

## Cap. 7 – Rappresentazioni del gruppo di Poincaré nella base a elicità definita

### Definizione degli stati di Wigner

In questo capitolo verrà discussa la rappresentazione del gruppo di Poincaré nella base a elicità diagonale. Essa, oltre all'interesse teorico, ha importanza dal punto di vista sperimentale, poiché è in stretta relazione col problema della rotazione di elicità, come si vedrà più avanti.

Cominciamo col richiamare la definizione degli stati che Wigner [6] usa come vettori base per la rappresentazione del gruppo di Poincaré, e cioè gli stati  $|p, \sigma\rangle$ . Essi si definiscono a partire dal sistema del baricentro: in esso viene fissata una terna di coordinate, e si considerano gli autostati di una componente — ad es.  $S_3$  — rispetto alla terna predetta del momento angolare (di spin, poiché ci troviamo nel sistema del baricentro); siano  $|\sigma\rangle$  tali autostati:

$$S_3|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle.$$

Lo stato  $|p, \sigma\rangle$  è ottenuto a partire da uno stato  $|\sigma\rangle$  al quale si applica una trasformazione di Lorentz  $\Lambda(p)$  che porta dal sistema del baricentro  $(m, 0)$  al sistema  $(p^0, \vec{p})$ , cioè:  $|p, \sigma\rangle = \Lambda(p)|\sigma\rangle$ . Per gli stati  $|p, \sigma\rangle$  la fase è fissata univocamente a partire dalla scelta degli assi coordinati nel sistema del baricentro.

### Definizione degli stati a elicità definita

Definiamo ora gli autostati  $|p, \lambda\rangle$  dell'elicità; essi vengono definiti a partire dal sistema del baricentro in cui si fissa, in maniera completamente arbitraria, una terna di assi coordinati,  $x, y, z \equiv \nu$ ; si considerano poi gli autovettori di una componente del momento angolare (di spin) lungo una direzione (ad es.  $\nu$ ): siano tali stati  $|\lambda\rangle_\nu$ , cioè

$$\vec{S} \cdot \vec{\nu} |\lambda\rangle_\nu = \lambda |\lambda\rangle_\nu.$$

A tali stati si applica successivamente una rotazione standard  $\varrho_p$  che porta l'asse  $\vec{\nu}$  a coincidere con il versore  $\vec{n}$  dell'impulso  $\vec{p}$ . Per ottenere lo stato  $|p, \lambda\rangle$  occorre ancora applicare la trasformazione di Lorentz  $\Lambda(p)$  definita sopra:

$$|p, \lambda\rangle = \Lambda(p)\varrho_p|\lambda\rangle.$$

La fase degli stati  $|p, \lambda\rangle$  non risulta dunque fissata dalla scelta di un sistema di coordinate nel sistema del baricentro, poiché la rotazione standard  $\varrho_p$  dipende dall'impulso  $p$  dello stato che deve essere costruito.

La rotazione  $\varrho_p$  è definita come la rotazione attorno ad un asse perpendicolare a  $\vec{v}$  e a  $\vec{n}$  che porta  $\vec{v}$  a coincidere con  $\vec{n}$ .<sup>(1)</sup>

Esaminiamo ora l'effetto di una trasformazione di Lorentz sullo stato  $|p, \lambda\rangle$ :

$$L|p, \lambda\rangle = L\Lambda(p)\varrho_p|\lambda\rangle = \Lambda(Lp)R_s(p, L)\varrho_p|\lambda\rangle. \quad (7-1)$$

L'ultimo passaggio è giustificato in base a quanto esposto a pag. 6-12;  $R_s$  è una rotazione dello spin, dipendente da  $p$  e dalla trasformazione di Lorentz  $L$ .

La (7-1), inserendo una somma su un insieme completo di stati  $\varrho_{Lp}|\mu\rangle$ , si scrive nella forma:

$$\begin{aligned} L|p, \lambda\rangle &= \Lambda(Lp)\varrho_{Lp}|\mu\rangle\langle\mu|\varrho_{Lp}^{-1}R_s\varrho_p|\lambda\rangle \\ &= |Lp, \mu\rangle\langle\mu_p|\varrho_p\varrho_{Lp}^{-1}R_s|\lambda_p\rangle = |Lp, \mu\rangle D_{\mu\lambda}^{(s)}(p, L) \end{aligned} \quad (7-1')$$

dove si è introdotta la notazione;

$$|\lambda_p\rangle = \varrho_p|\lambda\rangle.$$

La (7-1') fornisce due espressioni per  $L|p, \lambda\rangle$ ; la prima contiene elementi di matrice dell'operatore  $\varrho_{Lp}^{-1}R_s\varrho_p$  calcolati sugli stati "fissi"  $|\lambda\rangle$ ; la seconda contiene gli elementi di matrice dell'operatore  $\varrho_p\varrho_{Lp}^{-1}R_s$  calcolati sugli stati "mobili"  $|\lambda_p\rangle = \varrho_p|\lambda\rangle$ .

Tali elementi di matrice  $D_{\mu\lambda}^{(s)}(p, L)$  appartengono alla rappresentazione del gruppo di Poincaré alla quale siamo interessati.

Nei calcoli che seguiranno è più conveniente considerare l'operatore  $\varrho_p\varrho_{Lp}^{-1}R_s$ , che differisce dall'operatore  $\varrho_{Lp}^{-1}R_s\varrho_p$  per una trasformazione unitaria:

$$\varrho_{Lp}^{-1}R_s\varrho_p = \varrho_p^{-1}(\varrho_{Lp}^{-1}R_s\varrho_p)\varrho_p.$$

### Definizione e proprietà di $\vec{S}_p$

Così una volta espresso l'operatore  $\varrho_p\varrho_{Lp}^{-1}R_s$  in termini del generatore  $\vec{S}$  (spin), l'operatore  $\varrho_{Lp}^{-1}R_s\varrho_p$  sarà espresso mediante il generatore

$$\vec{S}_p = \varrho_p^{-1}\vec{S}\varrho_p.$$

Si può dimostrare che  $\vec{S}_p$  gode della proprietà:

$$\vec{S}_p \cdot \vec{n}^{(i)} = S_i \quad (7-2)$$

---

<sup>(1)</sup> Si può verificare che l'asse della rotazione  $\varrho_p$  così definita è  $\vec{v} \times \vec{p}/\sqrt{1-n_3}$ , e l'angolo è  $\vartheta = \cos^{-1}n_3$  se  $n_1, n_2, n_3$  sono i coseni direttori di  $\vec{n}$  nel riferimento  $x, y, z$ .

dove  $\vec{n}^{(i)}$  si ottengono dai versori  $\vec{e}^{(i)}$  degli assi della terna fissata nel sistema del baricentro mediante le rotazioni  $\varrho_p$ , cioè:

$$\vec{n}^{(i)} = (\varrho_p^{-1})_{ij} \vec{e}^{(j)}$$

e  $S_i$  sono le matrici (numeriche) dello spin (componenti di  $\vec{S}$  nel sistema del baricentro:  $\vec{S} = S_i \vec{e}^{(i)}$ ).

Riassumendo,  $\vec{S}_p$ :

- (i) è un vettore rispetto al momento angolare orbitale  $\vec{x} \times \vec{p}$  ( $\vec{x} = i \vec{\nabla}_p$ ) essendo  $\vec{n}^{(i)}$  dei vettori
- (ii) le sue componenti lungo gli assi mobili  $\vec{n}^{(i)}$  coincidono con le componenti dello spin lungo gli assi (fissi) della terna scelta nel sistema del baricentro.

Tali proprietà possono essere paragonate con quelle delle componenti del momento angolare lungo gli assi principali d'inerzia (assi mobili) di un rotatore rigido.

Le proprietà di  $\vec{S}$  e di  $\vec{S}_p$  si possono così riassumere:

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot \vec{p} |\lambda\rangle &= \lambda |\lambda\rangle \\ \vec{S} \cdot \vec{n} \varrho_p |\lambda\rangle &= \lambda \varrho_p |\lambda\rangle \\ \vec{S}_p \cdot \vec{n} |\lambda\rangle &= \lambda |\lambda\rangle. \end{aligned}$$

Possiamo anche dire che  $|\lambda\rangle$  sono autostati della proiezione dello spin “fisso”  $\vec{S}$  lungo gli assi fissi, oppure della proiezione dello spin “mobile”  $\vec{S}_p$  sugli assi mobili; mentre  $\varrho_p |\lambda\rangle$  sono autostati della proiezione dello spin fisso  $\vec{S}$  lungo gli assi mobili.

## Rappresentazione delle rotazioni

Passiamo ora al calcolo di  $\varrho_p \varrho_{Lp}^{-1} R_s$  nel caso in cui  $L$  sia una rotazione  $R$ . In tal caso  $R_s$ , definito in generale come:

$$R_s = \Lambda^{-1}(Lp) L \Lambda(p),$$

si scrive

$$R_s = \Lambda^{-1}(Rp) R \Lambda(p).$$

D'altra parte i generatori delle trasformazioni di Lorentz pure sono dei vettori per rotazione, cioè

$$\Lambda(Rp) = R \Lambda(p) R^{-1}$$

$$R = \Lambda^{-1}(Rp) R \Lambda(p);$$

segue che  $R_s = R$ . Poiché  $\varrho_p \varrho_{Rp}^{-1}$  opera su  $p$  la rotazione  $R^{-1}$  in una particolare maniera, l'effetto di  $\varrho_p \varrho_{Rp}^{-1} R$  può essere solo quello di cambiare una fase.

Eseguendo il calcolo esplicito si ottiene per una rotazione  $\varepsilon$ :

$$\varrho_p \varrho_{Rp}^{-1} = 1 - i (\Lambda \vec{N} - \vec{S}) \cdot \vec{\varepsilon} \quad (7-3)$$

$$\text{con} \quad \Lambda = \vec{S} \cdot \vec{n}, \quad \vec{N} = \frac{\vec{n} + \vec{v}}{1 + \vec{n} \cdot \vec{v}}.$$

D'altra parte essendo  $R = 1 - i \vec{S} \cdot \vec{\varepsilon}$  otteniamo:

$$\varrho_p \varrho_{Lp}^{-1} = 1 - i \Lambda \vec{N} \cdot \vec{\varepsilon}. \quad (7-4)$$

L'elemento di matrice  $D_{\mu\lambda}^{(s)}$  di cui alla (7-1') effettivamente si riduce a una fase (a parte la rotazione  $p \mapsto R^{-1}p$ ). L'espressione del generatore infinitesimo diventa

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{x} \times \vec{p} + \Lambda \vec{N}. \quad (7-5)$$

Si può verificare che i generatori  $\vec{J}$  dati dalla (7-5) soddisfano effettivamente le relazioni di commutazione per il momento angolare. Si noti tuttavia che  $\vec{N}$  e  $\vec{v}$  non sono "vettori" rispetto a  $\vec{x} \times \vec{p}$ .

### Rotazione dello spin e trasformazioni di Lorentz

Consideriamo ora il caso in cui la trasformazione di Lorentz  $L$  (7-1) è una trasformazione di Lorentz pura. In tal caso  $\varrho_p \varrho_{Lp}^{-1}$  porta da  $Lp$  a  $p$ , e quindi si può descrivere mediante una rotazione attorno al versore  $\vec{n} \times \vec{\beta}$  di un angolo  $p^0 \beta \sin \vartheta / p$ . Si può allora provare che  $\varrho_p \varrho_{Lp}^{-1}$  è dato da (cfr. (7-3)):

$$1 - i (\Lambda \vec{N} - \vec{S}) \frac{p^0}{p} \vec{n} \times \vec{\beta}.$$

Cerchiamo ora l'espressione di  $R_s$ . Poiché  $R_s = \Lambda^{-1}(Lp) L \Lambda(p)$  nella generica rappresentazione di spin  $s$  è data da  $\exp(-\frac{i}{2} \vec{\alpha}_s \cdot \vec{J})$ , dove  $\vec{J}$  è l'espressione dell'operatore di rotazione nella rappresentazione di spin  $s$ , l'effetto di  $R_s$  è noto in ogni rappresentazione una volta conosciuto l'angolo  $\alpha_s$ , che essendo una proprietà algebrica è indipendente dalla rappresentazione.

Il calcolo di  $\alpha_s$  può essere eseguito nel modo più semplice usando la rappresentazione  $(-\frac{1}{2}, 0)$  del gruppo di Lorentz. Dal calcolo si può anche dedurre l'angolo di rotazione dell'impulso  $\alpha_p$  e successivamente  $\alpha_\lambda = \alpha_s - \alpha_p$ . I risultati per una trasformazione di Lorentz finita e infinitesima sono i seguenti.

Trasformazione finita:

$$\text{tg } \frac{1}{2} \alpha_s = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta + \frac{(\gamma + 1)(p^0 + m)}{\beta \gamma p}} \quad \text{tg } \alpha_\lambda = - \frac{m \sin \vartheta}{p^0 \left( \cos \vartheta + \frac{p}{p^0 \beta} \right)}$$

Trasformazione infinitesima:

$$\alpha_s = \frac{p}{p^0 + m} \beta \sin \vartheta \quad \alpha_\lambda = -\frac{m}{p} \beta \sin \vartheta.$$

Dall'espressione del valore di  $\alpha_s$  o  $\alpha_\lambda$  per trasformazioni infinitesime possiamo infine ottenere la forma esplicita dei generatori  $\vec{K}$ :

$$\vec{K} = p^0 \vec{x} + \frac{m}{p} \vec{S}_p \times \vec{n} - \frac{p^0}{p} \frac{\vec{v} \times \vec{n}}{1 + \vec{n} \cdot \vec{v}}$$

con  $\vec{S}_p$  data da:

$$\vec{S}_p = S_i \vec{n}^{(i)} = S_1 \vec{n}^{(1)} + S_2 \vec{n}^{(2)} + \Lambda \vec{n}.$$

Si può verificare che l'espressione data per i generatori soddisfa effettivamente le relazioni di commutazione per il gruppo di Lorentz.