CAPITOLO 6

Richiami di meccanica lagrangiana: le equazioni di Lagrange

In questo capitolo vogliamo introdurre e studiare il fondamentale concetto di *geodetica* dello spazio-tempo, di cui abbiamo già fatto un uso informale nei cap. precedenti. Il modo più semplice per arrivarci è di sfruttare l'analogia con la meccanica lagrangiana, e per questo motivo cominciamo col riassumerne i risultati principali.

Ci occupiamo qui di un sistema meccanico composto di un numero finito di *punti materiali* o di *corpi rigidi*, eventualmente soggetti a *vincoli olonomi*, e sui quali agiscono *forze attive* (interne o esterne) *conservative*. In queste ipotesi la configurazione del sistema può essere descritta da un certo numero n di *coordinate lagrangiane* $(q^1 \ldots\ q^n)$; il che equivale a dire che lo *spazio delle configurazioni* $\mathcal{C}$ è una varietà n-dimensionale, che possiamo al solito supporre C^∞.

Sarà sufficiente limitarsi al caso dei sistemi *autonomi*: quelli nei quali né i vincoli né le forze attive dipendono dal tempo.

L'energia cinetica T del sistema si scrive allora come una forma quadratica definita positiva nelle velocità generalizzate (derivate rispetto al tempo delle coordinate lagrangiane):

$$T = \tfrac{1}{2}\, a_{ik}\, \dot{q}^i \dot{q}^k \tag{6–1}$$

dove i coefficienti a_{ik} sono in generale funzioni delle q. Inoltre, dato che le forze sono conservative, è definita l'energia potenziale $V(q^1 \ldots\ q^n)$. Si definisce poi la *lagrangiana*

$$L = T - V$$

che per quanto detto è funzione solo delle q, $\dot{q}$.

Si dimostra che le equazioni del moto per il sistema hanno la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

(*equazioni di Lagrange*). Queste sono un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine, che possono essere poste in *forma normale*, ossia risolte rispetto alle $\ddot{q}$. Una soluzione del sistema è determinata univocamente assegnando, a un certo istante, i valori delle q e delle $\dot{q}$.

È importante ricordare che le equazioni di Lagrange hanno carattere *covariante*. Ciò vuol dire che se si cambiano coordinate le equazioni mantengono la stessa forma, prendendo come nuova lagrangiana la funzione delle nuove coordinate (e loro derivate) che assume lo stesso valore della vecchia per valori corrispondenti delle coordinate (lagrangiana invariante *in valore*). In termini più astratti, stiamo dicendo che L non è in realtà funzione delle q, $\dot{q}$, ma del punto in $\mathcal{C}$ (o più esattamente nel *fibrato tangente* $T\mathcal{C}$).

Nelle ipotesi che abbiamo fatto (forze conservative, sistema autonomo) esiste sempre l'*integrale primo dell'energia*: lungo una soluzione delle equazioni di Lagrange la funzione $H = T + V$ assume valore costante: $H = E$.

Il principio di Hamilton–Jacobi

La soluzione delle equazioni di Lagrange determina le funzioni $q^i(t)$, ossia una *curva* nello spazio $\mathcal{C}$ delle configurazioni. In generale, per curva definita in una varietà $\mathcal{C}$ s'intende un'applicazione (C^∞) $\gamma : I \to \mathcal{C}$, dove I è un intervallo della retta reale.

Si noti che le curve così definite sono *parametrizzate*: una curva γ non è solo un insieme di punti in $\mathcal{C}$. Questo insieme, l'immagine dell'applicazione γ, è detto *sostegno* della curva. È la stessa distinzione che occorre fare in meccanica elementare tra *curva oraria* e *traiettoria.*

La meccanica lagrangiana ammette una formulazione mediante un principio variazionale: il *principio di Hamilton–Jacobi.* Si parte dall'insieme Γ delle curve γ da $[t_1, t_2]$ in $\mathcal{C}$, tali che $\gamma(t_1) = \mathrm{A}$, $\gamma(t_2) = \mathrm{B}$, con A, B punti fissati di $\mathcal{C}$. Su Γ si definisce un funzionale S (*azione*):

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt. \tag{6–2}$$

È importante capire bene il significato della (6–2). Assegnare una curva γ equivale a dare le q^i come funzioni del parametro reale t (equazioni parametriche della curva) e quindi le loro derivate. Allora per ogni t è dato il valore di L: l'integrale ha senso e fornisce un numero reale, che dipende da γ. Si considerano solo le curve tali che $q^i(t_1) = q^i_{\mathrm{A}}$, $q^i(t_2) = q^i_{\mathrm{B}}$, ossia *tra estremi fissi.*

Si esamina poi l'insieme delle curve $\gamma' \in \Gamma$ *vicine a* γ, il che vuol dire che le differenze fra le q, $\dot{q}$ calcolate su γ e su γ' allo stesso t non superano, per ogni t, un certo scarto prefissato ε. Si calcola la *variazione* $\delta S = S(\gamma') - S(\gamma)$.

Si dice che la curva γ è *estremale* per S se per ogni γ' vicina a γ è sempre $\delta S = \mathrm{O}(\varepsilon^2)$, ossia se il termine di prim'ordine nella variazione si annulla. Ed ecco il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perché γ sia estremale, è che essa sia soluzione delle equazioni di Lagrange.

Nota: Sebbene il principio di H–J venga spesso chiamato "principio di minima azione," in realtà non è affatto garantito in generale che S sia minimo su γ. Lo si può dimostrare solo se i punti A, B sono abbastanza vicini.

Coordinate cicliche e teorema di Noether

Assunto un SC (lagrangiane) in $\mathcal{C}$, se L non dipende da una delle q quella coordinata si dice *ciclica.* Per fissare le idee, assumiamo che la coordinata ciclica sia q^1.

Allora l'equazione di Lagrange per q^1 diventa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = 0$$

e ci dice che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = \text{cost.} \tag{6–3}$$

In corrispondenza a ogni coordinata ciclica si ha dunque un *integrale primo.*

Abbiamo così verificato un caso particolare del *teorema di Noether*, che concerne l'esistenza di un'*invarianza* della lagrangiana, e la corrispondente esistenza di un integrale primo.

Consideriamo una *trasformazione infinitesima* delle coordinate lagrangiane:

$$q^i \mapsto {q'}^i = q^i + \xi^i(q). \tag{6–4}$$

Sappiamo che la lagrangiana è invariante in valore:

$$L'(q', \dot{q}') = L(q, \dot{q}).$$

Ma può accadere che L' sia la stessa funzione delle q', $\dot{q}'$ che L è delle q, $\dot{q}$ (invarianza *in forma*). Il teorema di Noether dice:

Se la lagrangiana è invariante in forma per la trasformazione infinitesima (6–4), *allora la funzione* $F(q, \dot{q})$ *definita da*

$$F(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \xi^i$$

è un integrale primo.

Il caso della coordinata ciclica si ottiene come *invarianza per traslazioni* della lagrangiana. Consideriamo infatti la trasformazione di coordinate

$$q^1 \mapsto {q'}^1 = q^1 + \varepsilon, \qquad q^i \mapsto {q'}^i = q^i \quad \text{per} \quad i > 1$$

dove ε non dipende dalle q. Si avrà, data l'invarianza in valore di L:

$$L'({q'}^1, \ldots) = L(q^1, \ldots).$$

Ma l'invarianza in forma richiede

$$L'({q'}^1, \ldots) = L({q'}^1, \ldots)$$

e quindi
$$L(q^1,\ldots) = L({q'}^1,\ldots) = L(q^1+\varepsilon,\ldots).$$
Questa è possibile solo se L non dipende da q^1, ossia se q^1 è ciclica.

Il teorema di Noether ci dice che è un integrale primo
$$F = \frac{\partial L}{\partial \dot q^1}\,\varepsilon$$
e quindi lo è anche $\partial L/\partial \dot q^1$, come avevamo trovato direttamente.

Nota storica: Il "Noether" del teorema è in realtà Emmy Noether, vissuta nei primi decennni del secolo scorso e allieva di Hilbert. È uno dei rarissimi casi di donne il cui nome è rimasto famoso nella storia della matematica (e della fisica).

Lo spazio delle configurazioni come varietà riemanniana

Dato che l'energia cinetica è definita positiva, la si può usare per definire una metrica su $\mathcal{C}$:
$$ds^2 = a_{ik}\,dq^i\,dq^k. \tag{6–5}$$
In tal modo $\mathcal{C}$ acquista la struttura di *varietà riemanniana* (Cap. 3).

Con la metrica si può definire la *lunghezza* di una curva: se $q^i = q^i(t)$ sono le equazioni parametriche della curva γ, si definisce
$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a_{ik}\,\dot q^i \dot q^k}\,dt. \tag{6–6}$$
La lunghezza è ovviamente un funzionale sulle curve.

Si può riscrivere la (6–6) in un modo interessante osservando che su una curva la (6–5) diventa
$$ds^2 = a_{ik}\,\dot q^i \dot q^k\,dt^2 \tag{6–7}$$
per cui l'integrando in (6–6) è proprio ds:
$$l(\gamma) = \int_\gamma ds.$$
Questa forma giustifica intuitivamente la definizione di lunghezza; ma soprattutto dimostra che *la lunghezza di una curva è indipendente dalla parametrizzazione.*

Geodetiche di una varietà riemanniana

Su qualsiasi varietà riemanniana, e in particolare su $\mathcal{C}$, definiamo *geodetica* una curva che ha *lunghezza estremale* nell'insieme delle curve con gli stessi estremi.

Anche in questo caso, come per il principio di H–J, va tenuto presente che la geodetica tra due punti dati A e B non è detto che esista, né che sia unica. Si dimostra però che per ogni A esiste un intorno $\mathcal{I}$ tale che se B $\in \mathcal{I}$ allora la geodetica esiste ed è unica. Non solo: in questo caso la lunghezza è realmente *minima*.

In secondo luogo, confrontando (6–6) con l'espressione (6–1) dell'energia cinetica si ha

$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T}\, dt \tag{6–8}$$

che stabilisce una connessione tra il concetto puramente geometrico di lunghezza e quello meccanico di energia cinetica. Ma la connessione può essere approfondita per una particolare classe di sistemi: quelli in *moto libero*.

Sistemi in moto libero

Chiameremo *sistema in moto libero* un sistema sul quale non agiscono forze attive, né interne né esterne, ma solo al più le reazioni vincolari. Allora $V = 0$, $L = T = H$, quindi in particolare *l'energia cinetica è costante* durante il moto.

Esempio semplice di sistema in moto libero è un punto materiale vincolato a muoversi su una superficie, in assenza di forze esterne (in particolare, in assenza di peso). Un altro esempio assai meno banale è il moto di un corpo rigido attorno al suo centro di massa: in questo caso la presenza della gravità non ha influenza sul moto.

Per un sistema in moto libero la (6–2) si scrive

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} T\, dt. \tag{6–9}$$

Ma dato che T è costante, questa si può riscrivere

$$S(\gamma) = \sqrt{\frac{T}{2}}\, l(\gamma) \qquad (6–10).$$

La (6–10) suggerisce che quando è estremale $S(\gamma)$ lo sia anche $l(\gamma)$: *la traiettoria in $\mathcal{C}$ di un sistema in moto libero è una geodetica.* A rigore la conclusione non sembra corretta, perché T è costante solo sulla curva estremale, ma non sulle curve vicine; lasciamo per esercizio dimostrare che si tratta davvero di una geodetica.

Suggerimento: Provare che le equazioni di Lagrange per T implicano quelle per $\sqrt{2T}$. Vale il viceversa?

Geodetiche nello spazio-tempo

Esiste un'ovvia difficoltà a trasferire la definizione di geodetica come curva di lunghezza estremale a una varietà semiriemanniana come lo spazio-tempo: sta nel fatto che la metrica *non è definita positiva*. Una curva generica può essere in parte di tipo tempo, in parte di tipo spazio o di tipo luce: nel primo caso nessun problema, ma nel secondo l'espressione sotto radice nella definizione di lunghezza è negativa, e nel terzo caso è nulla.

La relazione vista tra azione e lunghezza suggerisce però una via d'uscita: dal momento che l'azione si può definire anche se la metrica non è definita positiva, e che una curva estremale per l'azione è senz'altro una geodetica in una varietà riemanniana, prendiamo come definizione di geodetica una *curva con azione estremale*.

Vediamo ora meglio come si procede. Riprendiamo l'espressione (3–2) della metrica:

$$d\tau^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta. \tag{6–11}$$

Su una curva γ, di equazioni parametriche $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$, la (6–11) diventa

$$d\tau^2 = g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\, d\lambda^2 \tag{6–12}$$

dove $\dot{x}^\alpha$ sta per $dx^\alpha/d\lambda$.

È evidente l'analogia tra la (6–12) e la (6–7): il parametro λ ha preso il posto di t, e le x^α quello delle q^i; invece di a_{ik} abbiamo $g_{\alpha\beta}$ (si noti che le $g_{\alpha\beta}$ non dipendono da λ).

Poniamo allora

$$W = \tfrac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta; \tag{6–13}$$

W è l'analogo dell'energia cinetica T, e possiamo quindi usarlo per definire l'azione, come in (6–8):

$$S(\gamma) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} W\, d\lambda. \tag{6–14}$$

Definiamo *geodetica* una curva per la quale $S(\gamma)$ è *estremale*. Possiamo applicare tutti i risultati validi per i sistemi in moto libero:

1) le geodetiche sono soluzioni di equazioni di Lagrange, con lagrangiana W (*equazioni delle geodetiche*)

2) W è costante lungo una geodetica
3) se W è invariante per una trasformazione di coordinate, ne segue (teorema di Noether) un integrale primo, ossia una funzione delle x, $\dot{x}$ che assume valore costante lungo ogni geodetica.

Commentiamo le proprietà appena scritte delle geodetiche, lasciando per il momento da parte la 1), su cui torneremo tra poco. La 2) è importante per due ragioni: la prima è che ci fornisce una costante, utilizzabile per abbreviare la ricerca delle geodetiche; la seconda è che il segno di W distingue una curva di tipo tempo ($W > 0$), di tipo luce ($W = 0$), di tipo spazio ($W < 0$), come si vede dalla (6–11). Quindi il fatto che W è costante lungo una geodetica assicura che il tipo di una geodetica è fisso: esistono geodetiche di tipo tempo, di tipo luce e di tipo spazio, ma non geodetiche in parte di un tipo e in parte di un altro. A noi ovviamente interessano quelle di tipo tempo e di tipo luce.

Quanto alla 3), un'invarianza di W è come dire un'invarianza della metrica (il termine tecnico usato dai matematici è "isometria"). Ogni volta che scopriamo un'invarianza, abbiamo un integrale primo (in aggiunta a W, che c'è sempre). Dato che siamo in 4 dimensioni, bastano 3 invarianze indipendenti per risolvere il problema delle geodetiche; ma in casi semplici ne possono bastare anche meno, come vedremo.

In particolare:

Se il tensore metrico non dipende dalla coordinata x^α, allora

$$p_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\beta \tag{6–15}$$

rimane costante lungo ogni geodetica.

La dimostrazione segue subito ricordando la (6–3) e l'espressione (6–13) della lagrangiana W.

La (6–15) ci sarà molto utile in seguito.

Equazioni delle geodetiche e vettore tangente

Come abbiamo detto, le geodetiche sono soluzioni di equazioni di Lagrange (le *equazioni delle geodetiche*) che sono equazioni differenziali di second'ordine; potremmo quindi sempre trovare le geodetiche risolvendo quelle equazioni. In casi estremi può essere l'unica strada praticabile, ma come vedremo subito, in molti casi ci sono strade più semplici. Di fatto noi non ne avremo mai bisogno.

L'esistenza di un'equazione differenziale è però importante da un altro punto di vista. La definizione di geodetica che abbiamo data la caratterizza come una curva che unisce due punti assegnati di $\mathcal{M}$. Ma il fatto che una geodetica sia anche soluzione di un sistema di equazioni differenziali del second'ordine implica che si può individuare una geodetica assegnando il *punto di partenza* e il *vettore tangente.*

Ciò significa che le equazioni parametriche $x^\alpha = x^a(\lambda)$ sono univocamente determinate se si conoscono i valori iniziali

$$x^\alpha(\lambda_1) = x^\alpha_1, \qquad \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_1} = u^\alpha_1$$

delle coordinate e delle loro derivate prime.

Assegnare le derivate prime significa appunto assegnare il vettore tangente, e si potrebbe prendere questa come definizione del nuovo ente geometrico. Va però tenuto presente che le componenti u^α del vettore tangente a una geodetica (o più in generale a una curva) *dipendono dal* SC, non hanno quindi carattere *intrinseco*: esse hanno una ben precisa legge di trasformazione per cambiamento di SC (trasformazione *controvariante*) che a noi non interessa precisare, e complica un po' l'uso delle componenti nei ragionamenti geometrici. È in realtà possibile dare del vettore tangente una definizione intrinseca, ma qui evitiamo di approfondire.

Per sottolineare il carattere intrinseco del vettore tangente, potrà essere utile in qualche occasione usare un simbolo che non si appoggi sulla scelta del SC. Ci serviremo del carattere grassetto: **u**, **v**...

Il parametro affine e il tempo proprio

Il parametro λ che compare nella definizione (6–14) dell'azione prende il nome di "parametro affine": ricordiamo che una geodetica è una curva parametrizzata, nel senso che determinare una geodetica non significa solo conoscerne il sostegno, ma anche la dipendenza delle coordinate dal parametro affine.

Il parametro affine ha però un certo grado di arbitrarietà, nel senso che spieghiamo subito. Sia γ una geodetica, che passa per i punti A, B di $\mathcal{M}$ ai valori λ_1, λ_2 del parametro affine, e siano $x^\alpha = f^\alpha(\lambda)$ le sue equazioni parametriche. Consideriamo ora la curva γ' definita dalle equazioni parametriche

$$x^\alpha = f^\alpha(a\lambda + b) \tag{6–16}$$

con a, b costanti reali fissate a piacere ($a \neq 0$). È facile verificare che γ' passa per A quando $\lambda = (\lambda_1 - b)/a$ e passa per B quando $\lambda = (\lambda_2 - b)/a$. Non solo: si vede che γ e γ' *hanno lo stesso sostegno.*

Se sostituiamo le (6–16) nella definizione (6–14) di S troviamo facilmente che $S(\gamma') = a^2 S(\gamma)$, e da qui non è difficile dimostrare che S è estremale anche per γ', ossia che anche γ' *è una geodetica.* Ma *non è la stessa geodetica*, proprio perché la parametrizzazione è cambiata.

In questo senso si può dire che il parametro affine è definito a meno di una trasformazione lineare: da una geodetica si passa a un'altra con lo stesso sostegno. L'analogia meccanica aiuta a capire la situazione: è come avere a che fare con due moti nei quali la stessa traiettoria viene percorsa a diversa velocità e con diverso istante iniziale.

Consideriamo ora il caso particolare delle geodetiche di tipo tempo. Sappiamo che in questo caso $W > 0$, per cui dalla (6–12) si ha

$$d\tau = \sqrt{2W}\, d\lambda \tag{6–17}$$

(abbiamo scelto il segno positivo per la radice, il che equivale a dire che τ cresce con λ). Inoltre W è costante, e la (6–17) può essere integrata:

$$\tau = \sqrt{2W}\, \lambda + \tau_0.$$

Dunque anche τ è un parametro affine: la *lunghezza* della geodetica. Il significato fisico di τ ci è noto: è il tempo segnato da un orologio che ha come curva oraria quella geodetica (*tempo proprio*).

Se si adotta il tempo proprio come parametro affine in una geodetica di tipo tempo, la (6–17) mostra che $2W = 1$: viene fissato il valore della costante W. Di regola faremo questa scelta quando avremo a che fare con geodetiche di tipo tempo.

Si noti che invece non si può procedere allo stesso modo con le geodetiche di tipo luce, perché queste sono di *lunghezza nulla*: $d\tau = 0$. Bisogna perciò mantenere un parametro affine λ, con l'arbitrarietà che abbiamo già esaminata.

Come già accennato, per una curva di tipo tempo ha senso definire una lunghezza, e le geodetiche sono *estremali* per la lunghezza tra due punti fissi. Abbiamo detto nel Cap. 2 che in questo caso non vale la proprietà di minimo: al contrario la geodetica ha lunghezza *massima* (sempre per punti B in un opportuno intorno di A). Dobbiamo tralasciare la dimostrazione; accenniamo soltanto che essa ha a che fare con la disuguaglianza triangolare, che per vettori di tipo tempo ha verso opposto che nella geometria euclidea, e anche con la disuguaglianza di Schwartz, che anch'essa ha verso opposto nella geometria di Lorentz–Minkowski rispetto alla metrica euclidea.