CAPITOLO 11

Densità e correnti nei sistemi continui

In questo capitolo richiameremo le proprietà del tensore energia-impulso in RR, come premessa al suo studio in RG. Per un qualunque sistema continuo, anche in fisica newtoniana, è possibile definire alcune grandezze importanti:

– la densità di energia U

– la densità di corrente di energia $\vec{S}$

– la densità d'impulso $\vec{G}$

– la densità di corrente d'impulso (o tensore degli sforzi) Θ^{ij}.

Le definizioni di queste grandezze sono quasi tutte ovvie; in particolare $\vec{S}$ generalizza il vettore di Poynting dell'elettromagnetismo. Richiede di essere invece precisato il significato di Θ, al modo seguente: se consideriamo un elemento di superficie $d\Sigma$, con normale $\vec{n}$, l'espressione

$$\Theta^{ij} n_j \, d\Sigma \tag{11–1}$$

rappresenta la quantità di moto per unità di tempo che attraversa $d\Sigma$ nel verso di $\vec{n}$, ossia anche la forza applicata dalla materia che si trova da un lato della superficie $d\Sigma$ su quella dall'altro (nel verso definito da $\vec{n}$). Si noti che la forza non è necessariamente normale a $d\Sigma$: questo accade nei fluidi perfetti, ma certo non nei solidi.

Nota: Nella (11–1), e in tutte le equazioni in cui appaiono le componenti di $\vec{n}$, si deve intendere *per convenzione* che $n_1 > 0$ quando il vettore $\vec{n}$ è diretto nel verso positivo dell'asse x^1. Idem per le altre componenti.

Se s'integrano le grandezze sopra definite su di un volume V o sul suo contorno Σ, si ottengono le corrispondenti grandezze integrali:

$$E = \int_V U \, dV \qquad \vec{P} = \int_V \vec{G} \, dV \tag{11–2}$$

$$W = \int_\Sigma S^j n_j \, d\Sigma \qquad F^i = \int_\Sigma \Theta^{ij} n_j \, d\Sigma. \tag{11–3}$$

col significato, nell'ordine, di energia e quantità di moto contenute nel volume V, di potenza emessa dal sistema attraverso la superficie Σ, di risultante delle forze applicate *dal sistema all'esterno* attraverso Σ.

In termini delle grandezze sopra definite, le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto si esprimono in forma integrale come segue:

$$\frac{dE}{dt} = -W \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = -\vec{F}. \tag{11–4}$$

Usando il teorema della divergenza le (11–4) si trasformano in:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \qquad \frac{\partial G^i}{\partial t} + \Theta^{ij}{}_{,j} = 0. \tag{11–5}$$

Simmetria del tensore degli sforzi

Consideriamo, come volume V, un cubetto di lato l. La forza agente su una faccia va come l^2, e le forze su facce opposte sono opposte, a meno d'infinitesimi di ordine superiore. Ne segue che il momento risultante delle forze esterne va come l^3.

Quanto al momento angolare, esso si calcolerà come velocità angolare (finita) per momento d'inerzia. La massa del cubetto va come l^3, per cui il momento d'inerzia va come l^5, e lo stesso è vero per il momento angolare. Dunque il momento angolare è di ordine superiore rispetto al momento delle forze.

Applichiamo ora al nostro cubetto la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi: al limite $l \to 0$ questa richiede che il momento delle forze sia nullo, altrimenti avremmo un'accelerazione angolare infinita.

Se calcoliamo in dettaglio per es. la terza componente di questo momento (fig. 11–1) vediamo che esso nasce dal contributo di 4 forze: quelle applicate dall'esterno sulle facce del cubetto ortogonali agli assi x^1 e x^2. Per la faccia ortogonale a x^1 e dalla parte positiva, conta solo la componente 2, che vale $-l^2\Theta^{21}$ e ha momento rispetto all'origine $-\frac{1}{2}\,l^3\Theta^{21}$ (il segno meno nasce dal fatto che stiamo considerando la forza applicata *dall'esterno* sul cubetto, mentre la definizione di Θ si riferisce alla forza che il cubetto applica all'esterno). Sulla faccia opposta agisce una forza $l^2\Theta^{21}$ (segno opposto perché è opposto il verso della normale) il cui momento è ancora $-\frac{1}{2}\,l^3\Theta^{21}$. In totale dunque per le due facce abbiamo $-l^3\Theta^{21}$.

Dobbiamo ora considerare le forze agenti sulle facce ortogonali all'asse x^2, e con gli stessi passi troviamo che il loro momento è $l^3\Theta^{12}$. (È cambiato il segno, e conta la componente Θ^{12} invece della Θ^{21}.)

Si vede dunque che il momento risultante sarà nullo sse

$$\Theta^{ij} = \Theta^{ji}$$

e con ciò abbiamo dimostrato un importante teorema della meccanica dei continui: *il tensore degli sforzi è simmetrico.*

Il tensore energia-impulso

Per un determinato sistema fisico le grandezze finora considerate avranno delle espressioni che dipendono dalle caratteristiche del sistema; ad es. per un campo e.m. dovranno essere espresse in funzione delle grandezze di campo.

Scriviamo le equazioni di Maxwell in forma relativistica e poniamo

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\,(\Phi^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\Phi^{\lambda}{}_{\lambda})$$

dove il tensore $\mathbf{\Phi}$ è definito a partire dal tensore e.m. $\mathbf{F}$:

$$\Phi^{\alpha\beta} = F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta}.$$

Si verifica facilmente che $T^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$, ma questa non è una proprietà generale, come vedremo fra poco. In termini del tensore $\mathbf{T}$ si ha:

$$U = T^{00} \qquad S^i = T^{0i} \qquad G^i = T^{i0} \qquad \Theta^{ij} = T^{ij}. \tag{11–6}$$

Il PR impone che queste relazioni e le proprietà delle grandezze in questione valgano in ogni rif.; in particolare dovrà essere sempre $T^{ij} = T^{ji}$, e ciò è possibile solo se $\mathbf{T}$ è completamente simmetrico:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}.$$

Ne segue $\vec{G} = \vec{S}$: relazione che non è prevedibile in una teoria non relativistica.

Ciò che per il campo e.m. è conseguenza delle equazioni di Maxwell (che sono già relativisticamente invarianti) per un generico sistema continuo va postulato; assumiamo dunque che esista in ogni caso un tensore simmetrico legato attraverso le (11–6) alla densità di energia ecc. Imporremo anche che la densità di energia sia positiva in ogni rif., il che si può esprimere così: $T^{\alpha\beta}\,u_{\alpha}u_{\beta} > 0$ per tutti i vettori $\mathbf{u}$ di tipo tempo. Inoltre le (11–5) si condensano in una sola equazione:

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0.$$

Riassumendo: in una teoria relativistica ogni sistema continuo possiede un tensore energia-impulso *simmetrico, a densità di energia positiva e a divergenza nulla.*

Nota: S'intende che la divergenza di $\mathbf{T}$ non sarà più nulla se il sistema interagisce con qualcos'altro; ad es. nel caso e.m. in presenza di cariche, la divergenza di $\mathbf{T}$ fornisce il lavoro fatto dal campo sulle cariche e la forza agente su queste.

È possibile una generalizzazione relativistica delle (11–3):

$$F^{\alpha} = \int_{\Sigma} T^{\alpha\beta} n_{\beta}\, d\Sigma \tag{11–7}$$

dove Σ è un'opportuna ipersuperficie, di normale n_{β}. La (11–7) riassume in primo luogo entrambe le (11–3), se n_{β} è scelto in modo che sia $n_0 = 0$. Cambiando rif. n_0 non sarà più nullo, ma n_β resta spaziale, e il significato di F^α è sempre quello di flusso di energia e impulso (per unità di tempo) attraverso una superficie. Se poi si prende n_β di tipo tempo, la (11–7) dà la forma relativistica delle (11–2).

Esempi

Vediamo ora la forma del tensore energia-impulso per alcuni sistemi fisici che avranno interesse in seguito.

La radiazione nera

Consideriamo, per cominciare, la radiazione e.m. presente in una cavità all'equilibrio termico. La radiazione è isotropa, il che vuol dire che non c'è corrente di energia ($\vec{S} = 0$) né quantità di moto ($\vec{G} = 0$). Inoltre la radiazione esercita, su qualunque superficie, una forza esclusivamente normale (pressione di radiazione). Questo basta per scrivere

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{11–8}$$

e se teniamo conto che la traccia è nulla troviamo anche $\varrho = 3p$: un risultato ben noto della termodinamica della radiazione.

Nota: È forse superfluo ricordare che l'espressione (11–8) vale solo nel rif. di quiete della cavità.

La polvere

Chiameremo "polvere" della materia in forma di particelle che non esercitano forze l'una sull'altra, e sono localmente in quiete relativa. In queste ipotesi, nel riferimento di quiete è presente solo la componente T^{00}: non esistono né corrente di energia, né quantità di moto, né forze di superficie. Dunque

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11–9}$$

che si può mettere facilmente in forma indipendente dal rif.

Indichiamo infatti con $\mathbf{u}$ la quadrivelocità della polvere; le componenti di $\mathbf{u}$ nel rif. di quiete sono $(1, 0, 0, 0)$ e il prodotto tensoriale $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ avrà quindi componenti

$$u^\alpha \, u^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, confrontando con la (11–9), segue

$$T^{\alpha\beta} = \varrho\, u^\alpha u^\beta. \tag{11–10}$$

La (11–10), essendo una relazione fra tensori, vale indipendentemente dal rif. Si noti che il parametro ϱ è uno scalare, che ha il significato di densità di energia (e quindi di massa) *nel rif. di quiete*. La densità di energia in un rif. diverso si ottiene per es. dalla legge di trasformazione di $T^{\alpha\beta}$: si trova $\varrho' = \gamma^2 \varrho$. Inoltre, in un rif. diverso da quello di quiete, anche $\vec{G}$, $\vec{S}$, Θ non sono più nulli.

Esercizio: Spiegare il fattore γ^2.

Il fluido perfetto

Questo tipo di fluido è definito dall'assenza di viscosità e di sforzi elastici trasversali. Ne segue che in un rif. in cui il fluido è in quiete *il suo tensore energia-impulso ha di nuovo la forma* (11–8) (ma non sarà in generale $\varrho = 3p$).

Dim.: Nel rif. di quiete è certo nulla la densità di quantità di moto: dunque $T^{i0} = T^{0i} = 0$. Resta solo da dimostrare che le componenti diagonali $T^{ii} = \Theta^{ii}$ sono tutte uguali, mentre le altre sono nulle.

Sappiamo che $\Theta^{ij} n_j$ è la forza che agisce attraverso una superficie normale a $\vec{n}$, e se non ci sono sforzi trasverali questa forza dev'essere parallela a $\vec{n}$. Ciò equivale a dire che tutti i vettori $\vec{n}$ sono autovettori di Θ, il che accade solo quando Θ è multiplo dell'identità. ■

Vogliamo ora trovare l'espressione generale di $\mathbf{T}$, valida in qualunque rif.: ci si arriva sfruttando ancora il tensore $u^\alpha u^\beta$ e il tensore metrico controvariante $\eta^{00} = 1$, $\eta^{ii} = -1$. Il risultato è

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + p)\, u^\alpha u^\beta - p\, \eta^{\alpha\beta}. \tag{11–11}$$

La radiazione nera è dunque un caso particolare di fluido perfetto, caratterizzato da $T^\alpha{}_\alpha = 0$. Anche la polvere è un fluido perfetto, per il quale questa relazione non vale.

Ci sarà utile per il seguito considerare il caso limite di un fluido *non relativistico*. È chiaro in primo luogo che in questo limite la densità di energia ϱ si riduce alla sola densità delle masse di riposo delle particelle costituenti il fluido, in quanto tutte le energie (cinetiche e potenziali) danno contributo trascurabile.

Ma è anche trascurabile la pressione: per vedere questo, si pensi al caso di un gas. La pressione in un gas è legata all'energia cinetica media delle molecole dall'equazione di Krönig–Clausius:

$$p = \tfrac{1}{3}\, n\, m\, \langle v^2 \rangle = \tfrac{1}{3}\, \varrho\, \langle v^2 \rangle$$

(n densità numerica, m massa delle molecole). Se $\langle v^2 \rangle \ll c^2$, è anche $p \ll \varrho\, c^2$, ossia $p \ll \varrho$ nelle nostre unità.

Il tensore energia-impulso in RG

La definizione del tensore energia-impulso si trasporta senza difficoltà in RG, basandosi sul PE. Basta infatti partire da un RIL, dove possiamo aspettarci che sia definito un tensore **T** con le proprietà già viste: simmetrico a divergenza nulla e con le componenti interpretate come in RR. Non resta poi che estendere la definizione del tensore a un arbitrario rif., e a coordinate qualsiasi; la simmetria verrà mantenuta, e così pure l'annullarsi della divergenza. Solo che l'espressione esplicita di $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ in componenti richiederà l'intervento dei coefficienti di connessione nella derivata covariante.

Per le stesse ragioni non c'è niente da cambiare nelle espressioni viste per **T** nei diversi esempi; potremo quindi far uso in seguito del tensore energia-impulso di un fluido perfetto nella forma (11–11), con la sola avvertenza di scrivere g al posto di η:

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + p)\, u^\alpha u^\beta - p\, g^{\alpha\beta}. \qquad (11\text{–}12)$$