CAPITOLO 3

Relatività ristretta e relatività generale

Le argomentazioni sviluppate nelle ultime pagine del cap. precedente hanno motivato l'idea di uno spazio-tempo curvo a partire da esempi costruiti sulla gravitazione newtoniana. Può sorgere quindi la domanda: dove la RG si discosta dalla teoria di Newton? E ancora: che rapporto c'è con la RR? Vediamo di dare una prima risposta, anche se un chiarimento più completo potrà venire solo dallo sviluppo di tutto il corso.

Abbiamo potuto basarci sulla gravitazione newtoniana per due ragioni:

a) nei nostri esempi la curvatura dello spazio-tempo risultava molto piccola ($M/r \ll 1$)

b) il moto dei corpi considerati era assai lento ($v \ll 1$).

Quando non valgono queste ipotesi, occorre far uso pieno delle equazioni di Einstein, di cui la teoria newtoniana è un caso limite per *campi deboli* e *basse velocità.*

Non c'è niente da spiegare quanto alle basse velocità, mentre è il caso di spendere qualche parola sul concetto di "campo debole." Campo debole equivale a piccola curvatura, e possiamo rifarci alla definizione (2–1) per capire che cosa ciò significa. Avremo piccola curvatura quando le due geodetiche si allontanano o si avvicinano poco; ma dato che lo scostamento dipende da s, dovremo stabilire un limite $s_{\max}$ per s. Lo scostamento andrà poi commisurato alla distanza iniziale delle geodetiche, ossia chiederemo che lo scostamento $\Delta\xi$ sia piccolo rispetto a ξ_o. Dalla (2–1) si vede che

$$|\Delta\xi| \simeq \tfrac{1}{2}\,\xi_0\,\frac{s_{\max}^2}{a^2}$$

e quindi sarà $|\Delta\xi| \ll \xi_0$ sse $s_{\max}^2 \ll a^2$.

Questo è dunque il criterio: curvatura piccola significa raggio di curvatura grande rispetto alla distanza lungo la quale si fanno le misure. Più esattamente, il confronto va fatto tra i quadrati.

Passando allo spazio-tempo il discorso non cambia: campo debole significa raggio di curvatura grande rispetto all'estensione di spazio-tempo in cui possiamo fare le misure. Per es. nel caso della Terra è ragionevole confrontare il raggio di curvatura con le dimensioni della Terra stessa (o meglio, i loro quadrati). La condizione di campo debole sarà quindi

$$\frac{M}{r^3} \ll \frac{1}{r^2} \quad \text{ossia} \quad M \ll r.$$

Si vede che questa condizione è soddisfatta per 9 ordini di grandezza.

Quanto alla RR, per ora l'abbiamo invocata come l'approssimazione valida in un RIL, ossia in regioni di spazio-tempo sufficientemente piccole, in un rif. in caduta libera. Ovviamente la RG si ridurrà alla RR in un altro caso: quando si possano trascurare gli effetti gravitazionali. O perché si assume che non siano presenti delle sorgenti del campo (masse) oppure perché queste siano abbastanza lontane. In tali casi lo spazio-tempo è *piatto* (non curvo) e si può usare la metrica di Lorentz–Minkowski (v. dopo) non solo localmente, ma anche in regioni estese.

Nel seguito capiterà a volte di parlare di "effetti di RR" oppure di "effetti di RG." Con la prima espressione intenderemo tutto ciò che dipende da moti con velocità non piccole rispetto a quella della luce; useremo invece la seconda per riferirci alle conseguenze osservabili della curvatura dello spazio-tempo. Va però sempre tenuto presente che a rigore la RG include entrambi i campi: anche i comuni effetti relativistici sono ricavabili dalle equazioni della RG. Ci sono poi casi in cui le due situazioni (alte velocità, curvatura non trascurabile) si presentano insieme e producono effetti strettamente intrecciati.

La struttura geometrica dello spazio-tempo

I punti dello spazio-tempo corrispondono fisicamente agli *eventi*: fenomeni fisici ben localizzati nello spazio e nel tempo (puntiformi alla scala cui siamo interessati). La struttura e le proprietà dello spazio-tempo sono interamente determinate dalla rete degli eventi: un evento individua lo *hic et nunc* e la geometria dello spazio-tempo è caratterizzata dalla conoscenza della "distanza" fra tutte le coppie di eventi: quella che chiamiamo la *metrica*.

La matematizzazione della RG si basa su un assioma (il cui enunciato è per ora incompleto):

Lo spazio-tempo è una varietà 4-dimensionale.

Indicheremo questa varietà con $\mathcal{M}$, in onore di Minkowski, che per primo ha introdotto l'idea per la RR (1908).

Detto in termini semplici, ciò significa che è possibile individuare un evento (punto di $\mathcal{M}$) mediante 4 coordinate. Ma occorre qualche cautela: non è detto che sia sempre possibile estendere un unico sistema di coordinate (SC) all'intera $\mathcal{M}$. In generale un dato SC può essere applicato a un *aperto*, e si assume che $\mathcal{M}$ possa essere ricoperta da una famiglia di tali aperti (nei casi che ci potranno interessare, ne basta in realtà un numero finito).

Occorre ancora definire più esattamente un SC. Un SC sull'aperto $\mathcal{A}$ di $\mathcal{M}$ è un'applicazione biunivoca e bicontinua (un *omeomorfismo*) di $\mathcal{A}$ su un aperto di $\mathbb{R}^4$. Quest'applicazione si chiama anche una *carta*. L'insieme delle carte si chiama (ovviamente!) un *atlante*.

Dunque le coordinate sono funzioni a valori reali definite su un aperto $\mathcal{A}$ di $\mathcal{M}$: le indicheremo genericamente con $\{x^\alpha\}$ ($\alpha = 0, \ldots, 3$).

È importante precisare come si raccordano tra loro SC diversi. Notiamo che due SC possono essere diversi o perché appartengono a carte diverse di uno stesso atlante, o perché appartengono addirittura ad atlanti distinti. In ogni caso se i due aperti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, domini dei due SC $\{x^\alpha\}$ e $\{y^\beta\}$, hanno intersezione non vuota, ha senso chiedersi per i punti di $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in che relazione siano le coordinate di uno stesso punto.

In altre parole, ci stiamo interessando delle possibili *trasformazioni di coordinate*: le $\{y^\beta\}$ viste come funzioni delle $\{x^\alpha\}$ o viceversa. Dalla stessa definizione, è certo che queste funzioni sono continue e invertibili; noi richiederemo la condizione molto più forte che siano C^∞. Il motivo è che così non dovremo mai preoccuparci dell'esistenza delle derivate che potranno occorrerci, mentre non ci sono situazioni fisicamente significative che restano escluse da questa condizione.

La struttura matematica di cui avremo bisogno è in realtà più ricca: ci torneremo alla fine del capitolo.

È bene sottolineare ancora che nello spazio-tempo (come pure in qualsiasi altra varietà) le coordinate sono *arbitrarie* e quindi come tali non hanno necessariamente un significato, né geometrico né tanto meno fisico. Sono soltanto delle *etichette*, usate per distinguere tra loro i punti. È anche vero che spesso si scelgono le coordinate in modo da adattarsi bene alla geometria della varietà: per es. alla sua simmetria, se c'è; e nel caso dello spazio-tempo non di rado le coordinate possono avere un significato fisico semplice; ma questo non è sempre vero e non è necessario. In ogni caso, quale sia il significato geometrico e fisico delle coordinate lo si può ricavare soltanto dallo studio della varietà: ne vedremo diversi esempi nel seguito.

Esempi di varietà

Può essere utile illustrare le cose appena dette su esempi semplici di varietà 2-dimensionali. Consideriamo il normale piano euclideo, una sfera S^2 immersa in $\mathbb{R}^3$, e infine un toro, ancora immerso in $\mathbb{R}^3$.

Si tratta sempre di varietà 2-dimensionali (superfici), ma non tra loro omeomorfe: non esiste nessun'applicazione biunivoca e bicontinua della sfera sul piano (si noti bene: non si richiede neppure che l'applicazione conservi le distanze). Lo stesso accade per il toro, e anche fra il toro e la sfera.

Il piano

Nel caso del piano è banale che un solo SC (una sola carta) è sufficiente: per es. le coordinate cartesiane. Però sul piano si usano spesso coordinate diverse; per es. quelle polari. Ora qui le cose si complicano, perché se si vogliono usare le coordinate polari *non lo si può fare con una sola carta*: ne occorrono almeno due.

La ragione sta in due proprietà "antipatiche" delle coordinate polari (r, φ). La prima è la singolarità nell'origine. È noto che per $r = 0$ l'angolo φ è indeterminato: ciò vuol dire che a un unico punto del piano corrispondono infinite coppie (r, φ), il che è quanto dire che l'applicazione che definisce le coordinate non è biunivoca in quel punto.

La seconda difficoltà ha ancora a che vedere con φ, ma in un altro senso: sta nel fatto che se si fa un giro attorno all'origine si ritorna al punto di partenza, ma con φ aumentato di 2π. Abbiamo quindi ancora una volta un'applicazione non biunivoca.

Si risolvono entrambe le difficoltà tagliando il piano lungo una semiretta per l'origine: per es. il semiasse negativo delle ascisse, il che vuol dire escludere il valore 0 per r, e definire la coordinata φ solo nell'intervallo aperto $(-\pi, \pi)$ (fig. 3–1). Così non abbiamo più a che fare con l'intero piano, ma a questo si rimedia facilmente aggiungendo una nuova carta per una semistriscia attorno alla semiretta di taglio (fig. 3–2).

La sfera

Non esiste un SC che ricopra tutta la sfera senza singolarità. Si noti che basta togliere alla sfera un solo punto, perché diventi omeomorfa al piano, e quindi ammetta un atlante formato di un'unica carta. Lo si può vedere ad es. con la *proiezione stereografica* (fig. 3–3). Questa proiezione stabilisce un omeomorfismo tra piano e sfera, con l'eccezione del polo di proiezione.

Ma se si vuole dare un atlante per la sfera, occorrono almeno due carte. Possono essere ad es. due proiezioni stereografiche da due punti opposti: i poli N e S. Ci si può accontentare di limitare la proiezione a due zone che oltrepassino poco quanto si vuole l'equatore: in tal modo i due aperti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno in comune una fascia equatoriale. Si possono naturalmente inventare altri sistemi, anche con più di due carte, e la pratica della cartografia ne fa largo uso; ma non occorre insistere.

L'unico caso per noi interessante è quello delle coordinate polari (ϑ, φ), che hanno due singolarità nei poli N e S, e inoltre hanno per φ la stessa difficoltà vista nel piano. Si rimedia tagliando la sfera lungo il meridiano $\varphi = 0$ (poli inclusi) e aggiungendo una seconda carta in una striscia attorno al taglio (fig. 3–4).

Esercizio: Quante carte occorrono per le coordinate polari nello spazio 3-dimensionale?

Il toro

Il caso del toro è meno intuitivo, e non voglio insisterci, anche perché non avrà alcuna applicazione in questo corso. Mi limito ad asserire che l'atlante minimo consiste di 3 carte, e lascio a chi sia interessato il divertimento di scoprire come si possano definire.

In fondo il vero motivo di questi esempi è solo di mettere in evidenza che ci si possono aspettare varie situazioni; è forse intuitivo che per $\mathcal{M}$ (che ha 4 dimensioni) le cose possono farsi parecchio più complicate che per le superfici. In effetti la RG conosce alcune di queste situazioni complicate, ma noi non le incontreremo.

La metrica

Il principio di equivalenza afferma che in un RIL vale la RR: dunque esistono in $\mathcal{M}$ coordinate *localmente lorentziane*, ossia tali che l'intervallo invariante fra due eventi ha l'espressione

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{3–1}$$

(metrica di Lorentz–Minkowski). Non possiamo aspettarci che tale espressione sia valida anche a distanza finita, come accade nello spazio-tempo piatto della RR; anzi abbiamo ragioni per aspettarci una curvatura. Però resta vero che deve sempre esistere una *metrica*, che in opportune coordinate assumerà *localmente* la forma (3–1).

Nota: È in uso piuttosto frequente un'opposta convenzione di segni per la metrica, tanto nel caso di Lorentz–Minkowski quanto in RG. Si possono naturalmente trovare buone ragioni in favore dell'una o dell'altra scelta, e purtroppo gli autori non hanno raggiunto un accordo in merito. Occorre perciò fare attenzione, per evitare errori.

Conviene spesso riscrivere la (3–1) usando coordinate diverse. Per una generica trasformazione di coordinate avremo

$$t = t(x^\alpha), \quad x = x(x^\alpha), \quad y = y(x^\alpha), \quad z = z(x^\alpha)$$

da cui

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha$$

e analoghe per le altre coordinate. Sostituendo nella (3–1) si ottiene

$$d\tau^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \tag{3–2}$$

dove

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial t}{\partial x^\alpha}\frac{\partial t}{\partial x^\beta} - \frac{\partial x}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x}{\partial x^\beta} - \frac{\partial y}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y}{\partial x^\beta} - \frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z}{\partial x^\beta}. \tag{3–3}$$

Si vede così che in generale $d\tau^2$ diventa una forma quadratica nei differenziali delle coordinate $\{x^\alpha\}$, i cui coefficienti $g_{\alpha\beta}$ sono funzioni delle coordinate. Questi coefficienti sono le componenti del *tensore metrico*.

Nel seguito accadrà spesso di definire una metrica direttamente scegliendo un certo SC e assegnando il tensore metrico. Nasce però la questione matematica: la scelta delle funzioni $g_{\alpha\beta}$ è arbitraria, o è soggetta a qualche condizione?

La risposta sta nel PE, il quale asserisce che deve sempre essere possibile, in ogni punto di $\mathcal{M}$, portare la metrica alla forma di Lorentz–Minkowski con un'opportuna trasformazione di coordinate. Si noti bene: in ogni punto con un'opportuna scelta, ma *non in tutta* $\mathcal{M}$ *con lo stesso* SC. Se ciò fosse possibile, avremmo a che fare con lo spazio-tempo piatto della RR.

Non è difficile dimostrare che questa richiesta, insieme con l'altra che la trasformazione sia invertibile, porta a richiedere che $\det \|g_{\alpha\beta}\| < 0$. Anzi, si dimostra che la condizione è anche sufficiente. Più esattamente: con un'opportuna trasformazione di coordinate una metrica con tensore metrico a determinante strettamente negativo può sempre essere ricondotta, *in un dato punto di* $\mathcal{M}$, alla forma (3–1) oppure a quella coi segni opposti; ma non a una forma o all'altra a piacere.

Una varietà in cui sia definita una *metrica* (eq. (3–2)) si dice *riemanniana*; più esattamente *semiriemanniana* perché la (3–2) non è definita positiva, ma ha *segnatura* 2 (la differenza fra il numero di coefficienti dei due segni nella forma diagonalizzata).

La struttura geometrica che sta a base della RG si precisa dunque così:

Lo spazio-tempo è una varietà 4*-dimensionale semiriemanniana, di segnatura* 2.

L'interpretazione fisica è la seguente:

Il sistema di coordinate in cui la metrica assume localmente la forma (3–1) *descrive un* RIL, *nel quale vale* (localmente) *la relatività ristretta.*

Condizioni di validità

Possiamo dire che le basi degli assiomi che abbiamo dato stiano in tutta la fisica che conosciamo. Va però osservato che la RG *è una teoria classica*: sono quindi prevedibili deviazioni quando gli effetti quantistici diventano importanti. Cerchiamo la massa M_{P} e la lunghezza L_{P} a cui ciò accade.

Nel legame gravitazionale di due masse la relatività diventa importante quando l'energia di legame è dell'ordine dell'energia di riposo:

$$\frac{GM_{\mathrm{P}}^2}{L_{\mathrm{P}}} \simeq M_{\mathrm{P}}c^2 \quad \Rightarrow \quad GM_{\mathrm{P}} \simeq c^2 L_{\mathrm{P}}.$$

Gli effetti quantistici sono importanti quando l'energia di legame è confrontabile con quella dello stato fondamentale dell'"atomo gravitazionale." Questa energia si calcola subito partendo da quella ($me^4/\hbar^2$, a meno di un fattore 2) del normale atomo d'idrogeno (elettronico), con la sostituzione $e^2 \mapsto GM_{\mathrm{P}}^2$. Tralasciando inessenziali fattori numerici abbiamo dunque:

$$\frac{GM_{\mathrm{P}}^2}{L_{\mathrm{P}}} \simeq \frac{G^2 M_{\mathrm{P}}^5}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad GM_{\mathrm{P}}^3 L_{\mathrm{P}} \simeq \hbar^2.$$

Eliminando si ha:

$$L_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{cm}$$

$$M_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{g}$$

che si chiamano di solito *lunghezza di Planck* e *massa di Planck* (da qui l'indice $_{\mathrm{P}}$ che è stato usato).

Da lunghezza e massa di Planck possiamo ricavare un *tempo di Planck* e una *densità di Planck*:

$$T_{\mathrm{P}} = L_{\mathrm{P}}/c = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.4 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}$$

$$\varrho_{\mathrm{P}} = \frac{M_{\mathrm{P}}}{L_{\mathrm{P}}^3} = \frac{c^5}{\hbar\, G^2} = 5.2 \cdot 10^{93}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}.$$

Dobbiamo dunque aspettarci che la RG cada in difetto quando la densità della materia sia dell'ordine di ϱ_{P}, il che nei modelli di universo che vedremo accade a tempi dell'ordine di T_{P}.