

CAPITOLO 4

Lo spin dell'elettrone

Consideriamo per cominciare un elettrone fermo. È noto che esso è dotato di un *momento angolare intrinseco*, per il quale si usa il termine inglese *spin*. Questo spin è un *grado di libertà interno* della particella, che si aggiunge ai consueti gradi di libertà che ne descrivono il moto nello spazio. Non è qui possibile esaminare i fondamenti sperimentali di questa asserzione, come pure di molte di quelle che faremo tra breve.

Se ci disinteressiamo del moto dell'elettrone, possiamo limitarci a studiare questo grado di libertà interno, che però è *intrinsecamente quantistico*: non ha analogo classico e non può essere descritto, neppure approssimativamente, con concetti classici. (È perciò sbagliato e fonte di sicuri errori pensare all'elettrone come una minuscola "trottola.")

Il mom. ang. di spin è comunque un vettore (meglio uno pseudovettore, ma ora la distinzione non è necessaria). Lo indicheremo con \vec{s} . Se fissiamo una direzione, che prendiamo come asse z , e misuriamo la componente s_z di \vec{s} , troviamo due soli valori: $\pm \frac{1}{2}\hbar$. Per questa ragione si dice che l'elettrone ha spin $1/2$. Più esattamente, il sistema dello spin *ha due soli stati*: si applicano perciò tutte le considerazioni fatte nel cap. precedente. In particolare possiamo usare le matrici di Pauli, ponendo

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\hbar \vec{\sigma}. \quad (4-1)$$

Si noti che la (4-1) è molto di più che una semplice definizione, in quanto determina le relazioni algebriche fra la componenti del momento di spin; in particolare

$$[s_x, s_y] = i\hbar s_z \quad \text{ecc.} \quad (4-2)$$

La giustificazione della (4-2), su cui non possiamo soffermarci, sta proprio nell'essere \vec{s} un momento angolare.

La (4-2) mostra che due diverse componenti dello spin non sono mai compatibili e non potranno quindi essere misurate insieme. Vedremo fra poco un possibile procedimento di misura, che dà un'interpretazione intuitiva di tale incompatibilità.

Richiamando il teorema visto a proposito delle matrici di Pauli, possiamo anche dire che *ogni stato di spin di un elettrone è autostato di una qualche componente dello spin*.

Occorre anche ricordare che allo spin di un elettrone è associato un *momento magnetico*, che in unità di Gauss vale

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{mc} \vec{s}. \quad (4-3)$$

Gli autovalori di μ_z (come di qualsiasi altra componente) sono $\pm\mu_0$, dove

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (4-4)$$

si chiama *magnetone di Bohr*. Il fatto che l'elettrone possieda un momento magnetico intrinseco ha moltissime conseguenze nella fisica atomica, nella chimica, nelle proprietà dei solidi. . .

Qui interessa concentrarsi su un solo fatto: vi sono atomi che presentano, nello stato fondamentale, un momento angolare e un momento magnetico totali esattamente pari a quello di un singolo elettrone. Questo fatto, che ha avuto grandissima importanza storica nello sviluppo della m.q., perché ha fornito un metodo pressoché diretto per evidenziare le proprietà dello spin, è anche alla base di un esperimento, anch'esso storico, che si presta ottimamente a funzionare da esperimento ideale per molti dei problemi che dobbiamo trattare. Ne parleremo tra poco.

Polarizzazione dello spin

Dato che un sistema di spin $1/2$ è formalmente identico al sistema delle polar. di un fotone, è naturale parlare di polar. anche per lo spin. Possiamo quindi parlare di fasci di elettroni (o di atomi) variamente polarizzati, oppure non polarizzati. Ci sono però alcune differenze, non nel formalismo matematico, ma nell'interpretazione fisica.

In primo luogo, mentre la polar. dei fotoni è necessariamente *trasversale* (abbiamo infatti parlato di polar. x e y per un fotone che viaggia lungo z) questa restrizione non c'è per lo spin elettronico: abbiamo anzi visto che qualunque stato di spin è autostato di una certa componente dello spin, il che può essere espresso dicendo che lo spin è polarizzato nella corrispondente direzione.

In secondo luogo due stati ortogonali corrispondono ad autovalori opposti per es. della componente s_z : sarà quindi naturale indicarli con $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Parlando alla buona si dice spesso "spin in su" e "spin in giù," ma questo è un modo di dire scorretto: vediamo perché.

L'espressione "spin in su" fa pensare che il vettore di spin sia diretto ad es. nel verso positivo dell'asse z . Allora le componenti s_x e s_y di \vec{s} dovrebbero essere nulle, mentre *questo non è vero*, per due ragioni:

- 1) Un autostato di s_z non è autostato di s_x né di s_y , come si vede ad es. dalle matrici: nella base $|+\rangle, |-\rangle$ l'oss. s_z è diagonale, come è giusto; ma s_x e s_y non sono affatto diagonali, anzi gli elementi diagonali sono nulli.
- 2) L'ultima osservazione mostra che espressioni come $\langle +|s_x|+\rangle$ ecc. sono nulle, ossia è nullo il valor medio di s_x e s_y tanto sullo stato $|+\rangle$ quanto su $|-\rangle$; ma se si esegue una misura di queste oss. *non si troverà mai zero* (che non è fra gli autovalori) ma solo $\pm\frac{1}{2}\hbar$.

Infine un fascio non polarizzato potrà esser visto come una miscela 50-50 di particelle negli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ rispetto a una qualsiasi direzione risulti conveniente scegliere.

L'esperimento di Stern e Gerlach

Nel 1922 Stern e Gerlach eseguirono un esperimento che sarebbe poi stato ripetuto, per diversi scopi, in innumerevoli varianti fino a tutt'oggi, in quanto inaugurava una tecnica fondamentale: quella della *separazione magnetica* dei fasci atomici.

La teoria dell'esperimento secondo la fisica classica è la seguente: se un atomo possiede un momento magnetico $\vec{\mu}$, quando immerso in un campo magnetico \vec{B} esso acquista un'energia potenziale

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (4-5)$$

Se prendiamo l'asse z nella direzione del campo avremo $V = -\mu_z B$. Se il campo non è uniforme, ma varia proprio lungo l'asse z , alla variazione dell'en. potenziale corrisponde una forza, diretta come z , che in grandezza e segno vale

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (4-6)$$

Se mandiamo un fascio collimato di atomi in direzione perpendicolare al campo (asse x) in modo che percorrano in esso un tratto abbastanza lungo, la forza produrrà una deflessione dalla traiettoria rettilinea che si avrebbe in assenza di campo, e la deflessione sarà proporzionale a μ_z .

Occorre tener presente che il sistema di forze che il campo produce sull'atomo ha anche un momento risultante rispetto al centro di massa (in parole povere, una coppia) e si potrebbe pensare che l'effetto sia di orientare $\vec{\mu}$ parallelamente a \vec{B} . Non è così, perché l'atomo possiede certamente anche un momento angolare (senza del quale non potrebbe avere momento magnetico). La coppia sopra detta causa perciò non già un orientamento di $\vec{\mu}$, bensì una *precessione* attorno a \vec{B} . Ciò che più conta, la componente μ_z rimane costante. È solo per questo che possiamo correttamente asserire che la deflessione sarà proporzionale a μ_z .

In condizioni ordinarie i momenti magnetici degli atomi del fascio dovrebbero essere orientati in modo casuale (fascio non polarizzato) e perciò dovremmo aspettarci che il fascio si sparpagli in direzione z , poiché ci saranno nel fascio tutti i possibili valori di μ_z fra $-|\vec{\mu}|$ e $+|\vec{\mu}|$.

L'esperimento fu eseguito originariamente con atomi di argento, che venivano raccolti su una lastrina di vetro. L'osservazione mostrò tutt'altro risultato da quello previsto secondo la teoria classica: il fascio *si divideva in due*, corrispondenti a due soli valori di μ_z , di segno opposto e uguale grandezza.

A posteriori, sapendo che l'atomo di argento ha spin e momento magnetico uguali a quelli del singolo elettrone, la cosa si spiega. L'oss. μ_z ha due soli autovalori, di segno opposto e modulo un magnetone di Bohr. Perciò anche l'energia potenziale ha due soli valori possibili, a seconda dello stato di spin dell'atomo, e a questo corrispondono due sole possibili deviazioni, come appunto si osserva.

È anche evidente la forte analogia col comportamento di un cristallo birifrangente rispetto ai fotoni. Ciò non toglie che non sia facile accettare intuitivamente il risultato, specialmente se si ragiona come segue. Il fatto che sulla lastrina si vedano due macchie distinte sembra indicare che i momenti magnetici degli atomi si sono orientati in due modi distinti rispetto al campo, con valori $\pm\mu_0$ della componente z . Ma gli atomi che entrano nel campo sono orientati a caso, e abbiamo visto che il campo non può cambiare l'angolo fra $\vec{\mu}$ e \vec{B} : siamo di fronte a un paradosso?

Peggio: supponiamo di selezionare, in uscita dall'apparato, gli atomi con $\mu_z > 0$, e di mandarli in un secondo apparato simile al primo, ma col campo diretto secondo y . Che cosa dobbiamo aspettarci? Ora sappiamo che i momenti sono tutti nello stesso stato...

L'analogia con la discussione fatta per i fotoni già dice che cosa accadrà: lo stato che abbiamo preparato non è autostato di s_y , ma è sovrapposizione (con uguali pesi) dei due autostati con autovalori opposti. Quindi all'uscita del secondo apparato metà degli atomi si sposterà nel verso positivo dell'asse y , metà nel verso negativo.

Lo stesso accade dunque nell'esperimento originario: anche se supponiamo che il fascio sia una miscela di atomi con tutte le orientazioni possibili (ossia in tutti gli stati di spin possibili), si verifica che ai fini delle misure che è possibile eseguire il fascio è indistinguibile da uno formato per metà da atomi nell'autostato $|+\rangle$ e per metà nell'autostato $|-\rangle$. Come abbiamo già visto, questa è la più generale descrizione possibile di un fascio non polarizzato.

L'esperimento di Stern–Gerlach, visto come una misura delle oss. di spin, permette anche di capire perché due oss. distinte siano incompatibili. Per misurare la componente z occorre un campo diretto secondo z ; per misurare la componente y occorre un campo diretto secondo y . Non è possibile averli entrambi nello stesso apparato, perché darebbero semplicemente luogo alla loro somma vettoriale; comunque a un unico campo con direzione intermedia.

Se invece si costruiscono due apparati e si manda il fascio successivamente in uno e poi nell'altro, selezionando nel primo la parte di atomi che ha fornito un certo risultato (ad es. quello positivo) per la misura di s_z , avremo atomi che non sono più nello stato di spin iniziale, e la seconda misura darà un risultato diverso che se fosse stata eseguita per prima. È questo che s'intende quando si dice che *la misura di un'oss. perturba lo stato del sistema*, in maniera tale da rendere impossibile la misura simultanea di oss. non compatibili.

L'evoluzione degli stati di spin

La spiegazione “quantistica” che abbiamo data dell'esperimento di Stern-Gerlach è in realtà ibrida e incompleta: abbiamo tenuto conto del comportamento quantistico degli atomi quanto ai possibili valori di μ_z , ma abbiamo ancora descritto il moto in termini di forze agenti e quindi di legge di Newton. Avremmo invece dovuto applicare anche al moto dell'atomo l'equazione differenziale di evoluzione degli stati (2-1). Questo al duplice scopo di mostrare

- a) che le traiettorie degli atomi vengono modificate dal campo magnetico così come prevede la meccanica classica
- b) che anche la precessione del momento magnetico ha un'interpretazione quantistica.

La discussione del punto a) ci porterebbe al di là dei limiti che ci siamo posti; vogliamo invece dedicare un po' di spazio al punto b).

La formulazione del problema è semplice: un atomo dotato di momento magnetico avrà nella sua hamiltoniana un termine $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, corrispondente all'energia potenziale (4-5). Anzi, se ci occupiamo solo degli stati di spin l'hamiltoniana si riduce proprio a

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{mc} \vec{s} \cdot \vec{B}$$

dove la seconda espressione è valida, per la (4-3), se il momento magnetico è quello dello spin di un singolo elettrone, come accade appunto nel caso che c'interessa. Sostituendo l'espressione di \vec{s} mediante le matrici di Pauli, e ricordando la definizione del magnetone di Bohr (4-4):

$$H = \mu_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \mu_0 B \sigma_z$$

se assumiamo l'asse z nella direzione del campo.

Dobbiamo ora integrare l'equazione di Schrödinger (2-1) per il generico stato di spin:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |t\rangle = H |t\rangle = \mu_0 B \sigma_z |t\rangle.$$

Osserviamo anzitutto che gli autostati di σ_z (quindi di s_z e di μ_z) sono autostati di H , ossia stati stazionari. Perciò la loro evoluzione è semplice, come abbiamo visto al Cap. 2:

$$|\pm, t\rangle = \exp\left(\mp i \frac{\mu_0 B}{\hbar} t\right) |\pm, 0\rangle = \exp\left(\mp i \frac{eB}{2mc} t\right) |\pm, 0\rangle.$$

Uno stato generico sarà sovrapposizione dei due stati stazionari:

$$|t\rangle = c_+ |+, t\rangle + c_- |-, t\rangle = c_+ \exp\left(-i \frac{eB}{2mc} t\right) |+, 0\rangle + c_- \exp\left(i \frac{eB}{2mc} t\right) |-, 0\rangle.$$

Con questo il problema è risolto, ma occorre interpretare il risultato. Conviene ragionare sulle oss., notando in primo luogo che σ_z (e quindi s_z e μ_z) è una costante del moto, dato che commuta con H : questo implica che il suo valor medio *su qualunque stato* è costante. Naturalmente ciò non è vero per σ_x e σ_y , ma vale la (2-8):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle t | \sigma_x | t \rangle = \langle t | [\sigma_x, H] | t \rangle \quad (4-7)$$

e analoga per σ_y .

Usando le relazioni di commutazione (3-2), la (4-7) diventa

$$\frac{d}{dt} \langle t | \sigma_x | t \rangle = -\frac{eB}{mc} \langle t | \sigma_y | t \rangle \quad (4-8)$$

e insieme:

$$\frac{d}{dt} \langle t | \sigma_y | t \rangle = \frac{eB}{mc} \langle t | \sigma_x | t \rangle. \quad (4-9)$$

L'integrazione delle (4-8), (4-9) è facile:

$$\begin{aligned} \langle t | \sigma_x | t \rangle &= \langle 0 | \sigma_x | 0 \rangle \cos \omega t - \langle 0 | \sigma_y | 0 \rangle \sin \omega t \\ \langle t | \sigma_y | t \rangle &= \langle 0 | \sigma_x | 0 \rangle \sin \omega t + \langle 0 | \sigma_y | 0 \rangle \cos \omega t \end{aligned} \quad (4-10)$$

dove si è posto $\omega = eB/mc$.

Le (4-10), insieme col fatto che $\langle t | \sigma_z | t \rangle$ è costante, mostrano che il vettore $\langle t | \vec{\sigma} | t \rangle$ (e quindi anche $\langle t | \vec{\mu} | t \rangle$) compie una precessione attorno al campo, in senso antiorario, con velocità angolare ω : esattamente il risultato classico. In realtà non c'è da meravigliarsi: tutto dipende dal fatto che l'equazione (4-7), con le relative relazioni di commutazione, hanno la stessa struttura delle equazioni della meccanica hamiltoniana classica.

Depolarizzazione di un fascio atomico

Vogliamo discutere ora più in dettaglio che cosa accade al fascio atomico dell'esperimento di Stern-Gerlach quando attraversa il campo. A questo scopo sarà indispensabile dare almeno gli ordini di grandezza delle varie quantità in gioco.

Per cominciare, riprendiamo la (4-6), per ricavarne la deflessione subita dal fascio. L'impulso ceduto a un atomo è $\Delta p_z = F_z t$, se Δt è il tempo di attraversamento del campo; di conseguenza l'angolo di deflessione è

$$\vartheta = \frac{\Delta p_z}{p_x} = \frac{F_z t}{Mv} = \frac{F_z l}{Mv^2} = \frac{\mu_0 l}{Mv^2} \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{e\hbar l}{2mcMv^2} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (4-11)$$

dove l è la lunghezza del campo, v la velocità degli atomi. Supponiamo che gli atomi vengano emessi da una sorgente riscaldata a una certa temperatura T : allora per la velocità quadratica media vale

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

e sostituendo nella (4-11):

$$\vartheta = \frac{e\hbar}{6mckT} \frac{\partial B}{\partial z}.$$

Introduciamo ora i valori numerici: prendiamo

$$l = 10 \text{ cm}, \quad B = 5000 \text{ G}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 5000 \text{ G/cm}, \quad T = 1000 \text{ K} \quad (4-12)$$

e ne risulta $\vartheta \simeq 0.5$ mrad; un angolo piccolo, ma ben misurabile mettendo la lastrina, poniamo, a 50 cm dal campo.

Occorre però notare che non possiamo utilizzare il fascio atomico così come esce dal forno: infatti la distribuzione (maxwelliana) delle velocità sparpaglierebbe il fascio, dato che la deflessione va come $1/v^2$. Si dovrà operare una *selezione in velocità*, per es. con la tecnica (fenditure rotanti) inventata appunto da Stern. Si capisce che il fascio non potrà comunque essere esattamente monocinetico, e di questo dovremo ricordarci fra poco.

Chiediamoci ora che cosa accade allo stato di spin dell'atomo. La risposta è già nella (4-10), e abbiamo visto che il vettore $\langle \vec{s} \rangle$ ruota di un angolo ωt attorno all'asse z . Con i valori (4-12) risulta $\omega t \simeq 3 \cdot 10^6$ rad, il che vuol dire che lo spin fa 500 000 giri nel tempo in cui l'atomo attraversa il campo. Il fatto che si tratti di un numero così grande ci assicura che anche se i parametri scelti cambiassero un po', il fatto essenziale (lo spin fa un gran numero di giri) rimarrebbe comunque vero.

Ma l'angolo ωt dipende dall'intensità di \vec{B} (proporzionalmente) e dalla velocità (inversamente). Se consideriamo i singoli atomi, questi non avranno tutti la stessa velocità, e inoltre traverseranno il campo non proprio sulla stessa traiettoria: entrambi i fattori fanno sì che l'angolo di rotazione debba cambiare da un atomo all'altro. Supponiamo pure che la variazione sia piccola, per es. dello 0.1%: si tratta comunque di 500 giri in più o in meno.

Dunque anche se facciamo l'ipotesi che gli atomi entrino nel campo tutti esattamente nello stesso stato di spin (per es. perché selezionati da una precedente misura) ne usciranno comunque distribuiti su tutti gli stati del tipo

$$|t\rangle = c_+|+, 0\rangle + c_-e^{i\omega t}|-, 0\rangle$$

dove il fattore di fase nel secondo termine percorre tutto il cerchio unitario. Siamo quindi in presenza di un insieme di atomi che non sono tutti in uno stesso *stato puro*: è quella che si dice una *miscela statistica*.

Vediamone le conseguenze per la misura successiva di un'oss. di spin. È chiaro che per quanto riguarda s_z non cambia niente: le probabilità dei due risultati rimangono comunque $|c_+|^2$ e $|c_-|^2$. Ma per le altre componenti le cose cambiano. Supponiamo, per fissare le idee, che lo stato iniziale fosse autostato di s_x , con autovalore $1/2$: ciò significa

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle).$$

Se proiettiamo $|t\rangle$ su $|0\rangle$ troviamo

$$\langle 0|t\rangle = \frac{1}{2}(1 + e^{i\omega t})$$

$$|\langle 0|t\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega t)$$

e mediando su ωt si trova $1/2$. Lo stesso otterremmo con una misura di s_y , il che mostra che abbiamo ottenuto un fascio *non polarizzato*.

Questo semplice esempio dà una prima idea di come agisce uno strumento di misura macroscopico. L'apparato di Stern–Gerlach col campo diretto come z può essere visto come uno strumento di misura di s_z : infatti

- 1) esso separa spazialmente gli atomi a seconda dell'autovalore di s_z
- 2) anche se si trascura la separazione spaziale (magari perché si ricombinano i due fasci) resta il fatto che le fasi delle componenti $|+\rangle$ e $|-\rangle$ vengono alterate in modo casuale da un atomo all'altro, per cui un fascio di atomi inizialmente in uno stato puro viene trasformato in una miscela statistica.

È necessario però osservare che le considerazioni fatte sono ben lontane dall'esaurire il problema della misura quantistica. Ci sono infatti strumenti (ad es. un rivelatore, usato come misuratore di posizione) che non sono riconducibili a questo schema.