tau = \tfrac{1}{2}R_0\,(\eta + \sin\eta). \qquad (14\text{–}9)$$

Le sezioni spaziali della metrica (14–5), come vedremo meglio in seguito, sono delle "ipersfere" S^3, ossia degli spazi non euclidei a curvatura costante. Il raggio di curvatura è R, che dipende dal tempo come mostra la (14–8)

La (14–8) mostra anche il significato di R_0: è il raggio di curvatura massimo, che si ottiene per $\eta = 0$. La soluzione trovata rappresenta dunque una fase di contrazione (collasso) preceduta da una di espansione. A noi interessa solo il collasso, e possiamo supporre che in precedenza la stella sia tenuta in equilibrio da forze di pressione, che vengono improvvisamente a mancare all'istante $\eta = 0$.

Però la materia non riempie tutto lo spazio: la soluzione trovata si estende dunque solo fino a un certo $\chi = \chi_1$. Nell'espressione (14–5) della metrica si legge che il raggio della stella (distanza dal centro alla superficie) è $R\,\chi_1$, e che l'area della superficie è $4\pi R^2 \sin^2\chi_1$.

Raccordo con la geometria esterna

Sappiamo che la geometria esterna è una geometria di Schwarzschild, delimitata all'interno dalla superficie della stella, che corrisponderà a un certo valore della coordinata r. La superficie è in caduta libera, ossia lungo una geodetica radiale, e questo fatto deve risultare vero tanto nella geometria interna (dove è automatico, avendo posto $\chi = \chi_1$ alla superficie della stella) quanto in quella esterna.

Abbiamo visto al Cap. 8 le equazioni di tali geodetiche:

$$r = \tfrac{1}{2}\, r_0\,(1+\cos\eta) \qquad \tau = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2M}}\,(\eta + \sin\eta). \tag{14–10}$$

Si è usato lo stesso parametro η in entrambe le geometrie, ma a priori non ci sarebbe ragione perché debba trattarsi dalla stessa η. Però le due geodetiche debbono identificarsi, e il confronto della (14–9) con la seconda delle (14–10) mostra che η è proprio lo stesso, e che inoltre dev'essere

$$R_0 = \sqrt{\frac{r_0^3}{2M}}\,. \tag{14–11}$$

Le condizioni di raccordo non terminano però con la (14–11). È evidentemente necessario che l'area della superficie sia la stessa in entrambe le geometrie, e ciò richiede $r = R\sin\chi_1$. Poiché la dipendenza di r e di R da η è la stessa, come mostrano la (14–8) e la prima delle (14–10), basta la condizione

$$r_0 = R_0 \sin\chi_1. \tag{14–12}$$

In base alle (14–11), (14–12) tutta la geometria è completamente determinata da due soli parametri: possiamo ad es. prendere M e r_0, che sono possibili dati osservativi.

Concludiamo osservando che a rigore il raccordo tra le due geometrie va controllato più a fondo: non ci dev'essere discontinuità nella curvatura della superficie di separazione, calcolata con le due metriche. Rimandiamo a *Gravitation*, Cap. 32, per i dettagli.

La geometria del collasso

Per studiare l'evoluzione della geometria spazio-temporale durante il collasso, conviene cambiare coordinate. Immaginiamo di dotare ciascun granello di polvere della stella di un orologio, che segnerà il suo tempo proprio, e di mettere a zero tutti questi orologi all'inizio del collasso: $\eta = 0$. Indicheremo la coordinata temporale così definita con $\bar{t}$: si tratta di quella che nella (14–9) è indicata con τ.

Nella metrica (14–5) le coordinate spaziali sono χ, ϑ e φ; senza toccare le ultime due, conviene usare al posto di χ (che è costante per ciascun granello durante il collasso) una $\bar{r}$ definita da

$$\bar{r} = R_0 \sin\chi. \tag{14–13}$$

Vediamone il significato. Dalla (14–5) si vede che $r = R \sin\chi$ ha lo stesso significato geometrico della r di Schwarzschild, e dipende dal tempo attraverso $R(\eta)$. Il massimo di R si ha per $\eta = 0$, e vale R_0: quindi $\bar{r}$ è il massimo di r, e si ha in generale, per la (14–8)

$$r = \tfrac{1}{2}\bar{r}\,(1 + \cos\eta).$$

Ne segue che durante il moto di caduta ogni granello conserva costanti tutte le coordinate spaziali: ϑ e φ perché la caduta è radiale, $\bar{r}$ per definizione. $\bar{r} = r_0 = R_0 \sin\chi_1$ è la superficie della stella.

In questo modo il sistema di coordinate è stato definito solo all'interno della materia, non nello spazio vuoto circostante; ma non è difficile estenderne la definizione. Basta pensare a un piccolo "corpo di prova," anch'esso in caduta radiale, secondo una geodetica della geometria di Schwarzschild: scegliamo in particolare una geodetica che parte con velocità radiale nulla, e quindi con equazioni analoghe alle (14–10), che valgono sulla superficie della stella:

$$r = \tfrac{1}{2}\,\bar{r}\,(1 + \cos\eta) \qquad \tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{r}^3}{2M}}\,(\eta + \sin\eta). \tag{14–14}$$

Anche qui usiamo τ, ossia il tempo segnato dall'orologio che accompagna il corpo di prova, come coordinata temporale $\bar{t}$. Quanto alla coordinata radiale, adottiamo la stessa idea della regione interna: prendiamo $\bar{r}$, ossia il valore massimo di r, che si ha per $\eta = 0$ (e quindi anche $\bar{t} = 0$).

Riassumiamo. Per $\bar{t} = 0$ tutti i granelli di polvere e tutti i corpi di prova esterni sono fermi: $r = \bar{r}$, $dr/d\tau = 0$. Durante il collasso tutti mantengono $\bar{r}$ costante per definizione, mentre $\bar{t}$ segna il tempo proprio di ciascuno.

La metrica interna

Possiamo ora esprimere la metrica interna nelle nuove coordinate. Differenziando la (14–9) (con $\bar{t}$ al posto di τ) e confrontando con la (14–8) si vede che

$$d\bar{t} = R\,d\eta.$$

Differenziando invece la (14–13), ed esprimendo $\cos\chi$ per mezzo della stessa (14–13) abbiamo

$$d\bar{r}^2 = \left(R_0^2 - \bar{r}^2\right) d\chi^2$$

da cui

$$R^2\, d\chi^2 = \frac{R^2}{R_0^2 - \bar{r}^2}\, d\bar{r}^2.$$

Occorre ancora esprimere R in funzione di $\bar{t}$, il che si fa (implicitamente) eliminando η tra le (14–8) e (14–9); non esiste un'espressione in funzioni elementari, ma possiamo sempre scrivere

$$R = R_0\, f(\bar{t}) \qquad \text{da cui anche} \qquad r = \bar{r}\, f(\bar{t}).$$

Per noi è solo importante tener presente che

$$f(0) = 1, \qquad f(\pi R_0/2) = 0. \tag{14–15}$$

Basta ora sostituire nella (14–5) per trovare la metrica interna:

$$d\tau^2 = d\bar{t}^2 - \frac{R_0^2\, f^2}{R_0^2 - \bar{r}^2}\, d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 f^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\right) \quad (\bar{r} \le r_0). \tag{14–16}$$

La seconda delle (14–15) ci dice che per $\bar{t} = \pi R_0/2$ *tutta la materia della stella* finisce in $r = 0$: la stella è collassata in una singolarità.

La metrica esterna è molto più complicata, e perciò non la discutiamo. Il tempo di caduta $\bar{t}_\mathrm{c}$ del corpo di prova nella singolarità $r = 0$ dipende da $\bar{r}$, come si vede dalle (14–14): si ha $r = 0$ per $\eta = \pi$, e allora

$$\bar{t}_\mathrm{c} = \pi \sqrt{\frac{\bar{r}^3}{8M}} \tag{14–17}$$

(avevamo già visto questo risultato nel Cap. 8).

Come già sappiamo, il raccordo fra le due metriche richiede $r_0^3 = 2MR_0^2$; da questa si ricava R_0 se sono dati M ed r_0.

Il tutto è riassunto in fig. 14–1, dove è indicata col tratteggio la singolarità $r = 0$, che per quanto visto corrisponde a $\bar{t} = \text{cost.}$ nella geometria interna, ma non in quella esterna. Le rette verticali sono le godetiche ($\bar{r} = \text{cost.}$): nella parte sinistra della figura sono le linee orarie dei "granelli di polvere," mentre nella parte destra, corrispondente allo spazio vuoto esterno alla stella, sono le linee orarie degli ipotetici "corpi di prova." Le rette orizzontali $\bar{t} = \text{cost.}$ sono una possibile scelta di sezioni spaziali, delle quali vogliamo ora discutere la geometria.

Evoluzione delle sezioni spaziali

Osserviamo anzitutto che tale geometria non è statica, come si vede già dalla (14–16), nella quale i coefficienti della parte spaziale dipendono da $\bar{t}$, attraverso f; lo stesso accade anche nella geometria esterna. Ciò non contrasta col teorema di Birkhoff, perché esso vale per le sezioni spaziali definite da $t = \text{cost.}$, ovviamente diverse da quelle ora considerate.

È importante tener presente l'esatto significato di frasi come: "la geometria delle sezioni spaziali è statica." Alla luce di quello che abbiamo appena visto, è chiaro che la frase va intesa così: "è possibile definire una famiglia di sezioni spaziali (parametrizzate da una coordinata temporale, che nel nostro caso è la t di Schwarzschild) che hanno la stessa geometria, ossia sono tra loro isometriche."

La tecnica degli "embedding diagrams"

Sempre la (14–16) mostra che le sezioni spaziali di cui si tratta hanno una geometria non euclidea. Riesce spesso utile, per esaminare una geometria non euclidea, sfruttare il fatto che è sempre possibile rappresentare una varietà riemanniana non euclidea come sottovarietà di una euclidea, di dimensione maggiore. Nel nostro caso, grazie alla simmetria sferica, è sufficiente aggiungere una sola coordinata spaziale, che chiameremo z. Inoltre, poiché lavoriamo a $\bar{t}$ assegnato, conviene riprendere come coordinata radiale r anziché $\bar{r}$.

Pensando alla geometria interna, si tratta dunque di trovare una $z(r)$ tale che sia identicamente

$$dr^2 + dz^2 = \frac{R^2}{R^2 - r^2}\, dr^2$$

(abbiamo usato $R = R_0 f$). La soluzione è $z = \pm\sqrt{R^2 - r^2}$; sceglieremo arbitrariamente il segno negativo.

Otteniamo dunque un cerchio di raggio R, o meglio un arco di cerchio: infatti la materia termina a $r = R \sin \chi_1$ (fig. 14–2). È così dimostrato che la geometria spaziale è quella di una S^3, che può essere immersa in uno spazio euclideo quadridimensionale. L'arco di cerchio trovato è la sezione, fatta a ϑ e φ assegnati, di una "calotta ipersferica," di semiapertura χ_1.

Dovremmo anche, per completare lo studio delle sezioni spaziali, esaminare la geometria esterna. Questa però ha una metrica assai più complicata della (14–16); la conseguenza è che non si riesce a dare un'espressione analitica per la forma dello embedding diagram. Perciò ci limitiamo a indicarne in fig. 14–2 l'andamento qualitativo, con una curva raccordata con l'arco di cerchio che rappresenta la geometria interna.

Se cambiamo $\bar{t}$, e quindi R, otteniamo un'altra sezione spaziale, che è un'altra calotta, di uguale apertura ma di raggio diverso: in fig. 14–2 sono state disegnate concentriche, e le tratteggiate radiali connettono punti corrispondenti allo stesso granello di polvere. Al crescere di $\bar{t}$ il raggio decresce, finché per $\bar{t} = \pi R_0/2$ si riduce a 0: tutta la materia della stella è stata schiacciata in un unico punto.

Per $\bar{t} > \pi R_0/2$ la parte interna della geometria cessa di esistere, e rimane solo la parte esterna, che continua a evolvere: infatti i corpi di prova in caduta radiale arrivano alla singolarità a tempi successivi, dato che $\bar{t}_\mathrm{c}$ (14–17) è funzione crescente di $\bar{r}$.