CAPITOLO 6

Alcuni teoremi

Vogliamo ora precisare e in parte dimostrare alcuni risultati già enunciati. Supporremo che $\mathcal{V}$ sia uno spazio complesso, dotato di prodotto scalare. Cominciamo con un teorema piuttosto semplice:

Una r. ϱ unitaria riducibile è sempre completamente *riducibile.*

Dim.: Sia $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ il s.s.i. di ϱ, e sia $\mathcal{V}_2$ il complemento ortogonale di $\mathcal{V}_1$: mostriamo che anche $\mathcal{V}_2$ è s.s.i. Infatti per ogni $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$, $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_2$, e per ogni $U(g)$:

$$(\mathbf{v}_1, U(g)\,\mathbf{v}_2) = (U(g)^+\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (U(g^{-1})\,\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$$

perché $U(g^{-1})\,\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$: dunque $U(g)\,\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_2$. Inoltre $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$. ■

Nota: Questo teorema vale anche se $\mathcal{V}$ ha dimensione infinita, in particolare se è uno spazio di Hilbert.

Prima di passare al secondo teorema, occorre dare la definizione di *equivalenza* di due r. Diremo che due r. ϱ_1 e ϱ_2, risp. sugli spazi $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, sono equivalenti se esiste un isomorfismo $\alpha: \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ tale che

$$\forall g \in \mathcal{G}: \quad \alpha\,\varrho_1(g) = \varrho_2(g)\,\alpha \quad \text{ossia} \quad \varrho_2(g) = \alpha\,\varrho_1(g)\,\alpha^{-1}.$$

In termini di matrici: esiste una A invertibile tale che

$$D_2(g) = A\,D_1(g)\,A^{-1}.$$

Nota 1: Ovviamente due r. equivalenti hanno la stessa dimensione.

Nota 2: Non bisogna confondere equivalenza e isomorfismo: ad es. il gruppo SO(3), che è semplice, ha tutte r. fedeli (a parte quella banale) e quindi tra loro isomorfe; ma non sono tutte equivalenti.

Nota 3: L'equivalenza di r. è una … relazione di equivalenza: era a questa relazione che alludevamo parlando di r. "non diverse" a proposito delle (5–3).

Nota 4: È facile verificare che il carattere di riducibilità (anche completa) si mantiene tra r. equivalenti.

Possiamo ora enunciare il secondo teorema, più importante ma meno semplice da dimostrare:

Ogni r. a dimensione finita di un gruppo finito o compatto è equivalente a una r. unitaria.

Dim.: Dimostreremo il teorema per i gruppi finiti; poi faremo un cenno al caso dei gruppi compatti. Conviene lavorare con le matrici $D(g)$, a partire dalle quali costruiamo

$$\Delta = \sum_{g \in \mathcal{G}} D(g)^+ D(g).$$

Si vede che Δ è una matrice hermitiana positiva; esiste pertanto una (unica) radice quadrata hermitiana positiva (e quindi invertibile) C: $\Delta = C^2$.

Osserviamo poi che

$$D(h)^+ \Delta\, D(h) = \sum_{g\in\mathcal{G}} D(h)^+ D(g)^+\, D(g)\, D(h) = \sum_{g\in\mathcal{G}} D(gh)^+ D(gh) = \Delta$$

perché per un dato h, al variare di g in $\mathcal{G}$, anche gh percorre tutto $\mathcal{G}$. Quindi $D(h)^+ C^2 D(h) = C^2$ e se poniamo

$$D'(h) = C\, D(h)\, C^{-1}$$

si verifica che $D'(h)^+ D'(h) = I$. ∎

Il teorema vale anche per un gruppo compatto, e si dimostra in maniera analoga; occorre però:

a) Dare la definizione di gruppo topologico, che accenniamo come segue: gruppo topologico è un gruppo sul quale sia definita una topologia (compatibile con la struttura di gruppo, ossia tale che se $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ è un aperto, lo sono anche$\mathcal{A}^{-1}$, $g\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}\,g$, $\forall g \in \mathcal{G}$). È poi ovvio il significato di gruppo compatto.

b) Dimostrare che per un gruppo localmente compatto si può definire (in modo unico) una *misura invariante*, e di conseguenza un'*integrazione* invariante. Un gruppo compatto ha misura finita.

c) Precisare la definizione di r. per un gruppo topologico: occorre aggiungere che $\varrho(g)$ sia funzione continua di g.

d) Sostituire nella dimostrazione data sopra, al posto della somma che definisce Δ, un integrale. L'integrale esiste per un gruppo compatto.

È facile dare controesempi, ossia mostrare che esistono gruppi topologici non compatti che possiedono r. non equivalenti a r. unitarie. Abbiamo già visto un esempio di r. non completamente riducibile del gruppo delle traslazioni (che è topologico e non compatto): essa non può quindi essere equivalente a una unitaria. Viceversa, una r. fedele di un gruppo non compatto non può essere unitaria, perché un gruppo (topologico) di matrici unitarie è sempre compatto.

Un caso particolare dell'ultimo risultato è il gruppo di Lorentz, che è localmente compatto ma non compatto, essenzialmente perché $\gamma \to \infty$ quando $v \to c$; perciò la misura invariante esiste ma è infinita. Poiché il gruppo di Lorentz è semplice, tutte le r. non banali sono fedeli; e in effetti tutte le r. a dimensione finita del gruppo di Lorentz (che sono infinite) sono non unitarie.

I lemmi di Schur

Presentiamo ora altri due teoremi che rivestono un ruolo essenziale nell'interpretazione fisica delle r. di un gruppo in m.q., e sono noti come *lemmi di Schur*. L'enunciato del primo lemma di Schur è il seguente:

Dato un gruppo $\mathcal{G}$ e due sue r.i. ϱ_1 e ϱ_2, rispettivamente sugli spazi $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, ogni omomorfismo ω di $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_2$ che soddisfi

$$\forall g \in \mathcal{G}: \ \omega \varrho_1(g) = \varrho_2(g)\,\omega$$

se non è identicamente nullo è un isomorfismo di $\mathcal{V}_1$ su $\mathcal{V}_2$.

La situazione descritta dal lemma corrisponde al seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{V}_2 \\ \Big\downarrow \varrho_1(g) & & \Big\downarrow \varrho_2(g) \\ \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{V}_2 \end{array}$$

Nota 1: Nel secondo caso le due r. sono equivalenti.

Nota 2: In termini di matrici, il primo lemma di Schur si esprime così: date due r.i. D_1 e D_2 di uno stesso gruppo $\mathcal{G}$, se esiste una matrice A tale che

$$\forall g \in \mathcal{G}: \ A\,D_1(g) = D_2(g)A$$

due casi sono possibili: o $A = 0$, oppure A è una matrice quadrata invertibile.

Dim.: Sia $\mathcal{V}_1'$ il nucleo di ω, ossia il massimo s.s. per cui $\omega\,\mathcal{V}_1' = 0$. Applicando $\varrho_2(g)$:

$$0 = \varrho_2(g)\,\omega\mathcal{V}_1' = \omega\varrho_1(g)\,\mathcal{V}_1'.$$

Dunque $\varrho_1(g)\,\mathcal{V}_1' \subseteq \mathcal{V}_1'$, ossia $\mathcal{V}_1'$ è s.s.i. di ϱ_1. Poiché ϱ_1 è irriducibile, questo implica due possibilità: o $\mathcal{V}_1' = \mathcal{V}_1$, e allora $\omega = 0$; oppure $\mathcal{V}_1' = 0$, ossia ω non ha nucleo. In questo secondo caso, per dimostrare che ω è un isomorfismo occorre provare che l'immagine $\mathcal{V}_2' = \omega\mathcal{V}_1$ coincide con $\mathcal{V}_2$.

Calcoliamo $\varrho_2(g)\,\mathcal{V}_2'$:

$$\varrho_2(g)\,\mathcal{V}_2' = \varrho_2(g)\,\omega\mathcal{V}_1 = \omega\varrho_1(g)\,\mathcal{V}_1 = \omega\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2'.$$

Dunque $\mathcal{V}_2'$ è s.s.i. per ϱ_2; essendo escluso che sia $\mathcal{V}_2' = 0$, resta solo l'altra possibilità $\mathcal{V}_2' = \mathcal{V}_2$. ■

Ecco ora il secondo lemma di Schur:

Dato un gruppo $\mathcal{G}$ e una sua r.i. ϱ sullo spazio complesso $\mathcal{V}$ a dimensione finita, *ogni endomorfismo α di $\mathcal{V}$ che commuti con tutti i $\varrho(g)$ è un multiplo dell'identità.*

Nota: In termini di matrici: se D è una r.i. complessa di $\mathcal{G}$, ogni matrice che commuta con tutte le $D(g)$ è multipla dell'identità.

Dim.: Applichiamo il primo lemma con

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho, \quad \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}, \quad \omega = \alpha - c\,\iota$$

dove c è per ora un generico numero complesso e ι è l'identità. Poiché l'endomorfismo $\alpha - c\,\iota$ commuta con tutti i $\varrho(g)$ sarà un automorfismo (cioè bigettivo) oppure identicamente nullo. Scegliamo ora per c un autovalore di α (un autovalore esiste sempre, perché l'equazione secolare per α ha sempre almeno una radice, grazie al teorema fondamentale dell'algebra: è qui che entra l'ipotesi che la r. sia complessa). Ciò esclude la prima alternativa, e lascia solo la seconda: $\alpha = c\,\iota$. ■

Controesempio: Per verificare che il carattere complesso della r. è essenziale, basta pensare all'esempio (5–2): si tratta di una r.i. reale di SO(2), che è commutativo. Dunque ciascuna delle matrici della r. commuta con tutte le altre, senza essere multipla dell'identità.

Conseguenza immediata del secondo lemma è che

le r.i. finite complesse di un gruppo commutativo sono tutte unidimensionali.

Dim.: Poiché $\mathcal{G}$ è commutativo tutti i $\varrho(g)$ commutano fra loro, e se la r. è irriducibile debbono essere tutti multipli dell'identità. Dunque ogni s.s. di $\mathcal{V}$ è invariante, il che contrasta con l'ipotesi d'irriducibilità a meno che $\mathcal{V}$ non sia unidimensionale. ■

Simmetria e degenerazione

Sia dato un gruppo di simmetria $\mathcal{G}$ e una sua r. unitaria sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$: $g \mapsto U(g)$. In generale questa r. sarà (completamente) riducibile; a noi interessano ora i s.s.i. *minimi a dimensione finita* (brevemente "minimi finiti"), corrispondenti a r.i. di $\mathcal{G}$. Consideriamo inoltre un operatore A che commuti con tutti gli $U(g)$:

$$\forall g \in \mathcal{G}:\; U(g)\,A\,U(g)^{+} = A. \tag{6–1}$$

Vogliamo studiare gli elementi di matrice di A, sia fra vettori di uno stesso s.s.i. minimo, sia fra vettori di s.s.i. diversi.

Nota 1: A può corrispondere in particolare a un'*osservabile simmetrica*, quindi essere autoaggiunto. Ne seguono alcune proprietà particolari, che verranno indicate al momento opportuno.

Nota 2: Molte osservabili non sono definite su tutto $\mathcal{H}$, per cui nella discussione occorrerebbe porsi problemi di *dominio*, che talvolta sono assai sottili e intricati. Noi trascureremo la questione, assumendo che i s.s. dei quali parleremo siano nel dominio di tutti gli operatori che entrano in gioco. Fortunatamente il problema non si pone per gli operatori unitari come $U(g)$, che essendo limitati possono sempre essere estesi a tutto $\mathcal{H}$.

Il primo teorema che dimostreremo tratta degli elementi di matrice di A entro uno stesso s.s.i. minimo:

Teorema 1: Se $\mathcal{V}_1$ è un s.s.i. minimo finito e $\mathcal{V}_2$ il suo complemento ortogonale, in una base adattata a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ si ottiene per A la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a\,I & P \\ \hline Q & R \end{array}\right)$$

Nota 1: La sola affermazione del teorema sta nella forma del primo blocco, che è un multiplo dell'identità. Possiamo dunque dire che all'interno di un s.s.i. minimo A è *completamente degenere.*

Nota 2: Se A è autoaggiunto, certamente a è reale.

Dim: Sia $|i\rangle$ una base di $\mathcal{H}$ adattata a $\mathcal{V}_1$, ossia tale che $|1\rangle \ldots |n\rangle$ è una base di $\mathcal{V}_1$. Allora le matrici

$$D^i{}_j(g) = \langle i|\, U(g)\,|j\rangle$$

che formano una r.i. di $\mathcal{G}$ per ipotesi, commutano con $A^i{}_j = \langle i|A|j\rangle$. Infatti

$$\sum_{j=1}^{n} D^i{}_j(g)\, A^j{}_k = \sum_{j=1}^{n} \langle i|\, U(g)\,|j\rangle\, \langle j|A|k\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle i|\, U(g)\,|j\rangle\, \langle j|A|k\rangle = \langle i|\, U(g)\, A\,|k\rangle$$

perché gli elementi di matrice $\langle i|\, U(g)\,|j\rangle$ per $i \le n$, $j > n$ sono nulli per ipotesi. Allo stesso modo

$$\sum_{j=1}^{n} A^i{}_j\, D^j{}_k(g) = \langle i|\, A\, U(g)\,|k\rangle.$$

Il secondo lemma di Schur ci assicura quindi che $\langle i|A|j\rangle = a\,\delta^i_j$. ∎

Il secondo e il terzo teorema informano invece circa gli elementi di matrice di A fra diversi s.s.i. minimi. Per brevità parleremo d'ora in poi di s.s.i. *equivalenti* quando sono equivalenti le corrisponenti r.i. di $\mathcal{G}$.

Teorema 2: Se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ sono s.s.i. minimi non equivalenti, finiti e tra loro ortogonali, e se $\mathcal{V}_3$ è il complemento ortogonale a $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$, in una base adattata a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ si ottiene per A la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} a\,I & 0 & P \\ \hline 0 & b\,I & Q \\ \hline R & S & T \end{array}\right)$$

Nota: Questo teorema aggiunge, rispetto al primo, una *regola di selezione*: gli elementi di matrice di A fra s.s. non equivalenti sono nulli.

Dim.: Si ragiona più o meno come prima: sia $|1,i\rangle$ una base di $\mathcal{V}_1$, $|2,j\rangle$ una base di $\mathcal{V}_2$, $|3,k\rangle$ una base di $\mathcal{V}_3$. Dimostriamo che

$$\sum_{i'=1}^{n_1} \langle 1,i|\, U(g)\, |1,i'\rangle\, \langle 1,i'|A\, |2,j'\rangle = \sum_{j=1}^{n_2} \langle 1,i|A\, |2,j\rangle\, \langle 2,j|\, U(g)\, |2,j'\rangle. \tag{6–2}$$

Infatti:

$$\sum_{i'=1}^{n_1} \langle 1,i|\, U(g)\, |1,i'\rangle\, \langle 1,i'|A\, |2,j'\rangle = \langle 1,i|\, U(g)\, A\, |2,j'\rangle$$

perché $U(g)$ non ha elementi di matrice tra $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ né tra $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_3$. Per la stessa ragione

$$\sum_{j=1}^{n_2} \langle 1,i|A\, |2,j\rangle\, \langle 2,j|\, U(g)\, |2,j'\rangle = \langle 1,i|\, A\, U(g)\, |2,j'\rangle$$

e basta ricordare che A e $U(g)$ commutano per arrivare alla (6–2). Siamo ora nelle ipotesi del primo lemma di Schur, e quindi $\langle 1,i|A\, |2,j\rangle = 0$ perché $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ non sono equivalenti. ∎

Teorema 3: Nelle stesse ipotesi del teorema 2, ma se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ sono equivalenti, in una base adattata a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ si ottiene per A la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} a\,I & b\,I & P \\ \hline c\,I & d\,I & Q \\ \hline R & S & T \end{array}\right) \tag{6–3}$$

Inoltre se A è autoaggiunto esistono sempre in $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ due s.s. ortogonali, $\mathcal{V}_1'$ e $\mathcal{V}_2'$ ancora invarianti minimi ed equivalenti, per i quali vale la tesi del teorema 2.

Dim.: Le matrici $D_1(g)$, $D_2(g)$ sono unitarie per ipotesi. Inoltre se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ sono equivalenti esiste una S tale che

$$\forall g \in \mathcal{G}:\ \ D_2(g)\, S = S\, D_1(g)$$

e prendendo le coniugate hermitiane

$$S^+ D_2(g)^+ = D_1(g)^+ S^+.$$

Moltiplicando:

$$D_2(g)\,SS^+D_2(g)^+ = S\,D_1(g)\,D_1(g)^+S^+ = SS^+$$

perché $D_1(g)$ è unitaria. Anche $D_2(g)$ è unitaria, e quindi

$$\forall g \in \mathcal{G}:\;\; D_2(g)\,SS^+ = SS^+D_2(g);$$

allora il secondo lemma di Schur ci dice che $SS^+ = k\,I$, e k è reale positivo perché SS^+ è hermitiana positiva. Basta dunque moltiplicare S per $k^{-1/2}$ perché diventi unitaria.

Se usiamo in $\mathcal{V}_2$, anziché la base $|2,j\rangle$, la

$$|\bar{2},j\rangle = \sum_{j'} |2,j'\rangle\,S^{j'}{}_j$$

le due r. divengono identiche. Il secondo lemma di Schur ci dice perciò non solo che $\langle 1,i|A\,|1,j\rangle = a\,\delta^i_j$ e che $\langle \bar{2},i|A\,|\bar{2},j\rangle = d\,\delta^i_j$, come nel teorema 1, ma anche che $\langle 1,i|A\,|\bar{2},j\rangle = b\,\delta^i_j$ e $\langle \bar{2},i|A\,|1,j\rangle = c\,\delta^i_j$.

Se A è autoaggiunto la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è hermitiana; sia T una matrice 2×2 unitaria, che la diagonalizza, e definiamo

$$\begin{aligned} |1',i\rangle &= |1,i\rangle\,T^1{}_1 + |\bar{2},i\rangle\,T^2{}_1 \\ |2',i\rangle &= |1,i\rangle\,T^1{}_2 + |\bar{2},i\rangle\,T^2{}_2. \end{aligned}$$

Lasciamo al lettore di verificare che le due basi così costruite generano i s.s. della tesi. ∎

Osservazione: In base al teorema 3 si può ritenere che sia inutile considerare il caso di una matrice del tipo (6–3), ossia con elementi non nulli tra s.s.i. equivalenti. Occorre però considerare che talvolta la scelta della base è dettata da altre esigenze: ad es. la si sceglie in modo che sia diagonale un'altra osservabile simmetrica. D'altro canto non è generalmente vero che due osservabili A e B, entrambe simmetriche, possano essere diagonalizzate nella stessa base: ciò accade solo se $[A,B]=0$.

Commento finale

I teoremi visti in questo capitolo riescono utili nelle applicazioni fisiche per diverse ragioni:

– In primo luogo garantiscono la degenerazione di osservabili simmetriche. Di fatto, tutte le situazioni di degenerazione note nei sistemi fisici sono riconducibili a simmetrie; ne vedremo esempi nel seguito.

– Attraverso le regole di selezione danno informazioni su quali stati possono o no essere "accoppiati" da una perturbazione: il caso canonico è quello dell'emissione o assorbimento di radiazione, ma ne vedremo altri.

– Consentono una notevole economia nel calcolo di elementi di matrice: molti sono nulli, o sono uguali tra loro, nel qual caso basta calcolarne uno solo.

Occorre tener presente che a rigore la degenerazione e le regole di selezione sono conseguenza necessaria della simmetria, ma niente vieta che possano presentarsi anche in assenza di simmetria: un esempio potrebbero essere le cosiddette "degenerazioni accidentali," come quella dell'atomo d'idrogeno se si trascura la struttura fina.

In realtà quella degenerazione è tutt'altro che accidentale, in quanto discende da un'invarianza più ampia di quella per rotazioni, che esiste, come è noto, per il potenziale coulombiano. Infatti accanto al momento angolare c'è un altro insieme di tre costanti del moto: le componenti del vettore di Lenz. È questa un'indicazione che il gruppo d'invarianza è più ampio di SO(3), ed è infatti un gruppo SO(4), di cui il gruppo delle rotazioni è s.g. Non è però facile descrivere le operazioni di simmetria di questo SO(4): infatti esse coinvolgono in modo complicato tanto le coordinate quanto i momenti coniugati.

Per mettere in rilievo un ultimo punto, consideriamo un esempio. Un atomo avrà sempre livelli degeneri a causa della simmetria per rotazioni (con la sola eccezione degli stati S, che corrispondono a r. unidimensionali di SO(3)). In presenza di campo magnetico la simmetria si riduce a SO(2), che è un gruppo commutativo e ha quindi soltanto r.i. unidimensionali. Ne segue che non è più da attendersi alcuna degenerazione, anche se, come abbiamo già detto, non è possibile escluderla rigorosamente.

Di fatto è noto che l'effetto Zeeman consiste proprio nella completa risoluzione della degenerazione, ma con una caratteristica addizionale: i sottolivelli che provengono da uno stesso livello imperturbato sono equidistanti.

Questa regolarità non è deducibile da ciò che sappiamo finora: la ricaveremo più avanti, come conseguenza del teorema di Wigner–Eckart, insieme con la giustificazione della formula di Landé per la separazione dei sottolivelli. La ragione è che non basta sapere che la hamiltoniana perturbata non è più invariante (ciò potrebbe accadere in infiniti modi); occorre aggiungere le informazioni che abbiamo su come la perturbazione si trasforma per rotazioni.