

CAPITOLO 7

Applicazioni della geometria di Schwarzschild

In questo capitolo e nel successivo studieremo le geodetiche della geometria di Schwarzschild, allo scopo di discutere alcune prove sperimentali della RG, e per esaminare un problema che preparerà il terreno per la discussione del collasso gravitazionale.

Le cosiddette “prove classiche” della RG sono, com'è noto, tre:

- a) il redshift gravitazionale, che abbiamo già trattato
- b) la deflessione gravitazionale della luce
- c) la precessione del perielio di Mercurio.

Qui ci occuperemo della deflessione, e di una sua applicazione importante e molto recente: le lenti gravitazionali. Vedremo poi un'altra prova, non “classica,” nel senso che non era stata anticipata da Einstein come le altre: il ritardo che la luce subisce quando si propaga in vicinanza di una massa (ad es. il Sole).

Il capitolo che segue sarà invece dedicato al moto di corpi dotati di massa, quindi alle geodetiche di tipo tempo. Studieremo come si vede la caduta di una sorgente di luce fino e oltre l'orizzonte, e poi tratteremo la prima prova storica della RG, ossia la precessione del perielio dei pianeti.

Propagazione della luce

Per studiare la propagazione della luce, occorre e basta determinare le geodetiche di tipo luce. Possiamo sempre ignorare, per simmetria, una delle coordinate angolari, ad es. ponendo $\vartheta = \pi/2$. La condizione $W = 0$ ci dà

$$\frac{r-1}{r} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{r}{r-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (7-1)$$

mentre il fatto che le coordinate t e φ sono cicliche porta alle costanti del moto:

$$\frac{r-1}{r} \frac{dt}{d\lambda} = E \quad r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = J. \quad (7-2)$$

Abbiamo indicato esplicitamente le derivate rispetto a λ , per mettere in evidenza che λ *non* è il tempo proprio (che su queste geodetiche è nullo). Ricordiamo anzi che λ è definito a meno di una trasformazione lineare; possiamo servircene per imporre ad es. $E = 1$. Inoltre scriveremo b in luogo di J : la ragione di questa scelta sarà chiara tra poco.

Usando le (7-2), la (7-1) si trasforma in

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + b^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) = 1 \quad (7-3)$$

che al limite $r \rightarrow \infty$ dà $dr/d\lambda = -1$ (il segno meno perché vogliamo considerare luce che arriva dall'infinito). Nelle stesse condizioni, la seconda delle (7-2) diviene

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = -b.$$

Integrando questa si trova $\varphi = b/r$; dunque per una traiettoria che raggiunga l'infinito $b = \lim(r\varphi) = \lim(r \sin \varphi)$: si vede allora che b rappresenta il parametro d'urto (fig. 7-1).

Torniamo ora alla (7-3): questa si analizza facilmente se la s'interpreta come l'equazione del moto (newtoniana) di un punto materiale di massa 2 e di energia 1 nel potenziale equivalente

$$V(r) = b^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right).$$

Il potenziale ha un massimo per $r = 3/2$ che vale $4b^2/27$; si annulla per $r = 1$ e per $r \rightarrow \infty$ ed è negativo per $r < 1$ (fig. 7-2). Se ne ricavano, tra le altre, le seguenti conclusioni:

- 1) Se $b > \sqrt{27/4}$ la luce resta sempre confinata in $r < 3/2$ oppure raggiunge una r minima e poi torna ad allontanarsi. In particolare, se b è sufficientemente vicino al valore limite, la luce prima di allontanarsi compie uno o più giri completi.
- 2) Nel primo caso, la luce cade necessariamente in $r = 0$, eventualmente seguendo una traiettoria a spirale.
- 3) Se $b = \sqrt{27/4}$ è possibile, anche se instabile, un moto circolare, con $r = 3/2$.
- 4) Se $b \gg 1$ il termine b^2/r^3 nel potenziale è piccolo, e si può trattare il problema con tecniche approssimate.

La deflessione della luce

Il caso più importante per la possibilità di verifica è la deflessione da parte del Sole, dove il parametro d'urto b non potrà essere inferiore al raggio. Questo vale $7.5 \cdot 10^5$ km; ma l'unità di lunghezza che abbiamo presa è $2M$, pari a circa 3 km. Dunque $b \simeq 2 \cdot 10^5 \gg 1$, e anche r sarà almeno altrettanto grande.

Partiamo dalla (7-3), e poniamo $r = b/u$. La nuova variabile u andrà da 0 (quando $r \rightarrow \infty$) a circa 1 (quando $r \simeq b$). Combinando con la seconda delle (7-2) (con $J = b$):

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - \frac{u^3}{b} = 1.$$

Derivando questa rispetto a φ :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2} \frac{u^2}{b}. \quad (7-4)$$

Il secondo membro delle (7-4) è sempre $\ll 1$, mentre i termini a primo membro possono essere dell'ordine di 1; questo suggerisce di trattare l'equazione per via perturbativa. La soluzione "imperturbata," ottenuta trascurando il secondo membro, è

$$u = \sin \varphi \quad (7-5)$$

(abbiamo tenuto conto delle condizioni iniziali: $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$). Dalla (7-5) si ha $r \sin \varphi = b$, che mostra come la traiettoria della luce, in quest'approssimazione, sia la retta che passa a distanza b dall'origine: risultato ovvio, perché stiamo trascurando gli effetti di RG, per cui la geometria spaziale è euclidea e la luce si propaga in linea retta.

Per ottenere un'approssimazione migliore, sostituiamo la (7-5) nel secondo membro della (7-4):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2b} \sin^2 \varphi = \frac{3}{4b} (1 - \cos 2\varphi).$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u = \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + \gamma + \delta \cos 2\varphi + \varepsilon \sin 2\varphi$$

e troviamo le condizioni:

$$\gamma = \frac{3}{4b} \quad \delta = \frac{1}{4b} \quad \varepsilon = 0$$

da cui

$$u = \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + \frac{3}{4b} + \frac{1}{4b} \cos 2\varphi.$$

Usando le condizioni iniziali ricaviamo dapprima $\alpha = -1/b$, e poi $\beta = 1$. Infine:

$$u = -\frac{1}{b} \cos \varphi + \sin \varphi + \frac{3}{4b} + \frac{1}{4b} \cos 2\varphi. \quad (7-6)$$

Indichiamo con $\pi/2 + \eta$ il valore di φ cui corrisponde il minimo di r (ossia il massimo di u : fig. 7-3). Derivando la (7-6):

$$\frac{1}{b} \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{1}{2b} \sin 2\varphi = 0$$

$$\frac{1}{b} \cos \eta - \sin \eta + \frac{1}{2b} \sin 2\eta = 0.$$

Da questa si vede che η è dell'ordine di $1/b$, per cui possiamo trascurare il terzo termine, che va come $1/b^2$. Allora

$$\eta \simeq \text{tg } \eta = \frac{1}{b}. \quad (7-7)$$

La fig. 7-3 mostra che l'angolo di deflessione è 2η .

Tornando alle unità usuali, dalla (7-7) si ricava per la *deflessione gravitazionale della luce* l'espressione:

$$2\eta = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (7-8)$$

Per la luce che passa radente al Sole si ottiene come angolo di deflessione $1.75''$.

Le prime verifiche sperimentali furono tentate subito dopo la formulazione della RG. Per molti anni il solo modo possibile è stato di fotografare un campo stellare in condizioni "normali," e poi quando nel campo era presente il Sole. Naturalmente la seconda fase dell'esperimento richiedeva che la luce del Sole fosse schermata in qualche modo, e la sola soluzione pratica era aspettare un'eclissi totale, con gli evidenti svantaggi: rarità dell'evento, collocazione geografica più o meno inaccessibile, soggezione ai fenomeni meteorologici. Per queste e altre ragioni le verifiche, sebbene complessivamente positive, davano sempre luogo a discussioni, in quanto era difficile evitare errori sistematici.

Solo in tempi relativamente recenti, grazie alla radioastronomia e alla scoperta delle quasar, si sono potute ottenere verifiche assai più soddisfacenti. In primo luogo perché le misure possono essere fatte in pieno giorno, dal momento che non si lavora nel visibile. Inoltre le quasar sono piuttosto numerose; infine la tecnica interferometrica a base continentale o intercontinentale (VLBI) consente risoluzioni angolari elevatissime, così che non è più necessario lavorare con radiazione radente al Sole, il che amplia di molto la statistica. Il risultato di tutto ciò è che oggi la (7-8) è verificata meglio dello 0.02%.

Il ritardo gravitazionale

Un effetto osservabile, e strettamente legato alla deflessione gravitazionale, è quello che chiameremo *ritardo gravitazionale*: il tempo che la luce impiega ad andare da un punto a un altro del sistema solare, in particolare se passa radente al Sole, è *maggiore* di quello che prevede la fisica newtoniana. Non bisogna però equivocare: non si tratta del semplice fatto che il percorso che la luce fa è più lungo. Vedremo infatti che la dipendenza da b è diversa, e la grandezza dell'effetto è molto maggiore di quello che potrebbe discendere dalla maggiore lunghezza del percorso.

Né si deve pensare che la luce venga "rallentata" nel campo gravitazionale del Sole: abbiamo già visto che il solo dire che le geodetiche della luce annullano $d\tau^2$ equivale a dire che la velocità della luce è sempre c . Si tratta invece di una conseguenza del carattere non lorentziano dello spazio-tempo, che non ha un'interpretazione fisica semplice.

Per calcolare il tempo, non c'è che ripartire dalla prima delle (7-2) e dalla (7-3): la prima fornisce $dt/d\lambda$, la seconda $dr/d\lambda$. Eliminando λ si ha subito, per la luce che si allontana dal Sole:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r^{5/2}}{(r-1)\sqrt{r^3 - b^2r + b^2}} \quad (7-9)$$

(si ricordi che abbiamo posto $E = 1$). La (7-9) è una relazione esatta, ma l'integrale non si fa elementarmente (è un integrale ellittico). Possiamo però approfittare del fatto che $r \geq b \gg 1$ per approssimare.

Il polinomio di terzo grado sotto radice (chiamiamolo $P(r)$) ha tre radici reali, che valgono

$$b - \frac{1}{2}, \quad -b - \frac{1}{2}, \quad 1$$

a meno di termini in $1/b$. Possiamo quindi scrivere

$$P(r) \simeq (r - b + \frac{1}{2})(r + b + \frac{1}{2})(r - 1)$$

da cui si vede che il punto d'inversione, ossia il minimo di r , vale circa $b - \frac{1}{2}$.

Conviene usare in luogo di r la variabile $s = r + \frac{1}{2}$: si ottiene

$$P \simeq (s - \frac{3}{2})(s^2 - b^2)$$

e la (7-9) diventa

$$\frac{dt}{ds} = \frac{(s - \frac{1}{2})^{5/2}}{(s - \frac{3}{2})^{3/2} \sqrt{s^2 - b^2}}.$$

Allo stesso ordine di approssimazione si può scrivere

$$\frac{dt}{ds} = \frac{s + 1}{\sqrt{s^2 - b^2}}$$

e questa s'integra con la sostituzione $s = b \cosh u$:

$$t = b \sinh u + u.$$

Quando $s = b$ ($r = b - \frac{1}{2}$, punto di minima distanza dal Sole) $u = 0$; se la luce arriva a $r = R$ si ha invece $u = \bar{u}$, dove

$$b \cosh \bar{u} = R - \frac{1}{2}.$$

Occorre ricavare \bar{u} in funzione di R : l'espressione esatta è piuttosto complicata, ma allo stesso ordine delle approssimazioni già fatte si riduce a

$$\bar{u} \simeq \ln \frac{R + X}{b}$$

dove si è posto $X = \sqrt{R^2 - b^2}$.

Un'approssimazione analoga si può fare per $\sinh \bar{u}$, e alla fine si trova che il tempo $t(R)$ per il percorso dalla minima distanza dal Sole fino a $r = R$ vale

$$t(R) = X + \ln \frac{R + X}{b} + \frac{R}{2X}. \quad (7-10)$$

Ricordiamo che fin qui tutte le approssimazioni erano basate su $b \gg 1$, che nel caso del Sole è corretta per 5 ordini di grandezza.

Ritardo fra pianeti: gli esperimenti

Se siamo interessati alla propagazione della luce da un pianeta a un altro, anche R è molto maggiore di b ($R/b = 220$ nel caso della Terra); diventa quindi lecita un'ulteriore approssimazione, consistente nel confondere X con R : infatti l'errore relativo è di secondo ordine in b/R . Allora la (7-10) si semplifica ancora:

$$t(R) = R + \ln \frac{2R}{b} + \frac{1}{2}. \quad (7-11)$$

Il primo termine è il tempo "newtoniano": quello necessario per percorrere la distanza R alla velocità $c = 1$; gli altri due termini danno il ritardo prodotto dalla curvatura dello spazio-tempo.

A titolo di esempio, consideriamo una sorgente sulla Terra, con luce che passa radente al Sole: allora $\ln(2R/b) = 6.1$. L'unità di tempo è, al solito, circa $10 \mu\text{s}$; quindi il ritardo ammonta a $66 \mu\text{s}$.

Gli esperimenti sono stati condotti, da Shapiro e coll., non con luce visibile, ma con microonde, e con due diverse tecniche: eco radar e transponder. La differenza è questa: mentre nel primo caso si riceve il segnale riflesso dalla superficie di un pianeta (per es. Venere o Mercurio) nel secondo un rice-trasmettitore riceve il segnale, lo amplifica e lo riemette verso la Terra. Il primo sistema è più semplice, ma ha due inconvenienti: l'eco di ritorno è molto debole, e hanno grande influenza le caratteristiche della superficie del pianeta.

Il vantaggio del secondo sistema è evidente, ma bisogna disporre del transponder. In una prima fase si sono usati transponder a bordo di sonde spaziali, ma nasceva la difficoltà che le posizioni delle sonde sono difficili da calcolare, perché le sonde, a causa della piccola massa, sono soggette a numerose perturbazioni, anche non gravitazionali. In una seconda fase si è perciò cercato d'installare i transponder su di un pianeta: questo è stato possibile per Marte, a partire dal 1976.

In esperimenti del genere si ha un ritardo circa 4 volte maggiore di quello che abbiamo calcolato, cioè intorno a $260 \mu\text{s}$. Questo per un segnale che passi radente al Sole. Occorre però osservare due cose:

- a) Poiché i pianeti si muovono, la distanza fra la traiettoria del segnale e il centro del Sole varia. La legge di variazione è ben nota, dato che le orbite dei pianeti sono note con grande precisione. Si può quindi inserire nella (7-11), al posto di b , il suo valore a tempi successivi, e confrontare la curva risultante con le misure.
- b) Sebbene in linea di principio possibile, è molto raro che la congiungente Terra-pianeta arrivi a essere radente al Sole. Questo perché le orbite dei

pianeti non stanno tutte esattamente nello stesso piano. Perciò solo raramente riusciremo ad avere b uguale al raggio del Sole. Fortunatamente la dipendenza da b è logaritmica, per cui anche se b è più grande l'effetto non viene molto ridotto.

D'altra parte il passaggio della radiazione radente al Sole presenta un inconveniente: la regione attorno al Sole non è vuota di materia, ma è occupata da un plasma (la *corona* solare). Ovviamente il plasma influisce sulla propagazione delle onde e.m., sia nel senso di alterarne la velocità, sia di causarne una rifrazione (che disturba gli esperimenti di deflessione). Però è nota la dipendenza dell'indice di rifrazione del plasma dalla frequenza della radiazione, e si può quindi calcolarne l'effetto lavorando con due distinte frequenze.

Si noti infine che il nostro calcolo ci ha fornito la variazione nel tempo di Schwarzschild t , che a rigore non è il tempo segnato da un orologio. In un esperimento di eco l'orologio che segna il tempo è situato sulla Terra, di cui è ben nota posizione e moto: perciò la differenza fra t e τ , che è piccola ma non trascurabile, può essere calcolata senza problemi. Tenuto conto di tutto, gli esperimenti hanno confermato la teoria entro lo 0.1%.

Le lenti gravitazionali

La possibilità di un "effetto lente" fu considerata da Lodge fin dal 1919; lo stesso Einstein nel 1936 prevede la possibilità di quelli che oggi sono chiamati "anelli di Einstein," concludendo però che sarebbero stati inosservabili con gli strumenti dell'epoca. Infatti solo da poco più di vent'anni la situazione è cambiata, e si sono avute osservazioni positive.

Occorre distinguere due ambiti: il primo è su scala cosmologica, dove la lente è costituita da un'intera galassia, e la sorgente da un quasar. Oggi sono note molte immagini in cui l'effetto lente è accertato oltre ogni dubbio: in tutti i casi si sono riconosciute immagini multiple della sorgente. Questo tipo di effetto richiede però che la lente consista di una distribuzione estesa di massa (appunto una galassia) e la teoria è più complicata.

Di recente è invece stato preso in esame un caso più semplice, che è quello di cui vogliamo qui occuparci (fig. 7-4): la luce di una sorgente S relativamente lontana (una stella) viene deviata da una "microlente" L costituita da una massa piccola e concentrata. Ne segue un'amplificazione nell'intensità della luce ricevuta da un rivelatore R .

Le osservazioni sono state effettuate prendendo come sorgenti stelle nelle Nubi di Magellano (distanti circa 50 kpc) e come possibili lenti oggetti dell'alone galattico, quindi a decine di kpc da noi. Lo scopo della ricerca è proprio di rivelare la presenza di MACHOs (MASSive Compact Halo Objects), ossia corpi non visibili con altri mezzi. Possibili candidati:

- nane brune, cioè “stelle mancate” perché di massa troppo piccola
- nane bianche spente
- stelle di neutroni
- buchi neri.

Schematizzazione del problema

Dobbiamo considerare tre punti: la sorgente S, la lente L, il rivelatore R. Indichiamo con D_S , D_R , le distanze della lente rispettivamente dalla sorgente e dalla proiezione R' del rivelatore sulla retta SL; con r la distanza RR' .

Un raggio che da S raggiunge R dopo essere stato deflesso da L può essere ai nostri scopi rappresentato dai due asintoti, che sono due rette passanti rispettivamente per S e per R, e formanti tra loro un angolo $\vartheta = 2/b$ ((7-7), (7-8)). Possiamo assumere che b sia l'ordinata del punto Q comune ai due asintoti, e pensare LQ perpendicolare a SL: tutte queste posizioni introducono al più errori $O(1/b^2)$. S'intende che supponiamo $b, r \ll D_R, D_S$.

Per gli angoli ϑ_S, ϑ_R si ha:

$$\begin{aligned} \vartheta_S + \vartheta_R &= 2/b \\ D_S \vartheta_S &= b \quad D_R \vartheta_R = b - r \end{aligned}$$

da cui l'equazione per b :

$$b^2 - b r' - b_E^2 = 0 \tag{7-12}$$

avendo posto

$$b_E = \sqrt{\frac{2D_R D_S}{D_R + D_S}} \quad r' = \frac{D_S r}{D_R + D_S}.$$

Il significato di b_E si vede facilmente ponendo $r = 0$ (S, L, R allineati): infatti in tal caso si trova $b = b_E$ (torneremo tra poco su questo caso). Il significato di r' è invece chiaro dalla figura.

L'equazione (7-12) ha le due radici reali

$$b = \frac{1}{2} \left(r' \pm \sqrt{r'^2 + 4b_E^2} \right)$$

che sono una positiva e una negativa. Un valore negativo per b significa che il raggio raggiunge R passando *sotto* alla lente (fig. 7-5) anziché sopra come si era assunto nella fig. 7-4. Dunque in generale ci sono *due raggi* da S a R.

Dal momento che ci sono due raggi che vanno da S a R, possiamo dire che la lente L forma due immagini? Occorre tener presente che si potrà correttamente parlare d'immagine solo se almeno un sottile fascetto di raggi, dopo essere stato deviato dalla lente, passa per un unico punto (immagine *reale*) o se per un unico

punto passano i loro prolungamenti all'indietro (immagine *virtuale*). Si potrebbe dimostrare senza difficoltà che nel nostro caso ciò non accade, neppure approssimativamente: il sistema ottico formato dalla lente è fortemente *astigmatico*. Ciò non produce conseguenze pratiche, perché tutti gli oggetti astronomici sono comunque a grandissima distanza, che può essere considerata infinita rispetto a qualsiasi sistema ottico che venga usato per l'osservazione.

L'anello di Einstein

Fin qui abbiamo limitato la discussione a un unico piano; ciò è lecito in quanto, finché S, L, R non sono allineati, i soli raggi che possono raggiungere R sono quelli che giacciono nel piano di questi tre punti. Fa eccezione il caso di perfetto allineamento ($r = 0$): allora i raggi che raggiungono R non sono soltanto due, ma tutto un cono, la cui semiapertura vale ϑ_R . Dunque in questo caso invece di due immagini si avrà un'intera circonferenza: appunto l'*anello di Einstein*. Il cono interseca il piano per L perpendicolare a SL secondo una circonferenza di raggio b_E : ecco il motivo della notazione usata.

È possibile osservare gli anelli di Einstein? Il problema sta nell'apertura del cono. Occorre una stima per ϑ_R , e questa è legata alle distanze di lente e sorgente: infatti nelle condizioni in cui si forma l'anello si ha

$$\vartheta_R = \frac{b_E}{D_R} = \sqrt{\frac{2D_S}{D_R(D_R + D_S)}}.$$

Ricordiamo ora che come unità di lunghezza si è assunta $2M$ (M massa della lente); tenendo conto di ciò, l'espressione per ϑ_R diventa

$$\vartheta_R = \sqrt{\frac{4MD_S}{D_R(D_R + D_S)}}.$$

Anche se sorgente e lente sono piuttosto vicine, ad es.

$$D_S = D_R = 1 \text{ kpc} = 3 \cdot 10^{16} \text{ km}$$

e se $M = M_\odot = 1.5 \text{ km}$, si trova $\vartheta_R = 10^{-8} \text{ rad} = 0.002''$, al limite delle possibilità attuali di risoluzione. Eppure abbiamo preso una distanza molto favorevole, e c'è da considerare che almeno alcune delle lenti possibili hanno masse decisamente minori del Sole: entrambi i fattori vanno a ridurre l'apertura del cono.

In effetti gli anelli di Einstein sono stati visti, ma in condizioni del tutto diverse: per es. se la lente è una galassia a 1 Gpc, con massa $10^{12} M_\odot$, la semiapertura diventa $1''$. Bisogna osservare che su distanze così grandi non si potrà certo applicare la geometria euclidea, come abbiamo fatto; ma almeno l'ordine di grandezza non è sbagliato.

Le microlenti

Nel caso delle microlenti, ossia oggetti dell'alone galattico e di massa stellare o anche minore, l'osservabilità d'immagini o di anelli di Einstein, come abbiamo visto, è fuori questione. Tuttavia è stato osservato (Pacziański, 1986) che in questo caso si può manifestare un'*amplificazione* della sorgente, e dall'andamento temporale della curva di luce si può ricostruire, in casi favorevoli, posizione e massa della microlente. Vediamo come si può fare una teoria del fenomeno.

Dobbiamo studiare la distribuzione dell'intensità della radiazione che arriva nel piano del rivelatore. A questo scopo, invece del singolo raggio fin qui considerato, bisogna prendere in esame un fascetto, che partendo dalla sorgente illumina una piccola area $d\sigma$. Usando coordinate polari, abbiamo $d\sigma = r dr d\varphi$, e in uscita da S avremo in corrispondenza un piccolo angolo solido $d\Omega = \sin \vartheta_S d\vartheta_S d\varphi$ ($d\varphi$ resta lo stesso, per ragioni di simmetria attorno all'asse SL). Se la sorgente, supposta isotropa, ha luminosità L (potenza totale emessa), la potenza emessa in $d\Omega$ è $L d\Omega/4\pi$, e la stessa potenza arriverà su $d\sigma$.

Viceversa, in assenza di lente la potenza sarebbe stata semplicemente

$$\frac{L}{4\pi} \frac{d\sigma}{(D_R + D_S)^2}.$$

Il rapporto fra le due potenze è l'amplificazione cercata:

$$\begin{aligned} A &= (D_R + D_S)^2 \frac{d\Omega}{d\sigma} = (D_R + D_S)^2 \frac{\sin \vartheta_S d\vartheta_S}{r dr} \simeq (D_R + D_S)^2 \frac{\vartheta_S d\vartheta_S}{r dr} \\ &= \left(\frac{D_R + D_S}{D_S} \right)^2 \frac{b db}{r dr} = \frac{b db}{r' dr'}. \end{aligned} \quad (7-13)$$

Differenziando la (7-12) si ha

$$(2b - r') db = b dr'$$

e sostituendo nella (7-13):

$$A = \frac{b^2}{r' |2b - r'|}. \quad (7-14)$$

Il valore assoluto nella (7-14) è necessario per tener conto che nel caso di raggi che passano sotto L il denominatore è negativo, mentre l'amplificazione è positiva per definizione. Il fatto che esistano due raggi significa che in realtà dovremo sommare in A due contributi, dai due raggi:

$$A = \frac{b_+^2}{r' |2b_+ - r'|} + \frac{b_-^2}{r' |2b_- - r'|}$$

(si sono indicate con b_+ , b_- le due radici della (7-12)).

Dunque:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{b_+^2}{r'(2b_+ - r')} + \frac{b_-^2}{r'(r' - 2b_-)} \\
&= \frac{b_+ - b_-}{r'} \frac{(b_+ + b_-)r' - 2b_+b_-}{-r'^2 - 2(b_+ - b_-)r' - 4b_+b_-} \\
&= \frac{r'^2 + 2b_E^2}{r' \sqrt{r'^2 + 4b_E^2}}. \tag{7-15}
\end{aligned}$$

Dalla (7-15) si vede che per $r' = b_E$, $A = 3/\sqrt{5} \simeq 1.34$; possiamo assumere convenzionalmente questo come un valore di r' che dà amplificazione significativa. Ovviamente l'amplificazione sarà molto maggiore se $r' \ll b_E$, e sembra anzi tendere a ∞ quando $r' \rightarrow 0$; torneremo tra poco su questo punto.

Cerchiamo di stimare le condizioni per avere $r' = b_E$ in un caso realistico. Prendiamo $D_R = 10 \text{ kpc} = 3 \cdot 10^{17} \text{ km}$ (dimensioni ragionevoli dell'alone galattico); $D_S = 50 \text{ kpc} = 1.2 \cdot 10^{18} \text{ km}$, come si avrà se la sorgente sta nella Grande Nube di Magellano; $M = 0.01 M_\odot = 0.015 \text{ km}$ (una nana bruna). Allora

$$b_E = \sqrt{\frac{4MD_R D_S}{D_R + D_S}} = 1.2 \cdot 10^8 \text{ km} \tag{7-16}$$

(poco meno di 1 UA).

Per valutare la fattibilità di una campagna di osservazione, occorre di più: serve una stima della probabilità di avere un allineamento entro questa distanza, cosa possibile se si fanno ipotesi sul numero di stelle sorgente che si possono esaminare, e sulla densità degli oggetti di alone candidati a fare da microlenti. Non possiamo qui dare ulteriori dettagli, ma la stima risulta incoraggiante.

La stima (7-16) di b_E permette di rispondere al problema posto dal possibile infinito nella (7-15). In primo luogo, osserviamo che alla (7-15) siamo arrivati assumendo la sorgente puntiforme, il che certamente non è. Occorrerebbe quindi rifare il calcolo tenendo conto della sua estensione, ed è intuitivo che ciò farebbe sparire la singolarità. Ma d'altra parte le dimensioni possibili della sorgente (una stella) sono generalmente piccole rispetto al valore di b_E , e questo è tanto più vero se si tiene presente che non conta il valore reale di r ma la sua proiezione r' . Perciò, a parte il caso di stelle giganti, o di microlenti di massa ancora più piccola, o di allineamenti assai precisi (ma rari), non abbiamo bisogno di correggere la (7-15).

Andamento temporale

Il fenomeno di microlente è osservabile solo in quanto *varia nel tempo*: ciò accade perché tutti gli oggetti coinvolti (L, R, S) si muovono. Perciò la grandezza r' varia, e di conseguenza varia l'amplificazione A . Senza approfondire il discorso, accenniamo a una possibile stima della scala di tempo in gioco. Si può stimare, per oggetti galattici, che le velocità (trasversali) relative siano dell'ordine di 200 km/s. L'evento avrà una durata stimabile dal tempo occorrente per attraversare una distanza dell'ordine di b_E : col valore (7–16), si trova $6 \cdot 10^5$ s, ossia 7 giorni. Il tempo va come la radice della massa della microlente.

Si vede quindi come andrà condotta la campagna di ricerca: si dovranno seguire un grande numero di stelle, per un tempo abbastanza lungo (dell'ordine dell'anno). Si cercherà un aumento di luminosità, e successiva discesa. Il problema è come distinguere questa variazione da quella di una stella variabile (fenomeno tutt'altro che raro). I criteri sono essenzialmente due:

- a) L'andamento temporale per l'effetto microlente è ben determinato a partire dalla (7–15); in particolare dev'essere esattamente simmetrico nel tempo, cosa che di solito non è per le curve di luce delle variabili.
- b) L'effetto, come del resto la deflessione gravitazionale, è *non dispersivo*: si presenta identico a tutte le lunghezze d'onda. Invece in una variabile è normale un cambiamento delle caratteristiche spettrali della luce.

Le ricerche sono in corso da oltre 10 anni, e già nel 1993 si sono avuti i primi casi positivi.