58. Complementi di relatività – I

In questo capitolo e nel successivo tratteremo alcuni complementi di relatività. Per le notazioni, e per alcuni presupposti di base, faremo riferimento a *Rel.*

Le coordinate di un evento

Dati due riferimenti inerziali, K e K′, che supporremo ugualmente orientati, possiamo scegliere in entrambi coordinate cartesiane in modo tale che la velocità relativa sia diretta secondo gli assi x, e per di più fissare le origini O e O′ così che coincidano all'istante $t = 0$. In queste condizioni sappiamo che nella meccanica newtoniana valgono le *trasformazioni di Galileo*:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \tag{58–1}$$

dove l'ultima relazione esprime il fatto che il tempo è assoluto, e quindi indipendente dal riferimento.

Precisiamo il significato delle (58–1): se un punto materiale all'istante t occupa la posizione contraddistinta in K dalle coordinate (x, y, z), allora lo stesso punto *allo stesso istante* occupa in K′ la posizione data dalle coordinate (x', y', z') legate alle precedenti dalle (58–1) (naturalmente si può anche invertire il ruolo di K e K′ nel discorso).

Quando passiamo alla meccanica relativistica, sappiamo che le (58–1) non possono valere, perché il tempo non può essere lo stesso nei due riferimenti. Dobbiamo dunque aspettarci delle relazioni diverse, dalle quali risulti in generale $t \neq t'$. Nasce allora il problema di come riconoscere che nei due riferimenti "stiamo parlando della stessa cosa," perché altrimenti non sapremmo che senso dare al problema di una trasformazione di coordinate. La risposta sta nel concetto di *evento*:

> *Evento è un fenomeno fisico* obbiettivo, *e quindi osservabile e misurabile in qualsiasi riferimento, sufficientemente localizzato nello spazio e nel tempo perché sia possibile — per i nostri scopi — caratterizzarlo con un singolo punto dello spazio e con un singolo istante di tempo.*

Per questi motivi talvolta si usa il termine "punto-istante" per indicare un evento. A seconda del problema, nella classe degli eventi potranno entrare le cose più disparate: il decadimento di una particella, la partenza di un aereo, l'esplosione di una supernova, l'arrivo di un treno di onde gravitazionali in un rivelatore, ecc. Resta il fatto che per noi un evento è completamente individuato dalle sue coordinate. Acquista allora senso il problema: trovare che relazione esiste tra le coordinate *di uno stesso evento* nei due riferimenti K e K$'$. La risposta della meccanica newtoniana è data dalle (58–1): quella relativistica dobbiamo ancora trovarla.

Diagrammi spazio-tempo

Com'è spiegato in *Rel*, la rappresentazione tradizionale dei diagrammi spazio-tempo in relatività si fa portando la coordinata spaziale in ascissa, e il tempo in ordinata. Anzi conviene riportare in ordinata ct, ovvero usare unità in cui $c = 1$, o ancora scegliere le unità sugli assi in modo che la lunghezza di un secondo sull'asse dei tempi sia uguale a quella di un secondo-luce sull'asse delle x (tutte convenzioni equivalenti).

Comunque si veda la cosa, il fatto importante è che in questo modo la linea oraria di un segnale luminoso è sempre una retta a 45° (in senso ascendente, se la luce si propaga verso destra, discendente se si propaga verso sinistra: fig. 58–1).

Le trasformazioni di Lorentz

Vi sono innumerevoli modi di risolvere il nostro problema, che differiscono anzitutto nelle ipotesi di partenza. Noi faremo uso dei seguenti fatti (discussi in *Rel*):

– la velocità della luce è la stessa in K e in K$'$
– per due qualsiasi eventi che avvengono sull'asse x, l'espressione $\Delta t^2 - \Delta x^2/c^2$ è invariante (assume lo stesso valore nei due riferimenti).

Per definire la trasformazione delle coordinate, occorre ancora una precisazione, riguardante il tempo t'. Abbiamo già scelto l'origine di t all'istante in cui O e O$'$ coincidono: faremo lo stesso per t'. Ciò è quanto dire che l'evento Q, consistente nella coincidenza dei due punti O e O$'$, ha tutte le coordinate nulle, in entrambi i riferimenti.

Baseremo il ragionamento su di un esperimento ideale, che non è altro che una diversa versione dell'orologio a luce discusso in *Rel.* Nel punto O$'$ di K$'$ esiste una sorgente, che a un dato istante emette un lampo di luce, diretto nel verso positivo dell'asse x' (evento A). In un punto dell'asse x', che non occorre specificare, si trova uno specchio, che viene raggiunto dal lampo (evento B) e lo riflette. Il lampo torna in O$'$, dove viene rivelato (evento C).

Studieremo questo esperimento da entrambi i riferimenti, allo scopo di scoprire le relazioni che esistono fra le coordinate dei diversi eventi. Cominciamo con K$'$: le coordinate degli eventi sono (fig. 58–2):

$$\mathrm{A}\,(0, t'_\mathrm{A}), \qquad \mathrm{B}\,(x'_\mathrm{B}, t'_\mathrm{B}), \qquad \mathrm{C}\,(0, t'_\mathrm{C}).$$

La velocità della luce è nota, per cui abbiamo

$$t'_\mathrm{A} = t'_\mathrm{B} - x'_\mathrm{B}/c, \qquad t'_\mathrm{C} = t'_\mathrm{B} + x'_\mathrm{B}/c. \tag{58–2}$$

Passiamo al riferimento K (fig. 58–3). Qui avremo

$$\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}, t_\mathrm{A}), \qquad \mathrm{B}\,(x_\mathrm{B}, t_\mathrm{B}), \qquad \mathrm{C}\,(x_\mathrm{C}, t_\mathrm{C})$$

e dalla propagazione della luce

$$x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} = c\,(t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}), \qquad x_\mathrm{C} - x_\mathrm{B} = -c\,(t_\mathrm{C} - t_\mathrm{B}). \tag{58–3}$$

Inoltre $x_\mathrm{A} = vt_\mathrm{A}$ e $x_\mathrm{C} = vt_\mathrm{C}$, perché gli eventi A e C avvengono nel punto O′ di K′, che rispetto a K ha la legge oraria $x = vt$: inserendo queste nelle (58–3) si trovano due relazioni che ci saranno utili:

$$\begin{aligned} ct_\mathrm{B} - x_\mathrm{B} &= (c - v)\,t_\mathrm{A} \\ ct_\mathrm{B} + x_\mathrm{B} &= (c + v)\,t_\mathrm{C}. \end{aligned} \tag{58–4}$$

Non abbiamo usato finora l'invarianza del tempo proprio: applicandola fra l'evento Q e l'evento A si trova

$$t_\mathrm{A}^2 - x_\mathrm{A}^2/c^2 = {t'_\mathrm{A}}^2$$

e tenendo presente che $x_\mathrm{A} = vt_\mathrm{A}$ si ottiene

$$t_\mathrm{A} = \gamma t'_\mathrm{A} \qquad \left(\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$$

e analogamente

$$t_\mathrm{C} = \gamma t'_\mathrm{C}.$$

Sostituendo nelle (58–4) troviamo

$$\begin{aligned} ct_\mathrm{B} - x_\mathrm{B} &= \gamma\,(c - v)\,t'_\mathrm{A} \\ ct_\mathrm{B} + x_\mathrm{B} &= \gamma\,(c + v)\,t'_\mathrm{C} \end{aligned}$$

e da queste

$$\begin{aligned} x_\mathrm{B} &= \tfrac{1}{2}\gamma\,[(c + v)\,t'_\mathrm{C} - (c - v)\,t'_\mathrm{A}] \\ t_\mathrm{B} &= \frac{\gamma}{2c}\,[(c + v)\,t'_\mathrm{C} + (c - v)\,t'_\mathrm{A}]\,. \end{aligned}$$

Infine usando le (58–2) e semplificando:

$$\begin{aligned} x_\mathrm{B} &= \gamma\,(x'_\mathrm{B} + vt'_\mathrm{B}) \\ t_\mathrm{B} &= \gamma\left(t'_\mathrm{B} + \frac{v}{c^2}x'_\mathrm{B}\right). \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto due relazioni fra le coordinate di uno stesso evento B nei due riferimenti. Ma l'evento B è qualunque, per cui le relazioni hanno validità generale: possiamo quindi scriverle senza specificare l'indice $_{\mathrm{B}}$, e ricordando per completezza anche le altre due coordinate, che restano invariate:

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\Bigl(t' + \frac{v}{c^2}x'\Bigr)\,. \end{aligned} \tag{58–5}$$

Le (58–5) sono le famose *trasformazioni di Lorentz*, che risolvono il nostro problema.

Possiamo chiederci come siano fatte le trasformazioni inverse, che danno le coordinate di K′ in funzione di quelle di K. Ci si può arrivare risolvendo le (58–5) rispetto a x', t', ma c'è un modo molto più semplice: i due riferimenti sono in posizione simmetrica, nel senso che se K′ si muove rispetto a K con velocità v, K si muove rispetto a K′ con velocità $-v$. Quindi le formule inverse si ottengono dalle (58–5) semplicemente cambiando segno a v:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\Bigl(t - \frac{v}{c^2}x\Bigr)\,. \end{aligned}$$

Invarianza delle coordinate trasversali

Nel ragionamento che precede abbiamo dato per scontato che le coordinate y e z debbano restare invarianti nel passaggio dal riferimento K a K′, ma la cosa non è affatto ovvia: cerchiamo quindi di giustificarlo.

Osserviamo in primo luogo che il nostro esperimento ideale non cambia se sorgente, specchio e rivelatore anziché trovarsi sull'asse x stanno su di una retta ad esso parallela: per quanto riguarda le coordinate x e t tutto resta come prima. Il problema è dunque uno solo: pur essendo vero che questa retta avrà equazioni y = cost., z = cost. in entrambi i riferimenti, chi ci autorizza ad affermare che i valori di queste coordinate coincidano in K e in K′?

Si tratta in sostanza di dimostrare che le dimensioni di un oggetto in direzione trasversale rispetto al moto relativo dei due riferimenti non possono risultare diverse se misurate in uno o nell'altro (problema n. 7 di *Rel*). Possiamo arrivarci pensando al seguente esperimento ideale.

Un autocarro deve attraversare una galleria molto stretta, e si pone il problema se possa entrarci. Il riferimento K sia quello della strada, K′ quello solidale all'autocarro. Il fatto che le dimensioni della galleria siano o no sufficienti ha carattere *obbiettivo*, in quanto l'attraversamento senza danni (o il disastro che si avrebbe in caso contrario) sono rilevabili dagli strumenti di qualsiasi riferimento. Ne segue che la condizione geometrica che assicura il passaggio *non dipende dal riferimento* in cui si fanno le misure.

Indichiamo con l_a la larghezza dell'autocarro, e con l_g quella della galleria, misurate da K; con l'_a e con l'_g le corrispondenti grandezze misurate da K$'$. L'attraversamento verrà giudicato possibile da K sse $l_\mathrm{a} < l_\mathrm{g}$; analogamente da K$'$ sse $l'_\mathrm{a} < l'_\mathrm{g}$. Il fatto che la possibilità dell'attraversamento non può dipendere dal riferimento ci assicura che

$$l_\mathrm{a} < l_\mathrm{g} \quad \Leftrightarrow \quad l'_\mathrm{a} < l'_\mathrm{g},$$

e quindi anche

$$l_\mathrm{a} = l_\mathrm{g} \quad \Leftrightarrow \quad l'_\mathrm{a} = l'_\mathrm{g}.$$

In parole: se due oggetti, uno dei quali è fermo rispetto a K e l'altro è fermo rispetto a K$'$, hanno le stesse dimensioni trasversali misurate da K, le hanno uguali anche se misurati da K$'$.

Supponiamo ora che sia $l'_\mathrm{a} = l_\mathrm{g}$ (in entrambi i riferimenti ci sono campioni di lunghezza, costruiti sulla base delle definizioni del Cap. 3). Se accadesse che $l_\mathrm{a} < l'_\mathrm{a}$ dovrebbe anche essere $l'_\mathrm{g} < l_\mathrm{g}$, perché i due riferimenti si trovano in situazione simmetrica; solo che la prima disuguaglianza implica $l_\mathrm{a} < l_\mathrm{g}$, ossia che l'autocarro passa, mentre la seconda dice $l'_\mathrm{g} < l'_\mathrm{a}$, ossia che non passa.

Abbiamo dunque dimostrato la tesi: *le dimensioni trasversali sono invarianti.*

La “composizione” delle velocità

Le (58–5) si riferiscono a un caso particolare, in quanto i due riferimenti sono ugualmente orientati, e la velocità relativa è stata presa lungo l'asse x. Tuttavia ci si può sempre ricondurre a questo caso con opportune rotazioni degli assi, perciò è inutile occuparsi del caso più generale.

È invece interessante ricavare dalle trasformazioni di Lorentz alcune conseguenze: la prima di cui ci vogliamo occupare è la “legge di composizione relativistica delle velocità,” espressione impropria per intendere “legge di trasformazione della velocità.” Si tratta di rispondere alla domanda: in che relazione sono le velocità di un dato punto materiale rispetto ai due riferimenti? Che cosa si sostituisce alla formula

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_\mathrm{rel}$$

della fisica galileiana?

Qui conviene lavorare sulle coordinate, perché, come vedremo, la x si comporta in modo diverso da y e z. Differenziamo le (58–5):

$$\begin{aligned}
v_x\,dt &= \gamma\,(v'_x\,dt' + v_{\rm rel}\,dt') \\
v_y\,dt &= v'_y\,dt' \\
v_z\,dt &= v'_z\,dt' \\
dt &= \gamma\Bigl(dt' + \frac{v_{\rm rel}}{c^2}\,v'_x\,dt'\Bigr)
\end{aligned}$$

(abbiamo tenuto conto che $dx = v_x\,dt$ ecc.; inoltre abbiamo scritto $v_{\rm rel}$ per il modulo della velocità relativa). Dividendo le prime tre per la quarta si arriva al risultato cercato:

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{v'_x + v_{\rm rel}}{1 + v_{\rm rel}v'_x/c^2} \\
v_y &= \frac{1}{\gamma}\,\frac{v'_y}{1 + v_{\rm rel}v'_x/c^2} \\
v_z &= \frac{1}{\gamma}\,\frac{v'_z}{1 + v_{\rm rel}v'_x/c^2}
\end{aligned}$$

che è forse più utile scrivere un po' diversamente:

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{v'_x + v_{\rm rel}}{1 + \vec v_{\rm rel}\cdot\vec v\,'/c^2} \\
v_y &= \frac{1}{\gamma}\,\frac{v'_y}{1 + \vec v_{\rm rel}\cdot\vec v\,'/c^2} \\
v_z &= \frac{1}{\gamma}\,\frac{v'_z}{1 + \vec v_{\rm rel}\cdot\vec v\,'/c^2}.
\end{aligned}$$

La contrazione delle lunghezze

È uno dei classici aspetti paradossali della relatività, noto anche col nome di *contrazione di Lorentz*: la lunghezza di uno stesso oggetto, misurata da due diversi riferimenti, è diversa. Più esattamente, se il corpo è fermo in K$'$, e l' è la sua lunghezza in questo riferimento, la lunghezza misurata in K è

$$l = l'/\gamma.$$

La dimostrazione è semplice, a condizione di aver ben chiaro che cosa si deve dimostrare. Siano A e B gli estremi del corpo, $x'_{\rm A}$ e $x'_{\rm B}$ le loro coordinate in K$'$ (che sono costanti). Nel riferimento K avremo

$$\begin{aligned} x_\mathrm{A} &= \gamma\,(x'_\mathrm{A} + v t'_\mathrm{A}) \\ t_\mathrm{A} &= \gamma\Big(t'_\mathrm{A} + \frac{v}{c^2}\,x'_\mathrm{A}\Big) \\ x_\mathrm{B} &= \gamma\,(x'_\mathrm{B} + v t'_\mathrm{B}) \\ t_\mathrm{B} &= \gamma\Big(t'_\mathrm{B} + \frac{v}{c^2}\,x'_\mathrm{B}\Big). \end{aligned} \tag{58–6}$$

Queste valgono in generale, a tempi qualsiasi. Il punto centrale è che quando noi parliamo di lunghezza in K intendiamo che la misura sia fatta *a un dato istante*, ossia c'interessano le x degli estremi *allo stesso* t (coordinata temporale in K). Dalla seconda e dalla quarta, con $t_\mathrm{A} = t_\mathrm{B}$ si ottiene

$$t'_\mathrm{B} - t'_\mathrm{A} = -\frac{v}{c^2}\,(x'_\mathrm{B} - x'_\mathrm{A}) = -\frac{vl'}{c^2}. \tag{58–7}$$

Sottraendo la prima dalla terza:

$$l = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} = \gamma\left(l' - \frac{v^2 l'}{c^2}\right) = \frac{l'}{\gamma},$$

che è quanto si doveva dimostrare.

L'aspetto che sembra paradossale è l'apparente mancanza di simmetria: perché $l < l'$ e non $l' < l$, visto che i due riferimenti sono equivalenti? Le risposte sono due:

- Intanto non è vero che i due riferimenti siano equivalenti *per questo problema*, perché il corpo è fermo rispetto a uno e non rispetto all'altro.
- Inoltre la (58–7) mostra l'origine della dissimmetria: la misura *a uno stesso istante* fatta in K non è allo stesso istante rispetto a K$'$.

Quest'ultimo risultato ha un nome: *relatività della simultaneità*. Con ciò si vuol dire che eventi simultanei in K non lo sono in K$'$ (e viceversa, ovviamente).

Si noti che se nel ragionamento precedente facciamo $t'_\mathrm{A} = t'_\mathrm{B}$, sottraendo la prima delle (58–6) dalla terza troviamo direttamente $l = \gamma l'$, come deve essere: infatti stiamo dicendo che la misura è fatta allo stesso istante in K$'$, ossia che abbiamo scambiato i ruoli di K e di K$'$.

Rappresentazione grafica delle trasformazioni di Lorentz

Le (58–5) (limitandosi alle sole x, t) hanno una semplice rappresentazione grafica come trasformazione di coordinate nel piano (x, t). Dalle formule si vede che si tratta di una trasformazione lineare, omogenea, ma *non ortogonale*. Ciò era prevedibile, visto che la grandezza invariante non è la distanza euclidea ma il *tempo proprio* (si veda la discussione in *Rel*).

Ponendo nelle (58–5) $x' = 0$ si vede che l'asse t' ha l'equazione $x = vt$, il che era ovvio (si tratta del diagramma orario del punto O$'$). Se invece si fa $t' = 0$ si ottiene l'equazione dell'asse x', che è $t = vx/c^2$. Possiamo scrivere le due equazioni come segue:

$$x = \frac{v}{c}\,ct, \qquad ct = \frac{v}{c}\,x,$$

che mostrano come le due rette siano simmetriche rispetto alla bisettrice del primo quadrante, ossia formino angoli uguali rispettivamente con l'asse t e con l'asse x (fig. 58–4). Più esattamente,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c}.$$

59. Complementi di relatività – II

Come abbiamo discusso la trasformazione della velocità nel passaggio da un riferimento inerziale a un altro, così possiamo studiare la trasformazione di qualsiasi altra grandezza fisica. A noi interessano ora quantità di moto ed energia.

Trasformazione dell'impulso e dell'energia

Partiamo dalle definizioni (*Rel*, capitoli 8 e 9):

$$\vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau}, \qquad E = mc^2\,\frac{dt}{d\tau}. \tag{59–1}$$

Il significato delle derivate nelle (59–1) è il seguente: il moto di un punto materiale è rappresentato nello spazio-tempo da una *curva*, parametrizzata dal *tempo proprio* τ (invariante). In ogni punto della curva sono definite — in tutti i riferimenti inerziali — le coordinate spazio-temporali x, y, z, t che saranno funzioni di τ.

Dunque accanto alle (59–1) avremo

$$\vec{p}\,' = m\,\frac{d\vec{r}\,'}{d\tau}, \qquad E' = mc^2\,\frac{dt'}{d\tau},$$

e la cercata legge di trasformazione si otterrà semplicemente sostituendo le (58–5) nelle (59–1), e calcolando le derivate (attenzione: v e γ sono costanti, perché si riferiscono al moto relativo dei due riferimenti, che è uniforme):

$$\begin{aligned}
p_x &= m\,\frac{dx}{d\tau} = m\gamma\,\frac{d}{d\tau}(x' + vt') = \gamma\Bigl(p'_x + \frac{v}{c^2}\,E'\Bigr)\\
p_y &= m\,\frac{dy}{d\tau} = m\,\frac{dy'}{d\tau} = p'_y\\
p_z &= m\,\frac{dz}{d\tau} = m\,\frac{dz'}{d\tau} = p'_z\\
E &= mc^2\,\frac{dt}{d\tau} = mc^2\gamma\,\frac{d}{d\tau}\Bigl(t' + \frac{v}{c^2}\,x'\Bigr) = \gamma\,(E' + vp'_x).
\end{aligned} \tag{59–2}$$

Le (59–2) risolvono il problema, e hanno anche importanti conseguenze. Osserviamo, per cominciare, che la nostra dimostrazione vale per un punto materiale, ma se abbiamo un insieme di punti materiali *che non interagiscono* possiamo definire senza difficoltà

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \vec{p}_i, \qquad E_{\text{tot}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i E_i. \tag{59–3}$$

Se i punti interagiscono le definizioni (59–3) *non vanno più bene*: questo è chiaro per l'energia, e sulla quantità di moto torneremo tra poco.

Conservazione dell'impulso e dell'energia

Abbiamo già detto, trattando dei principi della dinamica, che anche la meccanica relativistica mantiene la conservazione dell'impulso: possiamo dunque ammettere che $\vec{P}$ rimanga costante nel corso dell'evoluzione del sistema. D'altra parte vale il principio di relatività: dunque sarà costante, accanto a $\vec{P}$, anche $\vec{P}'$, misurata in un altro riferimento inerziale K'.

Supponiamo ora che i punti materiali che formano il sistema interagiscano per un certo tempo, o più esattamente in una certa regione dello spazio-tempo (fig. 59–1), mentre prima e dopo l'interazione sia assente. Allora le definizioni (59–3) vanno bene prima e dopo, e debbono dare gli stessi valori per $\vec{P}$. Lo stesso accadrà per $\vec{P}'$. Ma se sommiamo su tutti i punti la prima delle (59–2), valida per ciascun punto, avremo

$$P_x = \gamma\left(P'_x + \frac{v}{c^2}\,E'_{\text{tot}}\right) \tag{59–4}$$

e se tanto P_x quanto P'_x sono costanti, lo stesso vale per E_{tot}. Abbiamo così dimostrato un risultato fondamentale:

> *La conservazione dell'impulso, unita al principio di relatività, implica la conservazione dell'energia.*

Ci troviamo dunque in una situazione completamente diversa dalla meccanica newtoniana, dove la conservazione dell'impulso può valere senza che valga quella dell'energia: ciò accade, come sappiamo, in presenza di forze dissipative, e in particolare nel caso di urti anelastici. Ma questo fa sorgere un problema: gli urti anelastici esistono: come vengono visti nella meccanica relativistica?

Nella meccanica newtoniana un urto nel quale agiscano forze dissipative si caratterizza dal fatto che *l'energia cinetica* finale è minore di quella iniziale. Questo resta necessariamente vero anche in relatività, mentre l'energia totale deve conservarsi. Ma sappiamo che per ciascun punto

$$E_i = T_i + m_i c^2$$

e di qui si vede la risposta: se E_{tot} si conserva, e T diminuisce, ciò significa che *la somma delle masse di riposo aumenta.*

È interessante osservare che la relatività compie qui l'unificazione di due situazioni che nella meccanica newtoniana erano del tutto distinte:

– i processi conservativi, nei quali vale la conservazione dell'energia meccanica (cinetica + potenziale)

– i processi dissipativi (anelastici) in cui l'energia meccanica non si conserva, e per ritrovare la conservazione occorre uscire dalla meccanica, introducendo altre forme d'energia.

Nella meccanica relativistica qualunque forma d'energia contribuisce alla massa di riposo, per cui la conservazione dell'energia vale sempre: solo che l'energia potrà apparire come energia cinetica o come massa di riposo (quest'ultima contiene i contributi di tutte le possibili energie *interne al sistema*).

La (59–4) ci mostra anche un'altra cosa: supponiamo che nel riferimento K$'$ sia $\vec{P} = 0$ (riferimento del centro di massa) e che fra i punti materiali che costituiscono il sistema vi sia interazione, così che in E_{tot} si debba includere anche la corrispondente energia potenziale. Allora nel riferimento K *anche l'energia potenziale contribuisce alla quantità di moto totale*, che quindi *non è la somma* delle quantità di moto dei singoli punti.

Il gruppo di Lorentz

Possiamo scrivere le (58–5), (59–2) in una forma leggermente diversa, che ne illumina il carattere unitario. Basta definire $\beta = v/c$, come si fa sempre, e poi usare ct in luogo di t ed E/c in luogo di E. Allora le (58–5) diventano

$$\begin{aligned} ct &= \gamma\, ct' + \beta\gamma\, x' \\ x &= \beta\gamma\, ct' + \gamma\, x' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

che possiamo anche scrivere in forma di matrici:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{59–5}$$

Allo stesso modo le (59–2) diventano

$$\begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \tag{59–6}$$

In questo modo si mettono in evidenza due cose:

– le leggi di trasformazione sono *lineari*
– la legge di trasformazione delle coordinate e quella dell'energia-impulso sono *uguali*.

Le quaterne (ct, x, y, z) e $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ possono essere interpretate come le componenti (in una certa base) di elementi di uno spazio vettoriale $\mathcal{V}^4$ sui reali (*quadrivettori*); (ct', x', y', z') e $(E'/c, p'_x, p'_y, p'_z)$ sono allora le componenti in un'altra base. Le trasformazioni di Lorentz danno la legge di trasformazione delle componenti di uno stesso quadrivettore da una base all'altra. Tali basi non sono però arbitrarie: infatti le trasformazioni di Lorentz lasciano invarianti le espressioni

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad (E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2. \tag{59–7}$$

Dunque in $\mathcal{V}^4$ esiste un *prodotto scalare* (non definito positivo) e le trasformazioni di Lorentz connettono quelle basi in cui il prodotto scalare ha la *forma canonica* (59–7).

Lo spazio $\mathcal{V}^4$ sta allo spazio-tempo come lo spazio dei vettori tridimensionali sta all'ordinario spazio euclideo: per ricordare l'esistenza della "distanza" definita dalla (59–7) si parla di *spazio-tempo di Minkowski* (da H. Minkowski, che per primo nel 1908 comprese questa struttura matematica della relatività).

Ci possiamo chiedere: le (59–5), (59–6) sono le più generali trasformazioni lineari che hanno questa proprietà? La risposta è no: le trasformazioni che lasciano invarianti le (59–7) formano necessariamente un gruppo, che si chiama *gruppo di Lorentz.* Per vedere che il gruppo di Lorentz non si riduce alle trasformazioni di Lorentz *semplici* che abbiamo trovato all'inizio, basta osservare che una normale rotazione delle coordinate spaziali x, y, z (senza toccare il tempo) certamente non cambia le espressioni (59–7): quindi il gruppo di Lorentz contiene le trasformazioni di Lorentz semplici, le rotazioni spaziali, e di conseguenza i loro prodotti. Si può dimostrare che in tal modo il gruppo si costruisce tutto (più precisamente, si ottiene il gruppo *ortocrono proprio*; ma non è il caso d'insistere).

Un'altra dimostrazione dell'inerzia dell'energia

Vogliamo ora presentare una dimostrazione dell'inerzia dell'energia, diversa da quella esposta in *Rel* e sempre dovuta ad Einstein. Come vedremo, questa dimostrazione presenta diversi aspetti interessanti.

Consideriamo una scatola A, di massa M, libera di muoversi in direzione orizzontale, e nella quale si trovi, accostato alla parete di sinistra, un cannoncino a molla C, caricato con un proiettile di massa m (fig. 59–2). Inizialmente la scatola è ferma. Per ora ragioneremo secondo la meccanica newtoniana.

A un certo istante il cannoncino spara il proiettile con una velocità v, e la scatola rincula verso sinistra con una velocità il cui modulo è $V = mv/M$. Dopo un tempo Δt il proiettile raggiunge la parete di destra, e vi resta incastrato, trasmettendole la sua quantità di moto: di conseguenza la scatola si ferma.

Il tempo Δt si calcola facilmente: se la lunghezza della scatola è l, si trova

$$\Delta t = \frac{l}{v+V} = \frac{M}{M+m}\,\frac{l}{v}.$$

Allora lo spostamento della scatola è

$$\delta = V\Delta t = \frac{m}{M+m}\,l. \tag{59–8}$$

Chi osservi il movimento della scatola senza sapere quello che accade dentro, vedrà la scatola muoversi senza ragione apparente: se crede nei principi della meccanica newtoniana, dai quali sa che il centro di massa di un sistema isolato non può cambiare velocità, e quindi deve restare fermo se era fermo all'inizio, concluderà che qualcosa si è spostato all'interno della scatola, in modo tale che il centro di massa abbia cambiato posizione rispetto ad essa: più precisamente concluderà che il centro di massa si è spostato (rispetto alla scatola) di δ verso destra. Sapendo che il corpo che si è mosso è andato da una parete all'altra della scatola, ne potrà dedurre la massa dall'equazione

$$m\,(l-\delta) - M\delta = 0, \tag{59–9}$$

che esprime il fatto che il centro di massa del sistema non si è mosso. Naturalmente la (59–8) e la (59–9) sono equivalenti.

Fin qui niente di nuovo. L'idea di Einstein è di sostituire al cannoncino una sorgente di luce, che emette un breve lampo di energia ε, il quale viene assorbito dalla parete opposta (fig. 59–3). Il fenomeno si svolge in maniera del tutto analoga, salvo sostituire c a v, e usare il fatto che la radiazione emessa ha un impulso ε/c (v. *Rel*, Cap. 10). Avremo allora $V = \varepsilon/Mc$, e poi

$$\Delta t = \frac{l}{c+V} = \frac{Mc}{Mc^2+\varepsilon}\,l$$

e quindi

$$\delta = V\Delta t = \frac{\varepsilon}{Mc^2+\varepsilon}\,l = \frac{\varepsilon/c^2}{M+\varepsilon/c^2}\,l, \tag{59–10}$$

che è del tutto analoga alla (59–8), salvo la sostituzione di m con ε/c^2.

Conclusione: poiché la meccanica relativistica non nega la conservazione della quantità di moto, e quindi la legge che il centro di massa deve restare fermo, l'osservatore esterno sarà costretto a dire che *una massa ε/c^2 si è spostata dalla parete di sinistra a quella di destra.*

Seguendo Einstein possiamo continuare così: l'energia assorbita a destra può essere riportata a sinistra in un modo qualunque (ad es. con una corrente elettrica) e usata per "ricaricare" la sorgente di luce, che potrà quindi emettere un secondo lampo, ecc. A ogni lampo la scatola si sposterebbe a sinistra, a meno che il trasporto di energia in senso inverso non provochi anch'esso uno spostamento della scatola, stavolta verso destra.

Dunque non c'è niente di particolare nell'aver usato radiazione elettromagnetica: *qualunque trasferimento di energia ε si accompagna necessariamente a un trasferimento di massa ε/c^2.*

Attenzione: Per le stesse ragioni discusse in *Rel*, questo *non equivale* a dire che il lampo di luce ha una massa ε/c^2!

Una versione corretta

A rigore questo esperimento ideale contiene un errore (che però non compromette la conclusione, come vedremo). Abbiamo supposto che la scatola cominci *tutta* a muoversi verso sinistra, appena emessa la luce: ora ciò *è impossibile*. Infatti per quanto rigida possa essere la scatola, una spinta sulla parete di sinistra non potrà trasmettersi istantaneamente alla parete di destra; ci sarà un tempo finito di propagazione, dato dalla velocità delle onde elastiche nel materiale della scatola, e questa velocità non può essere maggiore di c. Dunque la luce arriva prima!

Se così non fosse, un dispositivo alla parete destra potrebbe essere informato dell'emissione della luce prima dell'arrivo di questa, ossia esisterebbero mezzi fisici di trasmissione delle informazioni più veloci della luce.

Per evitare questa difficoltà basta riformulare l'esperimento come segue: invece di una scatola rigida, consideriamo *due* oggetti distinti e non interagenti, uno dei quali (A) porta la sorgente di luce, e l'altro (B) porta un assorbitore. Guardiamo ora un diagramma spazio-tempo dell'esperimento.

In fig. 59–4 sono tracciate le rette verticali che rappresentano le linee orarie di A e di B prima dell'emissione della luce. Questa avviene in corrispondenza dell'evento E: da quel momento A si muove verso sinistra, secondo la retta obliqua. La luce viaggia verso B, che raggiunge dopo il tempo Δt (evento R): a quel momento B si mette in moto verso destra.

Consideriamo ora la posizione del centro di massa G del sistema A+B (supponendo che le due parti abbiano la stessa massa M). Prima di E il punto G è fermo a metà strada fra A e B; ma appena A comincia a muoversi, lo stesso fa G (con velocità metà). Solo con l'evento R, quando anche B si muove, G si ferma di nuovo: ma intanto la sua posizione è cambiata, il che è impossibile...

La soluzione è naturalmente di supporre che la massa di A non resti la stessa dopo aver emesso la luce, e così pure quella di B dopo averla assorbita: lasciamo per esercizio di verificare che con una variazione di massa pari a ε/c^2 tutto torna, ossia G *non si muove*. Noi daremo ora di questo fatto una prova più generale.

Il centro di massa relativistico

La discussione dell'ultimo esperimento ideale dovrebbe aver posto un problema: che cosa accade a G nell'intervallo di tempo Δt? Se si pensa solo ai corpi A e B, non è possibile che G resti fermo, visto che A si muove e B no: appare dunque evidente che bisogna mettere in conto anche la radiazione che sta viaggiando da A a B.

Raggiungiamo così una conclusione provvisoria: se un sistema contiene radiazione elettromagnetica, anche questa deve contare nella definizione del centro di massa. Ma questo non equivale a dire che anche la radiazione ha massa, cosa che abbiamo esclusa poco fa? O c'è un'altra soluzione? La risposta generale sta nella seguente

Definizione: La posizione $\vec{r}_\mathrm{G}$ del centro di massa di un sistema di punti materiali *non interagenti* è data da

$$\vec{r}_\mathrm{G} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sum_i E_i \vec{r}_i}{\sum_i E_i}, \tag{59–11}$$

(il che vuol dire che in realtà si tratta di un *baricentro delle energie*).

Come al solito, una definizione è arbitraria, ma dev'essere utile: dobbiamo quindi far vedere che la (59–11) ha tutte le proprietà che ci aspettiamo dal centro di massa.

Deriviamo rispetto a t:

$$\vec{v}_\mathrm{G} = \frac{\sum_i E_i \vec{v}_i}{\sum_i E_i},$$

(tutte le E_i sono costanti). Ricordiamo (*Rel*, Cap. 9) che $\vec{v}_i = c^2\,\vec{p}_i/E_i$ e otteniamo subito

$$\vec{v}_\mathrm{G} = c^2\,\frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i E_i} = c^2\,\frac{\vec{P}}{E_\mathrm{tot}}.$$

Dunque per il punto G definito dalla (59–11) vale la stessa relazione fra velocità, quantità di moto ed energia che si avrebbe se avessimo a che fare con un unico punto materiale, avente tutta la quantità di moto e l'energia del sistema.

Questo risultato è importante per due motivi:

– in primo luogo, esso corrisponde strettamente a quello che vale nella meccanica newtoniana
– inoltre ci autorizza a trattare un sistema, comunque complesso, come un punto materiale, pur di attribuirgli l'energia e la quantità di moto totali.

Si capisce così che non occorre conoscere in dettaglio la struttura interna del sistema per definire le grandezze meccaniche e per usare le relazioni fondamentali fra di esse.

Questa è una circostanza fortunata: se così non fosse, non sapremmo come parlare di energia, massa, ecc. per un qualunque corpo: il corpo è fatto di atomi, che a loro volta sono composti di elettroni e nuclei; questi consistono di neutroni e protoni, i quali non sono elementari, ma formati da quark… E se domani scoprissimo nuovi costituenti elementari, dovremmo ricominciare daccapo? Abbiamo visto che per i nostri discorsi ciò non è necessario.

Di passaggio, abbiamo anche risolto il problema da cui eravamo partiti: il centro di massa definito dalla (59–11) resta sicuramente fermo, se nel calcolo includiamo anche la radiazione. Infatti la quantità di moto totale del sistema era nulla all'inizio, e nulla resta in qualunque istante successivo: ne segue che è sempre $\vec{v}_\mathrm{G} = 0$.

Più in generale, si vede che *il centro di massa di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme*, perché tanto $\vec{P}$ quanto E_tot sono costanti.