Cap. 4 – Il gruppo SL(2,C) e le sue proprietà topologiche

Il gruppo SL(2,C)

Per un più approfondito esame del gruppo di Lorentz, e in particolare per la trattazione delle sue rappresentazioni, conviene introdurre il gruppo $\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$, cioè il gruppo delle matrici M:

$$M_{ik}; \quad i,k=1,2; \quad M_{ik}\in\mathbb{C}; \quad ||M||=1.$$

$\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$ è un gruppo semplice, connesso e semplicemente connesso.

Si ricordi che un gruppo topologico è semplice se non contiene sottogruppi invarianti che non siano discreti; e in generale uno spazio topologico è connesso se non ha sottospazi propri che siano contemporaneamente chiusi e aperti, tranne l'insieme vuoto; ed è semplicemente connesso se ogni curva continua chiusa che appartenga allo spazio stesso si può deformare con continuità fino a ridursi a un punto.

Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{H}$ delle matrici hermitiane X:

$$X_{ik}; \quad i,k=1,2; \quad X_{ik}\in\mathbb{C}; \quad X^+=X.$$

$\mathcal{H}$ può allora essere dotato di struttura di spazio vettoriale quadridimensionale sul campo reale.

Omomorfismo SL(2,C) $\to \mathcal{L}$

Sia X una matrice arbitraria di $\mathcal{H}$; esaminiamo la trasformazione indotta da una matrice $M\in$ SL(2,C), definita nel seguente modo:

$$X \overset{\varepsilon(M)}{\mapsto} X'=MXM^+. \tag{4–1}$$

Poiché

$$X'^+=X', \qquad (a\,X_1+b\,X_2)'=a\,X_1'+b\,X_2' \quad (a,b\in\mathbb{R})$$

la trasformazione $\varepsilon(M)$ è un endomorfismo di $\mathcal{H}$, ed è facile rendersi conto che l'insieme di tali endomorfismi, $\mathrm{GL}(\mathcal{H})=\{\varepsilon(M), M\in \mathrm{SL(2,C)}\}$, che è dotato di struttura di gruppo, è omomorfo a SL(2,C). In altre parole, che si è realizzata una rappresentazione di SL(2,C) sullo spazio vettoriale $\mathcal{H}$.

Consideriamo ora il nucleo di tale omomorfismo

$$\eta:\mathrm{SL(2,C)}\xrightarrow{\eta}\mathrm{GL}(\mathcal{H}).$$

Sia $K\in\ker\eta$; cioè $KXK^+=X$, $\forall X\in\mathcal{H}$; ponendo in particolare $X=E$ si ha $KK^+=E$, da cui $K^+=K^{-1}$. La condizione $KXK^+=X$ si traduce allora in $KXK^{-1} = X \ \forall X \in \mathcal{H}$, cioè K commuta con tutte le matrici X ed è dunque multiplo di E. Ricordando che $||K|| = 1$ segue ancora $K = \pm E$.

Si è dunque trovato che il nucleo dell'omomorfismo è un sottogruppo centrale costituito dai due elementi E e $-E$; in altre parole la corrispondenza tra le matrici $M \in$ SL(2,C) e le trasformazioni sopra definite nello spazio delle matrici hermitiane non è uno-uno, ma due-uno, e in particolare, se la trasformazione $X \mapsto X'$ è realizzata dalla matrice M secondo la (4–1), la stessa trasformazione è pure realizzata dalla matrice $-M$.

Si osservi che l'aver preso in considerazione, nella trattazione fin qui svolta, il gruppo SL(2,C) anziché il gruppo L(2, C), definito analogamente a SL(2,C) ma senza la restrizione che il determinante sia 1, ha come conseguenza che il nucleo dell'omomorfismo $\eta : \mathrm{SL(2,C)} \xrightarrow{\eta} \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ risulta discreto. Nel caso di L(2,C) si sarebbe ottenuto $\ker \eta = \{\lambda E\}$, cioè il nucleo sarebbe risultato ancora un sottogruppo centrale, ma dotato d'infiniti elementi. Ciò dipende dal fatto che L(2,C) non è semplice.

Quadrivettori covarianti e controvarianti

Per cogliere la relazione tra il gruppo SL(2,C) e il gruppo di Lorentz, fissiamo una base in $\mathcal{H}$ nel seguente modo

$$\underset{0}{\tau} = E \qquad \underset{i}{\tau} = \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

dove

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono le ben note matrici di Pauli.

$\forall X \in \mathcal{H}$, X si può scrivere nella forma

$$X = \underset{\lambda}{\tau}\, x^\lambda \quad \text{con} \quad x^\lambda \in \mathrm{I\!R}\ (\lambda = 0, 1, 2, 3). \tag{4–2}$$

Esplicitamente

$$X = \underset{\lambda}{\tau}\, x^\lambda = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

La (4–2) si può invertire sfruttando la $\mathrm{Tr}(\underset{\mu}{\tau}\,\underset{\nu}{\tau}) = 2\delta_{\mu\nu}$:

$$x^\lambda = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\underset{\lambda}{\tau} X). \tag{4–3}$$

Si ha inoltre

$$||X|| = ||\,\underset{\lambda}{\tau}\, x^\lambda|| = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^\lambda x_\lambda$$

dove $x_\lambda = G_{\lambda\mu}\, x^\mu$.

Ma

$$||X'|| = ||MXM^+|| = ||X||. \tag{4–4}$$

Vediamo così che:

1. A ogni matrice X possiamo associare un 4-vettore di componenti controvarianti x^λ date dalla (4–3) e inversamente, a ogni 4-vettore controvariante possiamo associare una matrice X data dalla (4–2), ed è evidente che tale corrispondenza è uno-uno.
2. Il determinante di una matrice X è uguale al quadrato del 4-vettore corrispondente; il quadrato è definito grazie all'ordinario tensore metrico $G_{\lambda\mu}$.
3. Le trasformazioni indotte da una generica matrice $M \in$ SL(2,C) secondo la (4–1) agiscono sui 4-vettori in modo da conservarne i prodotti scalari. Poiché, come si è già detto, le trasformazioni (4–1) sono lineari, lo sono pure le trasformazioni indotte sui 4-vettori. Ciò porta ad associare ad ogni M una trasformazione di Lorentz, e in particolare una trasformazione del sottogruppo $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Infatti l'applicazione SL(2,C) $\to \mathcal{L}$ definita attraverso le (4–1), (4–3) è continua; essendo SL(2,C) connesso, la sua immagine è pure connessa, e quindi è contenuta in $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Ciò si può anche vedere più semplicemente osservando che gli elementi del gruppo di Lorentz che "fanno uscire" dal sottogruppo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (cfr. 3–4) sono $-E$, I, T, e che nessuna di queste matrici si può realizzare con una matrice M.

Consideriamo ad esempio la $I = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Una matrice M che la rappresenti deve allora soddisfare le relazioni

$$MM^+ = E \qquad M\sigma_i M^+ = -\sigma_i.$$

Tali relazioni sono però incompatibili: la prima implica $M^+ = M^{-1}$; la seconda diventa allora $M\sigma_i M^{-1} = -\sigma_i$: tale relazione è assurda, perché non esiste una matrice che anticommuta con tutte le matrici di Pauli.

Gli altri casi portano all'assurdo $MM^+ = -E$ (MM^+ è definita positiva).

Dal fatto poi che SL(2,C) e $\mathcal{L}_+^\uparrow$ possiedono lo stesso numero di generatori, come si vedrà più in particolare tra poco, e dal fatto che l'omomorfismo di SL(2,C) in $\mathcal{L}_+^\uparrow$ è anche un omomorfismo topologico, segue che l'immagine di SL(2,C) non può essere un sottogruppo proprio di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, e quindi l'omomorfismo è su tutto $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Riassumendo, abbiamo stabilito una corrispondenza tra il gruppo SL(2,C) e il gruppo $\mathcal{L}_+^\uparrow$; è evidente che si tratta di un omomorfismo, e lo stesso ragionamento di cui ci si è serviti sopra a proposito della rappresentazione di SL(2,C) su $\mathcal{H}$ porta a concludere che il nucleo dell'omomorfismo di SL(2,C) su $\mathcal{L}_+^\uparrow$ è formato dai due elementi E e $-E$. L'omomorfismo è quindi due-uno.

Si noti che il ragionamento fatto per l'omomorfismo su GL($\mathcal{H}$) è applicabile nel caso dell'omomorfismo su $\mathcal{L}_+^\uparrow$ per il fatto che la corrispondenza $X \mapsto x^\lambda$ è invertibile, come si è già detto al punto 1. qui sopra.

Come si è visto, dalla possibilità di associare in modo biunivoco le matrici $X \in \mathcal{H}$ con i 4-vettori controvarianti, e dalla possibilità di rappresentare SL(2,C) su $\mathcal{L}_+^\uparrow$, segue che SL(2,C) si può rappresentare sullo spazio dei 4-vettori controvarianti.

Ci si può ora chiedere se ciò sia possibile anche per i 4-vettori covarianti; come è noto da pag. 3–1,2 le leggi di trasformazione per i vettori controvarianti e covarianti sono rispettivamente

$$x'^\lambda = \Lambda^\lambda{}_\mu \, x^\mu \qquad x'_\nu = \left[\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right]_\nu{}^\varrho \, x_\varrho$$

dove Λ sono le matrici della rappresentazione 4-vettoriale del gruppo di Lorentz, con $\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = G\Lambda G$.

Possiamo costruire la rappresentazione di SL(2,C) sullo spazio dei 4-vettori covarianti; per fare questo consideriamo

$$\tilde{X} = \underset{\lambda}{\tau} \, x_\lambda. \tag{4–5}$$

Tale relazione è invertibile:

$$x_\lambda = \tfrac{1}{2} \, \mathrm{Tr}(\tilde{X} \underset{\lambda}{\tau}). \tag{4–6}$$

È chiaro che per le matrici $\tilde{X}$, anch'esse appartenenti a $\mathcal{H}$, si possono considerare le trasformazioni già viste per le X e i risultati sono esattamente analoghi a quelli riassunti nei punti 1, 2, 3 di pag. 4–2,3, pur di sostituire nel caso delle $\tilde{X}$ ai vettori controvarianti quelli covarianti: si ottiene, in altre parole, una rappresentazione di SL(2,C) sullo spazio dei 4-vettori covarianti.

Come già si è osservato in precedenza, la $\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = G\Lambda G$ stabilisce l'equivalenza tra le rappresentazioni di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sui 4-vettori controvarianti e sui 4-vettori covarianti; e si è d'altra parte stabilita una corrispondenza uno-uno tra i vettori controvarianti e le X e un'analoga corrispondenza uno-uno tra i vettori covarianti e le $\tilde{X}$.

È però necessario notare esplicitamente che non è possibile stabilire per SL(2,C) una corrispondenza analoga alla $\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = G\Lambda G$, cioè non è possibile trovare una matrice $M \in$ SL(2,C) tale che $\zeta = M\varepsilon M^{-1}$, dove ζ e ε indicano gli insiemi degli operatori delle rappresentazioni definite sulle X e sulle $\tilde{X}$, dal momento che, come un argomento usato in precedenza ha provato, non esiste una matrice $M \in$ SL(2,C) che corrisponda alla matrice $G = I$.

È interessante a questo punto, data una matrice $\tilde{X}$, vedere come essa dipende dalla matrice X.

Introduciamo allo scopo la trasformazione di $\mathcal{H}$ in sé definita dalla

$$X \mapsto X^{\mathrm{B}} = BX^{\mathrm{T}}B^{-1} \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale corrispondenza non conserva l'ordine dei prodotti, cioè

$$X_1X_2 \mapsto (X_1X_2)^{\mathrm{B}} = X_2^{\mathrm{B}}X_1^{\mathrm{B}}.$$

Dalla proprietà $B\sigma_i B^{-1} = -\sigma_i^{\mathrm{T}}$, data una generica matrice hermitiana

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$$

la matrice corrispondente è

$$X^{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b^* & c \end{pmatrix}.$$

Ne segue allora che $\tilde{X} = X^{\mathrm{B}}$.

Il prodotto XX^{B} fornisce:

$$XX^{\mathrm{B}} = ||X||\, E = x^\lambda x_\lambda\, E$$

relazione che sarà utile nel seguito.

Se consideriamo ora la (4–1), che definisce le trasformazioni di $\mathcal{H}$ in sé, scritta in termini di $X = x^\lambda \tau_\lambda$ otteniamo:

$$M \underset{\lambda}{\tau} M^+ x^\lambda = \underset{\lambda}{\tau}\, x'^\lambda = \underset{\lambda}{\tau}\, \Lambda^\lambda{}_\mu\, x^\mu$$

ossia

$$M \underset{\lambda}{\tau} M^+\, \delta^\lambda{}_\mu\, x^\mu = \underset{\lambda}{\tau}\, \Lambda^\lambda{}_\mu\, x^\mu$$

relazione che essendo valida per ogni x implica

$$M \underset{\mu}{\tau} M^+ = \underset{\lambda}{\tau}\, \Lambda^\lambda{}_\mu$$

il che farebbe supporre che le matrici τ_λ si possano interpretare come componenti covarianti di un 4-vettore.

Ciò non è però vero, dal momento che con "prodotti" delle τ non è possibile costruire grandezze che abbiano le proprietà di trasformazione dei tensori; e ciò perchè un'espressione del tipo

$$M \underset{\lambda}{\tau}\, \underset{\mu}{\tau} M^+$$

non è in generale riconducibile a

$$M \underset{\lambda}{\tau} M^+ M \underset{\mu}{\tau} M^+,$$

essenzialmente perché $M^+M \neq E$.

Esaminiamo ora un po' più da vicino l'algebra di Lie di SL(2,C): in generale le matrici M si possono mettere in forma esponenziale, con all'esponente una matrice 2×2 a traccia nulla (ciò è richiesto dalla condizione $||M|| = 1$). Poiché la generica matrice 2×2 a traccia nulla è una combinazione lineare a coefficienti complessi delle tre matrici di Pauli, si ha $M = \exp(c_i \sigma_i)$.

Siamo dunque in presenza, come già si era anticipato più sopra, di un gruppo a sei parametri; e dal calcolo esplicito dei generatori si trova che essi sono essenzialmente della forma σ_j, $i\sigma_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Le regole di commutazione sono allora le stesse che per il gruppo di Lorentz: ciò prova che le algebre di Lie di SL(2,C) e di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sono isomorfe, e che quindi i gruppi sono localmente isomorfi; come si è già detto i due gruppi non sono isomorfi in grande, valendo la

$$\mathrm{SL(2,C)}/\mathcal{D} \simeq \mathcal{L}_+^\uparrow \qquad \mathcal{D} = \{E, -E\}. \tag{4–7}$$

Proprietà di semplice connessione e gruppi di omotopia

La presenza di un sottogruppo invariante discreto come nucleo dell'omomorfismo farebbe pensare alla presenza di due falde non connesse in SL(2,C), ma ciò non è vero, essendo SL(2,C) connesso. Esiste oltre la connessione un'altra proprietà topologica non locale che caratterizza i gruppi topologici, e cioè la semplice connessione. Come si è già affermato all'inizio del capitolo, SL(2,C) è un gruppo semplicemente connesso; non lo è invece il gruppo $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Sussiste in proposito un teorema generale, che citiamo senza dimostrarlo:

Per ogni gruppo topologico connesso $\mathcal{G}$ esiste un gruppo connesso e semplicemente connesso, $\tilde{\mathcal{G}}$, unico a meno d'isomorfismi, che è localmente isomorfo a $\mathcal{G}$. $\tilde{\mathcal{G}}/\mathcal{N}$ è isomorfo a $\mathcal{G}$, dove $\mathcal{N}$ è un sottogruppo invariante abeliano discreto di $\mathcal{G}$; $\tilde{\mathcal{G}}$ chiamasi rivestimento di $\mathcal{G}$ (covering group), e $\mathcal{N}$ è isomorfo al primo gruppo di omotopia di $\mathcal{G}$.

Si ricordi che il primo gruppo di omotopia (o gruppo fondamentale) di uno spazio topologico è il gruppo delle classi dei cammini chiusi, tra loro omotopi, passanti per un punto P, con il prodotto di due cammini definito come il cammino ottenuto percorrendo i due cammini l'uno dopo l'altro; e l'elemento neutro definito come la classe dei cammini omotopi a P. Tali definizioni sono indipendenti dalla scelta del punto P. Si può anche provare che se lo spazio topologico ha struttura di gruppo, il suo gruppo di omotopia è abeliano.

Come esempio consideriamo il gruppo delle rotazioni di un piano attorno a un suo punto; tale gruppo, che è omeomorfo a una circonferenza, non è semplicemente connesso; il suo gruppo di omotopia è isomorfo al gruppo Z degli interi relativi che esprimono quante volte (con segno) viene effettuata una rotazione di 2π; il rivestimento è isomorfo al gruppo delle traslazioni su una retta. Se consideriamo il gruppo delle traslazioni modulo Z, il che equivale a identificare due traslazioni che differiscono per una quantità fissa, nel nostro caso 2π, otteniamo un gruppo isomorfo al gruppo delle rotazioni su un piano.

Proprietà topologiche di SU(2) e SO(3)

Torniamo ora al gruppo di Lorentz e a SL(2,C), e consideriamo il sottogruppo SO(3) di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ dato dalle rotazioni, cioè dalle trasformazioni di Lorentz che lasciano fisso x^0; nella rappresentazione su $\mathcal{H}$ questo equivale a limitarsi a considerare le trasformazioni M tali che $MEM^+ = E$, o in altre parole le matrici 2×2 a determinante 1, unitarie: esse formano un sottogruppo di SL(2,C) che si denota con SU(2); dalla (4–7) segue allora che

$$\mathrm{SU}(2)/\mathcal{D} \simeq \mathrm{SO}(3). \tag{4–8}$$

A proposito della semplice connessione, osserviamo che mentre il gruppo delle rotazioni non è semplicemente connesso, lo è invece SU(2).

Come esercizio dimostriamo ora che SU(2) è connesso e semplicemente connesso, mentre SO(3) è connesso, ma non semplicemente connesso.

Le matrici di SU(2) si possono parametrizzare nella forma $\exp(\frac{i}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,\varphi)$ con φ compreso tra 0 e 2π; una matrice di tale tipo rappresenta, com'è noto, in SO(3) una rotazione di un angolo φ attorno al versore $\vec{n}$.

Una generica matrice M di SU(2) si può allora scrivere nella forma;

$$M = \exp(\tfrac{i}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,\varphi) = E\cos(\varphi/2) + i\,\sin(\varphi/2)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}.$$

Poiché $\cos^2(\varphi/2) + (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\sin^2(\varphi/2) = 1$, segue che le matrici di SU(2) si possono rappresentare sulla superficie di una sfera unitaria nello spazio quadridimensionale di vettori base E, $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $i\sigma_3$.

Se su tale superficie introduciamo un sistema di coordinate polari in modo che all'identità E corrisponda il punto $\alpha = 0$:

$$\begin{gathered}\cos\alpha, \quad \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \quad \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \quad \sin\alpha\cos\beta \\ 0 \le \alpha \le \pi \quad 0 \le \beta \le \pi \quad 0 \le \gamma \le 2\pi\end{gathered}$$

le coordinate di M sono allora:

$$\cos(\varphi/2), \quad \sin(\varphi/2)\,n_x, \quad \sin(\varphi/2)\,n_y, \quad \sin(\varphi/2)\,n_z.$$

Possiamo così concludere che $\alpha = \varphi/2$, β e γ sono gli angoli di direzione del versore tridimensionale $\vec{n}$.

Ciò permette allora di stabilire che la corrispondenza tra le matrici di SU(2) e i punti della sfera nello spazio a quattro dimensioni è uno-uno, e quindi che SU(2), oltre che connesso, è semplicemente connesso.

Osserviamo ora che se una matrice $M \in$ SU(2) corrisponde a un angolo di rotazione e a un'orientazione stabilita del versore $\vec{n}$, cioè a un certo elemento del gruppo SO(3), la matrice $-M$, che sulla superficie della sfera è rappresentata da un punto diametralmente opposto a quello che rappresenta M, corrisponde ancora allo stesso elemento di SO(3). Infatti, se

$$M = E\cos(\varphi/2) + i\,\sin(\varphi/2)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n},$$

$-M$ si realizza con

$$-M = -E\cos(\varphi/2) - i\,\sin(\varphi/2)\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$$

da cui si vede che a tale matrice corrisponde una rotazione di un angolo $2\pi - \varphi$ attorno al versore $-\vec{n}$; ciò però equivale a una rotazione di un angolo φ attorno a $\vec{n}$, quindi otteniamo esattamente lo stesso elemento di SO(3). In questo modo si è provata ancora una volta la (4–7).

Possiamo dunque ottenere a partire da questa raffigurazione di SU(2) sulla superficie della sfera unitaria nello spazio a quattro dimensioni una raffigurazione per SO(3) se immaginiamo di "saldare" i punti diametralmente opposti sulla superficie della sfera; oppure, se consideriamo SO(3) raffigurato da una stella di rette uscenti dal centro della sfera nello spazio quadridimensionaie, raffigurato cioè, come si dice, da uno spazio proiettivo. È anche chiaro che la raffigurazione ottenuta per SO(3) fa vedere come tale gruppo sia connesso ma non semplicemente connesso.

Se vogliamo ottenere la ben nota raffigurazione di SO(3) sui punti di una sfera nello spazio a tre dimensioni e raggio π, basta prendere un punto arbitrario nello spazio $\mathbb{R}$, e con origine in tale punto costruire tutti i vettori di coseni direttori

$$n_x = \sin\beta\cos\gamma, \quad n_y = \sin\beta\sin\gamma, \quad n_z = \cos\beta$$

e di lunghezza $\varphi = 2\alpha$. Poichè per rappresentare le rotazioni di SO(3) è sufficiente prendere $0 \le \varphi \le \pi$, e di conseguenza $0 \le \alpha \le \pi/2$, la frontiera della sfera nello spazio tridimensionale corrisponde all'equatore della sfera nello spazio quadridimensionale sul quale, per quanto si è visto sopra, ad ogni $R \in$ SO(3) corrispondono due punti. Abbiamo così espresso il noto risultato che sulla frontiera della sfera tridimensionale su cui si è raffigurato SO(3) viene a mancare la biunivocità della corrispondenza tra rotazioni e punti della sfera.

Si noti che con questo discorso abbiamo dimostrato le proprietà topologiche di SU(2) e SO(3); un analogo ragionamento andrebbe seguito per SL(2,C) e porterebbe alla conclusione che SL(2,C) è il rivestimento di $\mathcal{L}_+^\uparrow$; in particolare rimane da dimostrare che $\mathcal{L}_+^\uparrow$ non è semplicemente connesso, e SL(2,C) è connesso e semplicemente connesso, proprietà che abbiamo asserito, senza provarle, fin dall'inizio di questa trattazione.

Qui ci limitiamo però al risultato sopra accennato, e cioè che SL(2,C) $= \widetilde{\mathcal{L}_+^\uparrow}$.

Rappresentazioni del rivestimento universale

Ci poniamo ora il problema di determinare le rappresentazioni di un gruppo $\mathcal{G}$ partendo dalle rappresentazioni della sua algebra di Lie: poiché sia $\mathcal{G}$ che $\tilde{\mathcal{G}}$ hanno la stessa algebra di Lie, è lecito chiedersi se le rappresentazioni dell'algebra di Lie siano rappresentazioni di $\mathcal{G}$ oppure di $\tilde{\mathcal{G}}$.

Seguiamo dapprima un ragionamento intuitivo e non rigoroso: l'algebra di Lie definisce il gruppo localmente, e le proprietà locali di un gruppo si possono estendere a tutto il gruppo solo nel caso che il gruppo sia connesso e semplicemente connesso; poiché $\tilde{\mathcal{G}}$ è connesso e semplicemente connesso, mentre $\mathcal{G}$ non è semplicemente connesso (tranne il caso in cui $\tilde{\mathcal{G}} \simeq \mathcal{G}$), ci si attende dunque che le rappresentazioni dell'algebra di Lie siano rappresentazioni di $\tilde{\mathcal{G}}$ e non in generale di $\mathcal{G}$.

Esaminiamo ora la questione più da vicino e osserviamo che se $\tilde{\mathcal{G}}$ è il rivestimento di $\mathcal{G}$, con $\tilde{\mathcal{G}}/\mathcal{N} \simeq \mathcal{G}$, tutte le rappresentazioni di $\mathcal{G}$ sono rappresentazioni di $\tilde{\mathcal{G}}$, mentre non tutte le rappresentazioni di $\tilde{\mathcal{G}}$ sono rappresentazioni di $\mathcal{G}$. Infatti $\tilde{\mathcal{G}}/\mathcal{N} \simeq \mathcal{G}$ equivale a dire che esiste un omomorfismo $\mu : \tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\mu} \mathcal{G}$; una qualunque rappresentazione di $\mathcal{G}$ è un omomorfismo η di $\mathcal{G}$ su un certo gruppo $\mathcal{G}'$: $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$. La trasformazione

$$\tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\mu} \mathcal{G} \xrightarrow{\eta} \mathcal{G}' = \tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\eta\circ\mu} \mathcal{G}'$$

è evidentemente ancora un omomorfismo: cioè da un'arbitraria rappresentazione di $\mathcal{G}$ si ottiene una rappresentazione di $\tilde{\mathcal{G}}$. Il viceversa chiaramente non vale: una rappresentazione di $\tilde{\mathcal{G}}$, cioè un omomorfismo $\varrho : \tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\varrho} \mathcal{G}''$ non dà sempre luogo a una rappresentazione "vera" di $\mathcal{G}$, nel senso che è necessario invertire l'omomorfismo μ, e ciò, tranne il caso banale $\tilde{\mathcal{G}} \simeq \mathcal{G}$ porta a un'applicazione di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{G}''$, che indicheremo con $\varrho \circ \mu^{-1}$ e si chiama "rappresentazione a più valori" di $\mathcal{G}$. In particolare si può dimostrare che la rappresentazione è a più valori se e solo se il nucleo di ϱ non contiene il nucleo di μ.

Si può ancora dimostrare che le proprietà di semplice connessione sono legate all'esistenza di rappresentazioni a più valori: in particolare, un gruppo è semplicemente connesso se e solo se le rappresentazioni ottenute a partire dall'algebra di Lie del gruppo stesso sono tutte rappresentazioni "vere" per il gruppo stesso.

Possiamo allora, grazie a questi risultati, affermare che le rappresentazioni dell'algebra di Lie sono rappresentazioni "vere" per $\tilde{\mathcal{G}}$, ma non necessariamente per $\mathcal{G}$.

Abbiamo stabilito nelle pagine precedenti che una rappresentazione (fedele) di SL(2,C) non può essere una rappresentazione vera di $\mathcal{L}_+^\uparrow$: otterremo invece una rappresentazione a due valori di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ cioè a ogni operatore in $\mathcal{L}_+^\uparrow$ corrispondono due matrici della rappresentazione, che si distinguono per il segno.

Ci si può ora domandare se per l'interpretazione fisica siano importanti le rappresentazioni di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ o quelle di SL(2,C): e la domanda ha un senso preciso perché anche nel caso dei sottogruppi delle rotazioni, benché le rotazioni siano descritte da SO(3), anche le rappresentazioni di SU(2) hanno un'interpretazione fisica (stati di spin semintero).

Se consideriamo le rappresentazioni a due valori, esse comportano un'ambiguità nel segno: tale ambiguità però viene a cadere se noi consideriamo le rappresentazioni come agenti sui raggi anziché sui vettori: e in realtà quello che fisicamente interessa è avere una rappresentazione sui raggi. In proposito dimostriamo che se $\tilde{\mathcal{G}}/\mathcal{N} \simeq \mathcal{G}$, è sempre possibile, a partire da una rappresentazione di $\tilde{\mathcal{G}}$, avere una rappresentazione di $\mathcal{G}$ definita a meno di fattori numerici; infatti le varie matrici che in una rappresentazione a più valori di $\mathcal{G}$ corrispondono a un dato elemento di $\mathcal{G}$ differiscono a meno di una rappresentazione di $\mathcal{N}$, e $\mathcal{N}$ essendo un sottogruppo abeliano (cfr. p. 4–6) le sue rappresentazioni irriducibili sono unidimensionali e ciò prova l'asserto.