36. Dinamica dei corpi rigidi

Un campo di applicazione importante e classico dei concetti sviluppati nel Cap. 33 è la dinamica dei corpi rigidi. La discussione che segue farà uso, ovviamente, oltre che dei concetti della dinamica dei sistemi, anche della cinematica dei moti rigidi, che abbiamo trattata nel Cap. 14. Faremo quindi continuo riferimento a definizioni ed equazioni presentate in quel capitolo.

Un corpo rigido è il caso tipico in cui la struttura a punti materiali è irrilevante, e viene comodamente rimpiazzata dallo schema del sistema continuo. Perciò nel seguito faremo uso dell'uno o dell'altro schema a seconda della convenienza, e riporteremo le formule fondamentali in entrambi gli schemi.

Le ragioni dell'importanza dei corpi rigidi sono molteplici:

- oggetti schematizzabili come corpi rigidi trovano frequente impiego nella tecnica (macchine, strumenti)
- i corpi rigidi sono una schematizzazione adeguata, in certi casi, anche di sistemi microscopici (atomi, molecole)
- sono i soli sistemi per i quali siano sufficienti le equazioni cardinali.

Corpi rigidi ed equazioni cardinali

Spieghiamo l'ultimo punto. Sappiamo (Cap. 14) che un corpo rigido ha 6 gradi di libertà, e le equazioni cardinali — scritte in termini di componenti — sono appunto 6. Sono dunque sufficienti a determinare il moto del sistema (date le condizioni iniziali, naturalmente). Ciò non sarebbe vero per un sistema di genere diverso, con un numero maggiore di gradi di libertà.

A dire il vero esiste un altro caso di sistema con 6 gradi di libertà: quello costituito da due punti materiali. Tuttavia per questo sistema le equazioni cardinali non sono sufficienti, in quanto *non dicono abbastanza sul moto relativo dei due punti*. Che ciò sia vero, lo si capisce osservando che il moto relativo dipenderà certamente dalle forze interne, che nelle equazioni cardinali non compaiono: quindi queste non potranno distinguere il moto dovuto a una forza elastica da quello kepleriano, tanto per fare esempi già noti.

Nota: Ciò implica che per un sistema di due punti materiali le equazioni cardinali non sono indipendenti: lasciamo come problema di trovare la relazione che esiste.

Lavoro delle forze interne

Un'altra proprietà utile dei corpi rigidi è che *le forze interne non fanno lavoro.* Per vederlo, basta ricordare la (14–1):

$$\forall\, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2: \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0,$$

che ci porta a $\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} = 0$, da cui $\vec{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0$ e quindi anche

$$\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0,$$

dato che $\vec{f}_{ij}$ è parallela a $\vec{r}_{ij}$.

Dunque *possiamo dimenticare le forze interne* non soltanto nelle equazioni cardinali, e quindi nel bilancio della quantità di moto e del momento angolare, ma anche in quello dell'energia.

Il moto nel riferimento del baricentro: il momento angolare

Un'ultima proprietà importante è la seguente: *l'atto di moto nel riferimento del centro di massa è sempre rotatorio.* Ciò dipende dal fatto che in quel riferimento esiste banalmente un punto fisso, che è G. Cominceremo perciò il nostro studio nel riferimento K′, e solo in seguito passeremo al moto rigido più generale.

Mantenendo le notazioni del Cap. 33, abbiamo dunque

$$\vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

e possiamo usare questa per calcolare il momento angolare intrinseco $\vec{S}$:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \sum_i m_i\, \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i = \sum_i m_i\, \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\ &= \sum_i m_i\, {r'_i}^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i\, (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i)\, \vec{r}'_i. \end{aligned} \tag{36–1}$$

Una prima conseguenza della (36–1) è che $\vec{S}$ *dipende linearmente dalla velocità angolare, ma non dobbiamo aspettarci in generale che sia ad essa parallelo.*

Possiamo renderci conto di ciò su di un esempio semplice:

Esempio 1: Un telaio rettangolare, di massa trascurabile, porta due masse uguali agli estremi di una diagonale, e ruota attorno a un asse fisso che passa per i punti medi di due lati opposti (fig. 36–1). Con le notazioni in figura, le velocità dei due punti hanno lo stesso modulo ωa, e hanno versi opposti; il vettore $\vec{S}$ è la somma di due contributi uguali delle due masse, è diretto come in figura, e ha modulo $2m\omega ac$.

Si vede in primo luogo che $\vec{S}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$, e in secondo luogo che sta sempre nel piano del rettangolo. Dunque la sua direzione non è costante, ossia $\vec{S}$ *non è costante*, anche se la rotazione è uniforme!

Esempio 2: Un'applicazione pratica di questo fatto è la necessità della cosiddetta "equilibratura dinamica" delle ruote delle automobili. Se G sta sull'asse di rotazione, la quantità di moto della ruota è nulla, e quindi non occorre una risultante delle forze esterne. Però se si presenta la situazione descritta nell'Es. 1, a causa di una distribuzione asimmetrica delle masse, la ruota richiede forze esterne, che possono provenire soltanto dall'asse cui è vincolata. Per reazione l'asse è soggetto a forze che lo mettono in vibrazione. Se si tratta delle ruote anteriori la vibrazione si trasmette al volante, e il guidatore se ne accorge; ma in ogni caso l'asse della ruota è sollecitato in modo anomalo e i cuscinetti vengono danneggiati.

Il momento d'inerzia

Anche se $\vec{S}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$, è utile conoscere la sua componente secondo l'asse di rotazione. Detto $\vec{u}$ il versore di $\vec{\omega}$ abbiamo:

$$S_u = \vec{S} \cdot \vec{u} = \sum_i m_i \, {r'_i}^2 \omega - \sum_i m_i \, (\vec{u} \cdot \vec{r}'_i)^2 \omega = \sum_i m_i \left[{r'_i}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{r}'_i)^2 \right] \omega.$$

La fig. 36–2 mostra che l'espressione in parentesi quadre è il quadrato della distanza del punto i dalla retta a, che indicheremo con δ'_i: dunque

$$S_u = I' \omega,$$

avendo posto

$$I' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \, {\delta'_i}^2 = \int_A \delta'^2 d\mu. \tag{36–2}$$

Questo si chiama il *momento d'inerzia* del sistema *rispetto alla retta a*. Abbiamo già incontrato la (36–2) nel Cap. 34.

Riprendiamo la (36–1), per studiarla brevemente dal punto di vista matematico. Abbiamo già osservato che si tratta di una relazione lineare: si tratta dunque di un omomorfismo $\vec{\omega} \mapsto \vec{S}(\vec{\omega})$ dallo spazio vettoriale delle velocità angolari in quello dei momenti angolari. Più esattamente, è un omomorfismo *simmetrico*: infatti si vede subito che per due qualsiasi $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{S}(\vec{\omega}_2) = \vec{\omega}_2 \cdot \vec{S}(\vec{\omega}_1).$$

In una base ortonormale questo omomorfismo è rappresentato da una matrice *simmetrica*, che è anche definita positiva. Infatti

$$\vec{\omega} \cdot \vec{S}(\vec{\omega}) = \omega S_u = I' \omega^2,$$

che si annulla solo se $\vec{\omega} = 0$ (con un'eccezione: quale?)

La matrice (e anche l'omomorfismo) prendono il nome di "tensore d'inerzia." È noto che una tale matrice ha sempre una base (ortonormale) di autovettori, il che vuol dire che esistono sempre (almeno) tre rette per G tali che se $\vec{\omega}$ ha quella direzione, la stessa cosa accade per $\vec{S}$: si chiamano gli *assi principali d'inerzia* del sistema, e i corrispondenti autovalori sono i *momenti principali d'inerzia.*

La parola “almeno” tra parentesi sta a ricordare che gli assi principali d'inerzia possono anche essere più di tre: ciò accade se due o più autovalori coincidono. Questo capita ad es. quando il sistema possiede un asse di simmetria: allora quella retta è asse principale d'inerzia, e lo sono anche tutte le rette ad essa perpendicolari. Tuttavia la coincidenza dei momenti principali d'inerzia si può presentare anche in altri casi: citiamo quello di un cubo omogeneo, nel quale i momenti d'inerzia sono tutti uguali, sicché *tutte le rette per* G *sono assi principali* (e con lo stesso momento d'inerzia).

L'energia cinetica

Il calcolo dell'energia cinetica si fa in maniera simile: vediamolo nella rappresentazione continua:

$$T' = \tfrac{1}{2}\int_A v'^2 d\mu = \tfrac{1}{2}\int_A \left|\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right|^2 d\mu = \tfrac{1}{2}\int_A \omega^2\delta'^2 d\mu = \tfrac{1}{2}I'\omega^2. \qquad (36\text{–}3)$$

Esempio 3: Supponiamo di aver a che fare con un sistema isolato, che si muova in un primo tempo come un corpo rigido, ruotando attorno a un asse principale d'inerzia (baricentrico); poi attraversi una fase di deformazione, al termine della quale è di nuovo un corpo rigido, ma con momento d'inerzia diverso. Dato che non ci sono forze esterne, $\vec{S}$ si conserva; se distinguiamo con due indici le fasi iniziale e finale del moto, avremo:

$$S = I_1'\,\omega_1 = I_2'\,\omega_2$$
$$T_1' = \tfrac{1}{2}I_1'\,\omega_1^2, \qquad T_2' = \tfrac{1}{2}I_2'\,\omega_2^2.$$

Allora

$$\omega_2 = \frac{I_1'}{I_2'}\,\omega_1$$

e poi

$$T_2' = \tfrac{1}{2}I_2'\left(\frac{I_1'}{I_2'}\,\omega_1\right)^2 = \frac{I_1'}{I_2'}\,T_1'.$$

Così se ad es. $I_1' \gg I_2'$ avremo $\omega_2 \gg \omega_1$ e $T_2' \gg T_1'$. L'esempio classico è la pattinatrice sul ghiaccio, che inizia una piroetta con le braccia distese, e poi le serra al petto, aumentando così la sua velocità angolare. Un esempio più “fisico” è quello di una supernova il cui nucleo collassa in una stella di neutroni: facciamo una stima (in termini di ordini di grandezza) di quello che accade.

A parità di massa, e supponendo che la stella sia una sfera omogenea tanto prima quanto dopo il collasso, il suo momento d'inerzia è proporzionale al quadrato del raggio, il quale si riduce da $\sim 3\cdot 10^4$ km a ~ 30 km: un fattore 10^3. Dunque $I_2' = 10^{-6}\,I_1'$, e $\omega_2 = 10^6\,\omega_1$. Se il periodo di rotazione iniziale era 10^5 s (valore tipico per una stella che segue questo percorso evolutivo) quello finale è 0.1 s: proprio l'ordine di grandezza dei periodi delle "pulsar," che sono l'aspetto osservativo delle stelle di neutroni.

Problema: Tanto nel caso della pattinatrice, quanto in quello della pulsar, l'energia cinetica aumenta dopo la contrazione: da dove viene questa energia?

Il teorema di Huygens

Lo studio del moto nel riferimento K non porta niente di nuovo, se teniamo presenti le decomposizioni di $\vec{L}$ e di T che abbiamo dato nel Cap. 33. Se però il moto in K è rotatorio, attorno a un asse che non passa per G, conviene procedere diversamente. Scelto per O un punto dell'asse di rotazione, avremo

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i,$$

e da questa, procedendo come nella (36–1), troviamo

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \, \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i \, r_i^2 \, \vec{\omega} - \sum_i m_i \, (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \, \vec{r}_i. \end{aligned} \tag{36–4}$$

e poi

$$L_u = \vec{L} \cdot \vec{u} = I\omega,$$

dove I ha ancora la definizione (36–2), ma naturalmente la retta a è l'asse di rotazione (che non passa per G): quindi $I \neq I'$. Anche per l'energia cinetica si ha ancora:

$$T = \tfrac{1}{2} I \omega^2. \tag{36–5}$$

Possiamo sfruttare le (36–3), (36–5) per ricavare una relazione fra i due momenti d'inerzia: quello rispetto all'asse a (non baricentrico) e quello rispetto alla retta a', passante per G e parallela ad a. Ci serviremo del teorema di König: il moto di G è circolare, con raggio che diremo δ_{G}, per cui $v_{\mathrm{G}} = \omega \delta_{\mathrm{G}}$. Dunque

$$T = T_{\mathrm{G}} + T' = \tfrac{1}{2} \mathcal{M} \omega^2 \delta_{\mathrm{G}}^2 + \tfrac{1}{2} I' \omega^2$$

e confrontando con la (36–5)

$$I = \mathcal{M} \delta_{\mathrm{G}}^2 + I'.$$

Questo è il *teorema di Huygens*. L'utilità pratica del teorema è evidente: se si conoscono i momenti d'inerzia baricentrici, tutti gli altri si calcolano immediatamente.

Nota storica: Christiaan Huygens è forse il più grande fisico della generazione fra Galileo e Newton; è uno dei precursori di Newton nella fondazione della meccanica. Arrivò a questo teorema nelle sue ricerche sul pendolo composto, mirate a realizzare un pendolo il cui periodo fosse realmente indipendente dall'ampiezza, e pubblicate nell'*Horologium Oscillatorium.* A lui si deve anche la teoria ondulatoria della luce.

Il lavoro delle forze esterne

Dato che per un corpo rigido le forze interne non fanno lavoro, è importante cercare, se esiste, un'espressione generale per il lavoro delle forze esterne. Ci arriveremo tenendo conto della (14–3)

$$\vec{v}(\mathrm{P}) = \vec{v}(\mathrm{Q}) + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}},$$

che applichiamo prendendo per Q il centro di massa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\mathrm{G}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_i.$$

Allora

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_{\mathrm{G}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_i \, dt$$

e poi

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i &= \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_{\mathrm{G}} + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_i \, dt \\ &= \vec{R} \cdot d\vec{r}_{\mathrm{G}} + \sum_i \vec{\omega} \cdot \vec{r}\,'_i \times \vec{F}_i \, dt = \vec{R} \cdot d\vec{r}_{\mathrm{G}} + \vec{M}' \cdot \vec{\omega} \, dt. \end{aligned}$$

Si vede che il lavoro delle forze esterne consiste di due termini: il primo che coincide col lavoro che farebbe la risultante se fosse applicata direttamente in G, e il secondo dato dal prodotto scalare fra $\vec{M}'$ (momento risultante rispetto a G) e $\vec{\omega}\,dt$, che misura in grandezza e direzione la rotazione che il sistema compie nel tempo dt. Dunque anche agli effetti del lavoro, delle forze esterne contano solo risultante e momento.

Osservazione finale

Tutto quello che abbiamo detto in questo capitolo a proposito del momento d'inerzia e della sua relazione col momento angolare e coll'energia cinetica non vale solo per i corpi rigidi, ma per ogni caso in cui *l'atto di moto sia rotatorio.* Naturalmente se il corpo non è rigido il momento d'inerzia non è più una caratteristica invariabile del corpo, come la massa, e ciò ne riduce di molto l'utilità.

37. Un lemma matematico e varie applicazioni

Non sarà sfuggita una certa analogia fra diversi risultati della dinamica dei sistemi: teorema di Huygens, teorema di König, decomposizione del momento angolare. Vogliamo ora mostrare che la relazione è qualcosa di più di un'analogia, in quanto da un punto di vista matematico si tratta in realtà della stessa cosa.

Il lemma

Cominceremo enunciando un

Lemma: *Siano x, y due funzioni a valori reali definite in un insieme $A \in \mathbf{R}^3$, e μ una misura su A, con $\mu(A) = 1$. Poniamo*

$$\bar{x} = \int_A x\, d\mu, \quad \bar{y} = \int_A y\, d\mu$$

$$\xi = x - \bar{x}, \quad \eta = y - \bar{y};$$

allora

$$\int_A xy\, d\mu = \bar{x}\bar{y} + \int_A \xi\eta\, d\mu.$$

Dim.: Infatti

$$\int_A xy\, d\mu = \int_A (\bar{x} + \xi)\,(\bar{y} + \eta)\, d\mu = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\int_A \eta\, d\mu + \bar{y}\int_A \xi\, d\mu + \int_A \xi\eta\, d\mu.$$

Ma

$$\int_A \xi\, d\mu = \int_A \eta\, d\mu = 0. \ \blacksquare$$

Corollario:

$$\int_A x^2 d\mu = \bar{x}^2 + \int_A \xi^2 d\mu.$$

Applicazioni

Si hanno applicazioni in probabilità e in meccanica:

Variabili casuali: Sia X una variabile casuale, μ la sua misura di probabilità:

$$\mathrm{E}(X) = \int x\, d\mu \qquad \mathrm{E}(X^2) = \int x^2\, d\mu \qquad \mathrm{Var}(X) = \int (x - \mathrm{E}(X))^2\, d\mu.$$

Dunque, usando il corollario:

$$\mathrm{E}(X^2) = [\mathrm{E}(X)]^2 + \mathrm{Var}\,(X).$$

Il teorema di Huygens: Sia m una misura di massa, I il momento d'inerzia rispetto a una retta (che prendiamo come asse z), I' quello rispetto alla parallela per il centro di massa. Abbiamo

$$I = \int\limits_A \delta^2 dm = \int\limits_A (x^2 + y^2)\, dm = \mathcal{M} \int\limits_A (x^2 + y^2)\, d\mu$$

dove $\mu = m/\mathcal{M}$, essendo $\mathcal{M}$ la massa totale. Allora

$$I = \mathcal{M} \Big\{ x_{\mathrm{G}}^2 + y_{\mathrm{G}}^2 + \int\limits_A (x'^2 + y'^2)\, d\mu \Big\} = \mathcal{M}\delta_{\mathrm{G}}^2 + I'$$

in quanto

$$x_{\mathrm{G}} = \int\limits_A x\, d\mu, \quad y_{\mathrm{G}} = \int\limits_A y\, d\mu.$$

Il teorema di König: Usando $\dot{x} = \dot{x}_{\mathrm{G}} + \dot{x}'$ l'energia cinetica si scrive

$$T = \tfrac{1}{2}\mathcal{M} \int\limits_A (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, d\mu = \tfrac{1}{2}\mathcal{M}\, (\dot{x}_{\mathrm{G}}^2 + \dot{y}_{\mathrm{G}}^2 + \dot{z}_{\mathrm{G}}^2) + \tfrac{1}{2}\mathcal{M} \int\limits_A (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2)\, d\mu$$

ossia

$$T = \tfrac{1}{2}\mathcal{M} v_{\mathrm{G}}^2 + T'.$$

Momento angolare: Consideriamo ad es. L_z:

$$L_z = \mathcal{M} \int\limits_A (x\dot{y} - y\dot{x})\, d\mu.$$

Dal lemma, con $\dot{y}$ al posto di y:

$$\int\limits_A x\dot{y}\, d\mu = x_{\mathrm{G}}\, \dot{y}_{\mathrm{G}} + \int\limits_A x'\dot{y}'\, d\mu.$$

Calcolando allo stesso modo gli altri termini si vede che

$$\vec{L} = \mathcal{M}\, \vec{r}_{\mathrm{G}} \times \vec{v}_{\mathrm{G}} + \vec{S} = \vec{r}_{\mathrm{G}} \times \vec{P} + \vec{S}.$$

38. Esempi di dinamica di corpi rigidi

In questo capitolo presenteremo alcuni esempi significativi, che ci consentiranno di approfondire e completare quanto abbiamo visto sulla dinamica dei corpi rigidi.

Palla che rotola

Il primo esempio è il moto di *puro rotolamento* di una palla, che discuteremo dapprima su di un piano orizzontale e poi inclinato. Supporremo che il piano su cui la palla si muove sia fermo in un riferimento inerziale K, e che la palla sia simmetrica, in modo che il suo centro di massa G coincida col centro geometrico. Trattare la palla e il piano come corpi rigidi significa tra l'altro trascurare le deformazioni nella regione di contatto, che quindi si può ridurre a un punto A. Vedremo che rimane però un problema delicato riguardo alle reazioni vincolari.

Per puro rotolamento s'intende un moto in cui il punto di contatto A fra la palla e il piano è fermo: dunque l'asse istantaneo di rotazione passa per quel punto. Per semplicità supporremo inoltre che esso mantenga sempre la stessa direzione orizzontale, il che è quanto dire che il moto è *piano*: tutti i punti della palla hanno velocità parallela a un piano verticale fisso, che prenderemo come piano (x, y) (asse x parallelo al piano, nel verso in cui la palla avanza, asse y perpendicolare al piano, orientato verso l'alto: fig. 38–1).

Sulla palla agiscono soltanto le seguenti forze esterne:

- il *peso*, che come sappiamo equivale, a tutti gli effetti, a un'unica forza $\mathcal{M}\vec{g}$, applicata al centro di massa della palla
- un insieme di *reazioni vincolari*, applicate nel punto di contatto.

Se indichiamo con $\vec{R}_\mathrm{v}$ la risultante delle reazioni vincolari, il teorema del baricentro ci dice:

$$\mathcal{M}\vec{a}_\mathrm{G} = \mathcal{M}\vec{g} + \vec{R}_\mathrm{v},$$

che possiamo proiettare sugli assi x e y:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}a_x &= \mathcal{M}g\sin\alpha + R_{\mathrm{v}x} \\ 0 &= -\mathcal{M}g\cos\alpha + R_{\mathrm{v}y} \end{aligned} \tag{38–1}$$

dove abbiamo indicato con α l'inclinazione del piano. La seconda equazione discende dal fatto che $a_y = 0$ finché la palla resta in contatto col piano.

Piano orizzontale: Se $\alpha = 0$ la prima delle (38–1) ci dice una cosa ovvia: il centro di massa della palla si muoverà di moto uniforme, a meno che la risultante delle reazioni vincolari non abbia una componente parallela al piano. Ma vediamo che cosa risulta dalla seconda equazione cardinale (della quale basta considerare la componente z). Prendiamo come polo il punto A:

$$\dot{L}_z = 0,$$

perché tanto le reazioni vincolari, che sono applicate in A, quanto il peso, che è applicato in G, hanno momento nullo rispetto ad A.

Dunque L_z è costante, ossia è costante la velocità angolare (che è diretta lungo z). Allora come si spiega che nella realtà la palla rallenta? È chiaro che qualcuna delle schematizzazioni fatte è troppo semplice: la colpevole è l'ipotesi che le reazioni vincolari siano applicate in A. Eppure ciò è inevitabile se A è davvero l'unico punto di contatto: dobbiamo dunque rinunciare all'ipotesi che i corpi siano rigidi.

Supponiamo ad es. che la palla non sia esattamente rigida: la regione di contatto sarà un dischetto (fig. 38–2) e le reazioni vincolari saranno distribuite in tutta questa regione. Allora non è più certo che il loro momento rispetto ad A si annulli. Poiché $\vec{M}_\mathrm{v}$ è la sola cosa che conta, possiamo salvare lo schema dei corpi rigidi dimenticando l'estensione del contatto e aggiungendo al modello l'ipotesi $\vec{M}_\mathrm{v} \neq 0$. Quando ciò accade, si dice che è presente un *attrito volvente.*

Piano inclinato: Trascuriamo ora l'attrito volvente, ma supponiamo $\alpha > 0$. Allora la seconda delle (38–1) determina $R_{\mathrm{v}y}$:

$$R_{\mathrm{v}y} = \mathcal{M} g \cos\alpha,$$

mentre $R_{\mathrm{v}x}$ nella prima resta indeterminata, insieme ad a_x. Occorre un'altra equazione, che è ovviamente la seconda equazione cardinale:

$$\dot{L}_z = -\mathcal{M} g r \sin\alpha.$$

Con i versi che abbiamo preso è $L_z = -I\omega$, e $v_\mathrm{G} = \omega r$; quindi

$$-\frac{I}{r}\, a_x = -\mathcal{M} g r \sin\alpha.$$

Il teorema di Huygens ci dice che I (momento d'inerzia rispetto alla retta orizzontale per A) vale $\mathcal{M} r^2 + I' = \frac{7}{5}\mathcal{M} r^2$ (se la palla è omogenea), e infine

$$a_x = \tfrac{5}{7}\, g \sin\alpha.$$

Abbiamo così dimostrato ciò che avevamo anticipato nel Cap. 8: l'accelerazione di una palla omogenea che rotola lungo un piano inclinato non è $g \sin\alpha$, ma solo 5/7 di questa, *qualunque sia il raggio.* Se la palla non è omogenea l'accelerazione sarà diversa, ma comunque sempre minore di $g \sin\alpha$.

Si vede anche perché (uno dei possibili perché) questo accade, se si ragiona nel riferimento del centro di massa. Se la palla accelera, la sua velocità angolare aumenta, e quindi anche S aumenta. Deve dunque esistere un momento delle forze esterne rispetto a G, che non può essere dovuto al peso, ma solo alla reazione vincolare, e più esattamente alla componente x. Guardando i versi, si vede che occorre $R_{\mathrm{v}x} < 0$, e allora la prima delle (38–1) ci dice che l'accelerazione sarà per forza minore di $g \sin \alpha$. Ma una componente della reazione vincolare tangente al piano si chiama *attrito*: abbiamo così dimostrato che *per avere puro rotolamento lungo un piano inclinato è necessario l'attrito.*

Tuttavia questo attrito non ha effetti dissipativi, perché il punto A è fermo, e perciò la forza d'attrito *non fa lavoro*: la sua sola funzione è d'impedire alla palla di scivolare (attrito *statico*).

È istruttivo arrivare alla soluzione usando la conservazione dell'energia: questo metodo ha il vantaggio di non far entrare in ballo le reazioni vincolari, in quanto, come abbiamo appena detto, il loro lavoro è nullo. Potremo dunque dire che è costante la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale delle altre forze esterne, che si riducono alla sola gravità:

$$T + V_{\mathrm{grav}} = \mathrm{cost.}$$

L'espressione di T è immediata, trattandosi di moto rotatorio:

$$T = \tfrac{1}{2} I \omega^2 = \tfrac{7}{10} \mathcal{M} r^2 \omega^2 = \tfrac{7}{10} \mathcal{M} v_{\mathrm{G}}^2.$$

Quanto all'energia potenziale, scegliamo ad es. lo zero nella posizione iniziale della palla: allora

$$V_{\mathrm{grav}} = -\mathcal{M} g x \sin \alpha,$$

e il valore iniziale dell'energia totale è nullo. Quindi:

$$\tfrac{7}{10} \mathcal{M} v_{\mathrm{G}}^2 - \mathcal{M} g x \sin \alpha = 0,$$

che conviene scrivere

$$\tfrac{1}{2} \mathcal{M} v_{\mathrm{G}}^2 = \tfrac{5}{7} \mathcal{M} g x \sin \alpha.$$

Questa è la stessa equazione che si otterrebbe nello scivolamento (senza attrito) di un punto materiale, a parte il fattore 5/7: se ne conclude facilmente che l'accelerazione è $\frac{5}{7}\, g \sin \alpha$.

Dal punto di vista energetico l'interpretazione del risultato è la seguente: il teorema di Galileo (la velocità di caduta di un corpo dipende solo dalla variazione di quota) qui non vale, perché l'energia potenziale della gravità non è spesa solo nell'energia cinetica di traslazione (moto del centro di massa) ma in parte anche in quella di rotazione. Quindi a parità di quota discesa un corpo che rotola acquista una velocità di traslazione minore di uno che scivola.

La precessione degli equinozi

Senza entrare in dettagli, possiamo capire, in base a quanto sappiamo, quale sia la causa dinamica della precessione degli equinozi. Tutti sanno che il fenomeno astronomico (l'intervallo tra due equinozi è minore del periodo di rivoluzione *siderale* della Terra) è causato dal fatto che l'orientamento dell'asse di rotazione della Terra non è fisso nello spazio, ma ruota intorno alla perpendicolare al piano orbitale (fig. 38–3), facendo un giro in circa 26 000 anni. Vogliamo quindi vedere come ciò si spieghi in base alle proprietà del momento angolare.

È ragionevole trattare in questo problema la Terra come un corpo rigido, e supporre che abbia un asse di simmetria, che è quindi asse principale d'inerzia. La velocità angolare della Terra non è esattamente diretta lungo questo asse, ma lo scostamento è assai piccolo, anche se misurabile: per semplicità supporremo che lo sia. Dunque il vettore $\vec{S}$ è con ottima approssimazione parallelo a $\vec{\omega}$. Ne segue che non ci sarebbe precessione se $\vec{S}$ fosse costante. Allora dobbiamo cercare quali sono le forze esterne che fanno variare $\vec{S}$, ossia che hanno $\vec{M}' \neq 0$.

Già sappiamo (v. Cap. 17) che nel riferimento solidale al centro T della Terra (che possiamo supporre coincidente col suo centro di massa) la forza di attrazione del Sole non è esattamente compensata dalla forza apparente: dunque ci sono forze esterne, agenti su ogni particella della Terra, e si tratta solo di vedere se il loro momento risultante rispetto a T sia o no nullo. Questo accadrebbe di certo se la Terra avesse simmetria sferica, ma sappiamo che ciò non è. Se immaginiamo di asportare dalla Terra una parte sferica tangente ai poli, resterà essenzialmente un anello di materia intorno all'equatore, sul quale agiscono le forze di marea. Anche in questa ipotesi potremmo avere $\vec{M}' = 0$, se l'asse di simmetria fosse perpendicolare alla retta TS (fig. 38–4).

Il guaio è che l'asse terrestre è *inclinato*, e di conseguenza la cancellazione per simmetria non si verifica più (fig. 38–5). Nella situazione mostrata in figura, $\vec{M}'$ è diretto nel verso positivo dell'asse z. Ne segue che $\vec{S}$ non resta costante, ma cambia direzione, che è proprio l'effetto osservato.

Va detto che qui ci siamo occupati dell'effetto del Sole perché (come per le maree) è di spiegazione più immediata; ma come per le maree, anche la Luna conta, anzi il suo effetto è circa doppio. Non sarà sfuggita la stretta connessione che esiste fra maree e precessione (entrambi i fenomeni dipendono dalle forze residue nel riferimento solidale a T: le forze di marea).

Concludiamo ricordando che anche la spiegazione della precessione, oltre a quella delle maree e dello schiacciamento terrestre, si trova nei *Principia* (però Newton non usa il momento angolare, che è stato inventato oltre un secolo dopo: la prima idea è dovuta a Laplace).

Il sistema Terra–Luna

Vogliamo ora studiare un altro sistema, più complesso dei precedenti ma ancora relativamente semplice: il sistema Terra–Luna. Lo scopo è quello di vedere che previsioni si possono fare sulla sua evoluzione.

Almeno per cominciare faremo le seguenti schematizzazioni:

– Il sistema è isolato: in altre parole trascuriamo l'influenza del Sole, che è tutt'altro che trascurabile se vogliamo prevedere con ragionevole precisione il moto della Luna. Tuttavia l'approssimazione non compromette i risultati della discussione che faremo.
– Terra e Luna sono corpi rigidi, a simmetria sferica, i cui momenti angolari intrinseci sono perpendicolari al piano in cui avviene il moto relativo dei due corpi. Questo non è affatto vero (il momento angolare della Terra è inclinato di almeno $20°$) ma è necessario per avere calcoli abbastanza semplici.
– La distanza Terra–Luna è costante. In realtà varia circa di $\pm 5\%$, ma di ciò non occorre tener conto per capire quello che c'interessa.

In queste ipotesi abbiamo a che fare con tre distinti momenti angolari:

– quello di spin della Terra, che indicheremo con S
– quello di spin della Luna, S'
– quello del moto relativo (detto anche momento angolare *orbitale*) che chiameremo L.

È opportuno chiarire meglio questa classificazione dei momenti angolari. Dato che il sistema nel suo insieme è isolato, ci conviene studiarlo nel riferimento del centro di massa complessivo (che è inerziale). Dal teorema di decomposizione del momento angolare sappiamo che per il moto della Terra potremo scrivere

$$\vec{L}_{\mathrm{Terra}} = \vec{L}_{\mathrm{T}} + \vec{S}$$

(abbiamo indicato con T il centro di massa della Terra) e per il moto della Luna

$$\vec{L}_{\mathrm{Luna}} = \vec{L}_{\mathrm{L}} + \vec{S}'.$$

(L è il centro di massa della Luna). Qui $\vec{L}_{\mathrm{T}}$ e $\vec{L}_{\mathrm{L}}$ sono i momenti angolari che i due corpi avrebbero se fossero due punti materiali. D'altra parte sappiamo che per un sistema di due punti materiali il momento angolare $\vec{L} = \vec{L}_{\mathrm{T}} + \vec{L}_{\mathrm{L}}$ del moto relativo al centro di massa comune si esprime così:

$$\vec{L} = \mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \tag{38–2}$$

Dunque è vero che il momento angolare totale $\vec{L}_{\mathrm{Terra}} + \vec{L}_{\mathrm{Luna}}$, che chiameremo $\vec{J}$, si esprime come somma di tre termini:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} + \vec{S}',$$

con $\vec{L}$ dato dalla (38–2), e $L = \mu a^2 \Omega$ (con ovvie notazioni).

Date le ipotesi che abbiamo fatte, tutti questi vettori sono paralleli (e anche concordi): quindi non avremo bisogno di usare i vettori, ma ci basteranno i moduli.

Dati numerici

Dobbiamo ora introdurre una serie di dati numerici, che come vedremo sono essenziali per inquadrare correttamente il problema. Sono i seguenti:

Massa della Terra:	$M_{\mathrm{T}} = 5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Momento d'inerzia della Terra:	$I = 8.04 \cdot 10^{37}\,\mathrm{kg\,m^2}$
Velocità angolare della Terra:	$\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$
Massa della Luna:	$M_{\mathrm{L}} = 7.35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$
Velocità angolare del moto relativo:	$\Omega = 2.66 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad/s}$
Distanza Terra–Luna:	$a = 3.84 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}.$

Non abbiamo fornito il momento d'inerzia della Luna, perché non ha importanza il valore esatto: basta considerare che esso è molto più piccolo di quello della Terra. Infatti il raggio della Luna è circa 1/4 di quello della Terra, e la massa circa 1/80: ne segue un rapporto dei momenti d'inerzia di circa 1/1000. Dato che la velocità angolare della Luna (quella di spin) è 30 volte minore di quella della Terra (infatti la Luna fa un giro su se stessa in un mese) ne segue che $S' \ll S$, per un fattore $3 \cdot 10^4$: siamo dunque autorizzati a trascurare del tutto S'.

Calcoliamo ora alcune grandezze derivate, di cui dovremo servirci:

Massa ridotta:	$\mu = 7.26 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$
Costante di Gauss:	$k = 2.00 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m^{3/2}s^{-1}}$
Mom. ang. di spin della Terra:	$S = 5.86 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$
Mom. ang. orbitale:	$L = 2.87 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$
Energia cinetica di spin della Terra:	$T = 2.14 \cdot 10^{29}\,\mathrm{J}$
Energia del moto orbitale:	$E = -3.86 \cdot 10^{28}\,\mathrm{J}.$

Citiamo infine alcune relazioni, che sono servite per calcolare i numeri qui sopra, e ci serviranno ancora in seguito:

$$
\begin{aligned}
&k = \sqrt{G(M_{\mathrm{T}} + M_{\mathrm{L}})}\\
&S = I\omega\\
&L = \mu a^2 \Omega\\
&\Omega = k a^{-3/2} \quad \text{terza legge di Keplero}\\
&T = \tfrac{1}{2} I \omega^2\\
&E = -k^2 \mu / 2a \quad \text{(si veda la 31–4, con la massa ridotta).}
\end{aligned}
$$

Effetto delle forze dissipative

A questo punto possiamo finalmente affrontare il problema fisico. Se le ipotesi che abbiamo fatte fossero tutte valide, l'interazione gravitazionale fra Terra e Luna non potrebbe causare variazioni nei momenti angolari e perciò neanche nelle energie: in tal caso il sistema resterebbe immutato nel tempo, e non ci sarebbe niente da dire. Sappiamo però che esistono le maree, il che vuol dire che la Terra non è veramente rigida: l'acqua oceanica si sposta, e lo stesso fanno anche l'atmosfera e la crosta "solida." Il fatto importante è che le maree producono dissipazione di energia, perché tutte le parti della Terra in movimento incontrano attriti: dobbiamo dunque aspettarci che a causa delle maree l'energia meccanica del sistema Terra–Luna non si conservi, ma vada decrescendo nel tempo.

Ecco allora il problema: quali effetti ha la diminuzione di energia sul moto del sistema? Come cambierà la velocità angolare della Terra? e l'orbita della Luna? Affronteremo il problema al modo seguente:

- continueremo a trattare la Terra come un corpo rigido, perché l'effetto delle maree è tutto riassunto nell'ipotesi che esistano forze dissipative
- supporremo che il moto relativo resti circolare uniforme con ottima approssimazione, ma che possa lentamente variare la distanza.

Si noti che a differenza dell'energia, il momento angolare totale del sistema si conserva rigorosamente: avremo dunque da un lato

$$J = L + S = \text{cost.},$$

e dall'altro

$$E_{\text{tot}} = E + T = -\frac{k^2\mu}{2a} + \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{decrescente.} \tag{38–3}$$

Per andare avanti, conviene esprimere E e T rispettivamente in termini di L e di S. A questo scopo basta ricordare che nel moto kepleriano circolare $L = k\mu\sqrt{a}$, e che $S = I\omega$: allora la (38–3) diventa

$$E_{\text{tot}} = -\frac{k^4\mu^3}{2L^2} + \frac{S^2}{2I} \quad \text{decrescente.} \tag{38–4}$$

Imponiamo che E_{tot} deve decrescere, chiedendo che la sua derivata rispetto al tempo sia negativa:

$$\frac{k^4\mu^3}{L^3}\,\dot{L} + \frac{S}{I}\,\dot{S} < 0.$$

Il primo termine è $\Omega\dot{L}$, e il secondo è $\omega\dot{S}$. Inoltre $\dot{S} = -\dot{L}$, perché $L + S$ è costante. Si ottiene quindi

$$(\Omega - \omega)\,\dot{L} < 0.$$

Dunque L diminuisce se $\Omega > \omega$, aumenta se $\Omega < \omega$; ovviamente per S accade l'opposto.

Nella fig. 38–6 si vede il piano cartesiano (L, S): la curva tracciata divide la regione di piano in cui $\Omega > \omega$ (quella inferiore) dalla regione in cui vale la disuguaglianza opposta. L'equazione della curva è

$$S = k^4 \mu^3 I / L^3. \tag{38–5}$$

Le frecce indicano il vettore velocità $\mathbf{w}$, di componenti $\dot{L}$, $\dot{S}$: $\mathbf{w}$ è sempre diretto lungo le rette $L + S = \text{cost.}$, ma verso l'alto dove $\Omega > \omega$, verso il basso nel caso contrario. Vediamo così che la curva consiste di due archi con proprietà opposte: l'arco tracciato intero è un *attrattore*, mentre quello tratteggiato è un *repulsore*. Si vede anche che se le condizioni iniziali corrispondono a un punto nelle regioni $\mathcal{A}$ oppure $\mathcal{B}$, il sistema evolverà verso una situazione di equilibrio in cui $\Omega = \omega$, ossia in cui la Terra volge sempre la stessa faccia alla Luna (come già ora fa la Luna rispetto alla Terra); se invece si parte dalle regioni $\mathcal{C}$ oppure $\mathcal{D}$ l'evoluzione terminerà con $L = 0$, ossia $a = 0$: la Luna cade sulla Terra!

Poiché nella realtà abbiamo $\Omega < \omega$ (regione $\mathcal{A}$) la dissipazione di energia dovuta alle maree rallenterà la rotazione terrestre (S diminuisce) e perciò dovrà aumentare il momento angolare orbitale. Ne segue che *la Luna si deve allontanare dalla Terra*. Fino a quando? La risposta si ha sostituendo la (38–5) in $L + S = J$:

$$L + \frac{k^4 \mu^3 I}{L^3} = J,$$

che è un'equazione di quarto grado per L, con due radici reali come si vede dalla figura. La risoluzione numerica fornisce, per la radice che interessa:

$$L = 3.42 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg\,m^2/s}, \qquad S = 1.25 \cdot 10^{32}\,\mathrm{kg\,m^2/s}.$$

Il periodo comune del moto di rotazione della Terra e del moto orbitale risulta 46.7 giorni e la distanza $a = 5.55 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$.

Un'ultima osservazione: non possiamo dire quanto tempo occorre per arrivare a questo equilibrio, se non abbiamo dati attendibili sull'entità della dissipazione di energia, e soprattutto su come tale dissipazione dipende dalle velocità angolari. I dati attuali sono ancora molto incerti.

39. Dinamica degli urti

Un'applicazione importante della dinamica dei sistemi sono i cosiddetti *problemi d'urto.* Si tratta di questo: abbiamo due sistemi (che potranno essere punti materiali, corpi rigidi, o anche oggetti più complessi). Indichiamoli con A e B. Supponiamo che inizialmente (ossia prima di un certo istante t_1) i due sistemi siano molto lontani tra loro e perciò non interagiscano, cioè che le forze che uno esercita sull'altro siano trascurabili: questa la chiameremo *fase iniziale* dell'urto. Nell'intervallo (t_1, t_2) i due sistemi si avvicinano e nascono delle forze significative, che ne modificano il moto; dopo l'istante t_2 l'interazione cessa di nuovo, e i sistemi si allontanano (*fase finale*). Durante tutto il fenomeno supponiamo inoltre che i due sistemi siano isolati dall'esterno.

Esempi

Vediamo alcuni esempi di urti, scelti in modo da rappresentare situazioni molto diverse:

1: il più classico sono le palle da biliardo

2: un altro è lo scontro tra due automobili

3: possiamo anche pensare a un elettrone che colpisce un atomo

4: una cometa contro un pianeta

5: l'interazione fra due galassie

6: l'urto fra due elettroni, o altre particelle.

Si sarà notato che nella varietà di situazioni alcune non corrispondono all'idea intuitiva di urto. Ma soprattutto c'è una grande differenza nelle scale spazio-temporali: questa era voluta, in quanto non si deve ridurre il concetto di urto a quello che appare tale alla nostra scala.

Non è neppure necessario che l'urto consista in un "contatto" fra i due sistemi: è il caso dei due elettroni, che interagiscono a distanza, attraverso la forza elettrostatica, ma è anche quello di una cometa contro il pianeta. Infatti parleremo di urto anche se la cometa non cade sul pianeta, ma si limita a passargli vicino, venendo deviata dalla sua attrazione. Viceversa l'urto fra due galassie (a parte la durata, che può essere migliaia o centinaia di migliaia di anni) può consistere in una "compenetrazione" dei due oggetti, da cui possono uscire profondamente modificati.

Urti elastici e anelastici

Un primo tentativo di classificazione distingue gli urti in queste due categorie, che però non è facile definire in modo generale. Negli esempi dati, si considera almeno approssimativamente elastico il primo, e possono esserlo il 3, il 4 e il 6. Sono invece certamente anelastici il 2 e il 5, e in certi casi tutti gli altri.

Detto in termini intuitivi, l'urto si chiama *elastico* se i sistemi dopo l'urto sono rimasti inalterati; *anelastico* se si sono prodotte delle modificazioni interne. L'urto di due palle da biliardo è circa elastico se le palle non si rompono; ma a rigore non lo è, perché l'urto provoca delle vibrazioni, che dissipano parte dell'energia del sistema. L'urto di due automobili o di due galassie è anelastico perché le automobili si deformano più o meno gravemente; le galassie possono cambiare struttura, dividersi in frammenti, ecc. Negli altri casi può darsi che l'urto abbia per effetto solo una deviazione delle traiettorie, con scambi di quantità di moto e di energia cinetica fra i due corpi; ma può accadere anche altro.

Se la cometa cade sul pianeta sarà distrutta dall'urto; l'elettrone che urta un atomo può portarlo in uno stato eccitato o anche ionizzarlo; dall'urto fra due particelle possono esserne create delle altre...

Una definizione più accurata di urto elastico può essere la seguente: non vi è trasferimento di energia dal moto dei centri di massa ai gradi di libertà interni dei due corpi. Non insisteremo tuttavia nel cercare una definizione generale: negli esempi che studieremo non ci sarà difficile distinguere.

Uso dei principi di conservazione

Poiché il sistema A+B è isolato, si conserverà certamente la quantità di moto totale e anche il momento angolare totale. Nella fase iniziale queste grandezze saranno semplicemente la somma di due parti, attinenti ai due sistemi:

$$\vec{P} = \vec{P}_{\mathrm{A}} + \vec{P}_{\mathrm{B}} \qquad \vec{L} = \vec{L}_{\mathrm{A}} + \vec{L}_{\mathrm{B}}.$$

Lo stesso si può dire nella fase finale:

$$\vec{P}' = \vec{P}'_{\mathrm{A}} + \vec{P}'_{\mathrm{B}} \qquad \vec{L}' = \vec{L}'_{\mathrm{A}} + \vec{L}'_{\mathrm{B}}.$$

Dato che $\vec{P}$ e $\vec{L}$ si conservano, avremo $\vec{P} = \vec{P}'$, $\vec{L} = \vec{L}'$, mentre ciò non accade per le parti relative ai due sistemi A e B. Tuttavia potremo scrivere

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\mathrm{A}} + \vec{P}_{\mathrm{B}} &= \vec{P}'_{\mathrm{A}} + \vec{P}'_{\mathrm{B}} \\ \vec{L}_{\mathrm{A}} + \vec{L}_{\mathrm{B}} &= \vec{L}'_{\mathrm{A}} + \vec{L}'_{\mathrm{B}}. \end{aligned}$$

Che cosa si può dire dell'energia? Qui il discorso è un po' più complesso: se nell'interazione intervengono forze dissipative non possiamo aspettarci che l'energia si conservi; ma anche se le forze sono conservative, è sempre possibile che una parte dell'energia iniziale venga scambiata con i gradi di libertà interni (si pensi al caso già citato di un elettrone che per il solo effetto della forza di Coulomb può eccitare un atomo; o dell'urto a distanza fra due stelle dotate di pianeti). In questo caso parleremo di *urto anelastico.* Perciò solo se l'urto è elastico potremo assumere non già la conservazione dell'energia totale (che sarebbe sempre garantita se le forze sono conservative) bensì della somma delle energie cinetiche:

$$T_\mathrm{A} + T_\mathrm{B} = T'_\mathrm{A} + T'_\mathrm{B}.$$

Urti in una dimensione

Il più semplice problema d'urto è quello in cui due punti materiali sono vincolati a muoversi su di una stessa retta. Se indichiamo con u le velocità prima dell'urto, e con v quelle dopo, la conservazione della quantità di moto richiede

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{39–1}$$

(abbiamo scelto un verso positivo sulla retta, e le u, v sono le *velocità scalari*, non i moduli). Se l'urto è elastico abbiamo anche

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 \tag{39–2}$$

e dalle (39–1), (39–2) è possibile ottenere le velocità finali.

Scriviamole portando dalla stessa parte i termini con la stessa massa:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \tag{39–3}$$
$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2). \tag{39–4}$$

La (39–4) si può scrivere

$$m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2)$$

e confrontandola con la (39–3) si vede che due casi sono possibili:

$$\begin{aligned} &a) \qquad v_1 = u_1 \quad \text{e} \quad v_2 = u_2 \\ &b) \qquad v_1 + u_1 = v_2 + u_2. \end{aligned}$$

Non deve stupire che esistano due soluzioni: i principi di conservazione valgono tanto prima quanto dopo l'urto, e perciò è naturale che debbano essere soddisfatti da due scelte delle velocità: la prima si riferisce agli istanti *precedenti* all'urto, la seconda agli istanti *successivi.* Naturalmente a noi interessa la seconda. Ricavando v_2 da b) e sostituendo nella (39–3) si arriva a un'equazione per v_1, che ha la soluzione

$$v_1 = \frac{2m_2 u_2 - (m_2 - m_1)\, u_1}{m_1 + m_2}. \tag{39–5}$$

Per ottenere v_2 non c'è bisogno di altri calcoli: basta sfruttare la simmetria del problema, scambiando gli indici:

$$v_2 = \frac{2m_1 u_1 - (m_1 - m_2)\, u_2}{m_1 + m_2}. \tag{39–6}$$

Limitiamo la discussione delle (39–5), (39–6) a due casi particolari:

– Se $m_1 = m_2$ si trova $v_1 = u_2$ e $v_2 = u_1$: dopo l'urto i due corpi si scambiano le velocità.
– Se $m_1 \ll m_2$ si ha invece $v_1 = -u_1 + 2u_2$: il corpo più massiccio non viene disturbato, mentre quello leggero "rimbalza," ma con velocità diversa (il motivo delle virgolette è che non è sempre vero che v_1 ha segno opposto a u_1: discutere i casi possibili).

Il riferimento del centro di massa

Sebbene il problema che abbiamo studiato sia semplice, le formule finali non sono comode da ricordare, e sono poco espressive. Vedremo ora che tutto diventa più facile se si segue un'altra via.

Mettiamoci nel riferimento del centro di massa del sistema: allora la quantità di moto totale è nulla per definizione. Indicando con p le quantità di moto prima dell'urto, con q quelle dopo, abbiamo (fig. 39–1)

$$p'_1 + p'_2 = 0 = q'_1 + q'_2 \qquad (39\text{–}7)$$

(gli apici ricordano che siamo nel riferimento K′). Conviene esprimere anche l'energia cinetica mediante la quantità di moto: $T = p^2/2m$. Quindi per un urto elastico

$$\frac{{p'_1}^2}{2m_1} + \frac{{p'_2}^2}{2m_2} = \frac{{q'_1}^2}{2m_1} + \frac{{q'_2}^2}{2m_2}$$

e usando la (39–7)

$$\frac{{p'_1}^2}{2\mu} = \frac{{q'_1}^2}{2\mu},$$

da cui

$$q'_1 = \pm p'_1 \qquad q'_2 = \pm p'_2. \qquad (39\text{–}8)$$

Il doppio segno presente nelle (39–8) ha lo stesso significato visto prima, e a noi interessa la soluzione in cui le quantità di moto finali sono diverse da quelle iniziali (ossia opposte). Già si vede come le cose siano più semplici in K′: dopo l'urto ciascun corpo *inverte la sua quantità di moto* (e perciò anche la velocità).

Dalle quantità di moto si passa immediatamente alle velocità, e da queste si torna senza difficoltà nel riferimento K. Calcoliamo anzitutto la velocità del centro di massa in K:

$$u_{\mathrm{G}} = v_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}.$$

(la velocità del centro di massa non cambia durante l'urto). Dopo di ciò abbiamo:

$$\begin{gathered} p_1' = m_1 u_1' = m_1(u_1 - u_\mathrm{G}) \\ q_1' = -p_1' \\ v_1' = q_1'/m_1 \\ v_1 = v_1' + v_\mathrm{G}. \end{gathered}$$

Eseguendo i calcoli si ritrova la (39–5).

Urto anelastico

Se l'urto non è elastico viene a mancare un'equazione, e non è quindi possibile dire niente sulle velocità finali, a meno che non si abbiano altre informazioni. Il caso più semplice è quello che di solito si chiama *perfettamente anelastico*, in cui i due corpi dopo l'urto restano uniti: in tal caso la seconda equazione è $v_1 = v_2$, e per di più entrambe queste velocità coincidono con v_G. Nel riferimento K$'$ le cose sono ancora più semplici: il centro di massa è sempre fermo, e quindi tutte le velocità dopo l'urto si annullano.

È istruttivo discutere in questo caso il bilancio dell'energia. Calcoliamo nel modo più diretto l'energia cinetica "perduta":

$$T_\mathrm{perd} = T_\mathrm{prima} - T_\mathrm{dopo} = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) u_\mathrm{G}^2 = \cdots$$

I puntini stanno a indicare un calcolo poco interessante (ma che è bene fare per esercizio!) Esiste un modo più "intelligente" di arrivare al risultato: usare il teorema di König.

Dato che dopo l'urto i due corpi si muovono insieme, la loro energia cinetica nel riferimento del centro di massa passa da un valore T' a zero, mentre l'energia cinetica del centro di massa non cambia. Quindi l'energia cinetica perduta è proprio T'. Capito questo, non è difficile verificare (ma lo sappiamo già dal problema dei due corpi) che

$$T_\mathrm{perd} = \tfrac{1}{2} \mu \, (u_1 - u_2)^2.$$

Questa discussione mostra che dal punto di vista della conservazione dell'energia l'urto perfettamente anelastico è il caso peggiore: in generale l'energia perduta sarà compresa fra zero (urto elastico) e quella calcolata sopra.

Urti in più dimensioni

Se togliamo il vincolo a muoversi su di una retta, pur occupandoci solo di punti materiali, le cose si complicano un po'; e soprattutto *non è più possibile determinare univocamente le velocità finali.* Vediamo perché.

Anche nel caso più favorevole, quello di urto elastico, avremo un'equazione vettoriale dalla conservazione della quantità di moto, e una scalare dalla conservazione dell'energia cinetica: in totale 4 equazioni. Le incognite sono le velocità finali, che hanno $3 + 3 = 6$ componenti, e mancano perciò due equazioni. Per capire la situazione discuteremo più a fondo un caso particolare, che però rappresenta bene quello che accade in generale: quello dell'urto elastico fra due particelle di ugual massa, di cui una inizialmente ferma.

Le leggi di conservazione ci dicono:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \\ p_1^2 &= q_1^2 + q_2^2. \end{aligned} \tag{39–9}$$

Come si vede dalla fig. 39–2, ne segue che i due vettori $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ sono ortogonali (*legge dell'angolo retto*). La dimostrazione formale è la seguente: dalla prima delle (39–9) si ha

$$p_1^2 = q_1^2 + 2\,\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 + q_2^2$$

e confrontando con la seconda: $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0$.

È interessante, per un motivo che vedremo, dimostrare per altra via la legge dell'angolo retto. Passiamo ancora una volta al riferimento del centro di massa: in questo caso è ovvio che $\vec{v}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}\vec{u}_1$, per cui

$$\vec{u}\,'_1 = \tfrac{1}{2}\vec{u}_1, \qquad \vec{u}\,'_2 = -\tfrac{1}{2}\vec{u}_1.$$

Dopo l'urto le velocità in K$'$ saranno ancora opposte, e avranno lo stesso modulo di prima dell'urto (conservazione dell'energia cinetica): ne segue la fig. 39–3, dove restano indeterminati

a) il piano della figura, del quale si sa solo che deve contenere i vettori $\vec{u}_1$, $\vec{v}_{\mathrm{G}}$, $\vec{u}\,'_1$, $\vec{u}\,'_2$ (tutti paralleli)

b) l'angolo fra $\vec{u}\,'_1$ e $\vec{v}\,'_1$.

Torniamo ora al riferimento K, sommando a $\vec{v}\,'_1$ e $\vec{v}\,'_2$ la $\vec{v}_{\mathrm{G}}$: si ottiene la fig. 39–4, e basta ricordare che le diagonali di un rombo sono perpendicolari per ricavare la legge dell'angolo retto.

Qual è l'interesse di questa dimostrazione? Vediamo quali leggi fisiche abbiamo usato:

– La conservazione della quantità di moto, che nel riferimento del centro di massa, per particelle di uguali masse, richiede che le velocità siano opposte.
– La conservazione dell'energia cinetica, che ci ha portato a dire che i moduli delle velocità non cambiano. A questo scopo non occorre neppure conoscere in che modo l'energia cinetica dipende dalla velocità: basta sapere che a parità di massa può dipendere solo dal modulo della velocità.
– La legge galileiana di trasformazione della velocità.

Il fatto interessante è che esistono prove sperimentali dirette che per particelle con velocità sufficientemente alte la legge dell'angolo retto *non è verificata* (Champion, 1932): l'angolo in fig. 39–2 risulta *acuto.* Dunque qualcuna delle ipotesi fatte *non può essere più vera* ad alte velocità; e per quanto poco intuitivo, la sola che può essere messa in discussione è la legge di Galileo. È quasi inutile dire che la meccanica relativistica risulta perfettamente in accordo con i fatti sperimentali.

Ruolo del momento angolare

In tutti i ragionamenti che abbiamo fatto fin qui non è mai entrato il momento angolare. Ci si può chiedere se non abbiamo sbagliato a trascurarlo, visto che ci fornisce un'altra legge di conservazione vettoriale. La risposta non è semplice in generale, ma possiamo almeno considerare qualche caso particolare, per capire che cosa si può ottenere di più tenendone conto.

Il momento angolare sarebbe certamente importante se avessimo a che fare con corpi non schematizzabili in punti materiali: l'esempio più comune sono proprio le palle da biliardo. È infatti ben noto che l'andamento dell'urto è fortemente influenzato dal fatto che la palla venga colpita dalla stecca in un punto o in un altro: ciò ha per effetto di imprimere alla palla un moto di rotazione ("effetto") che può essere molto diverso dal puro rotolamento; ossia momenti angolari diversi in grandezza e direzione. Tuttavia lo studio di questo tipo di urti è complicato, e non vogliamo approfondirlo.

Limitiamoci dunque a due punti materiali, e studiamo l'urto fra masse uguali, nel riferimento del centro di massa. In precedenza ci siamo occupati solo delle velocità, ma non abbiamo detto niente delle traiettorie. Una ragione è che non si possono fare affermazioni precise senza conoscere l'esatto andamento delle forze, cosa che non è nello spirito dell'approccio che abbiamo dato agli urti. Però è certo che nel nostro caso, essendo le velocità prima dell'urto fra loro opposte, le traiettorie nella fase iniziale saranno rette parallele. Quello che non è detto in generale è che si tratti della *stessa retta* (fig. 39–5): la distanza fra le due rette (indicata con b nella figura) si chiama *parametro d'urto.*

È ora facile vedere il ruolo del momento angolare: se lo calcoliamo rispetto a G, il momento angolare totale del sistema è mbu', avendo soppresso indici inutili e limitandosi alla componente normale al piano della figura, che è l'unica non nulla. La conservazione ci dice che lo stesso valore si avrà dopo l'urto. Anche nella fase finale le traiettorie saranno rettilinee e parallele, e perciò avremo

$$b\,u' = b_{\mathrm{f}} v'.$$

Se l'urto è elastico dovrà essere $b_{\mathrm{f}} = b$, essendo $v' = u'$; altrimenti non si può dire niente.

Vediamo dunque che l'uso del momento angolare ci fornisce una nuova informazione, ma richiede anche d'introdurre un nuovo parametro; non aiuta invece ad essere più precisi per quanto riguarda la direzione delle velocità.