

33a. Forme differenziali

Sembra opportuna a questo punto una riflessione matematica, per chiarire certi concetti e certe notazioni, e per introdurre un argomento che verrà approfondito più avanti, quando ne avremo veramente bisogno. Ci riferiamo al modo in cui sono state usate, a partire dal Cap. 26 (oltre a un solo esempio nel Cap. 25), le espressioni differenziali.

Uno sguardo indietro

Il differenziale è stato definito nel Cap. 10, per funzioni di una o più variabili, come approssimazione lineare alla funzione; alla fine del capitolo abbiamo anche avvertito che ne avremmo fatto un uso intuitivo, anzi “disinvolto.” Entrando nello studio della meccanica, e quindi delle equazioni differenziali, è però accaduto qualcosa di nuovo, che abbiamo volutamente evitato di sottolineare per non aggiungere complicazioni.

Vediamo di che si tratta, tornando alla (26–7) come esempio caratteristico. Ripetiamo qui di seguito i passaggi, per poi commentarli:

$$dT = \frac{1}{2}m d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = m\vec{v} \cdot \vec{a} dt = (m\vec{a}) \cdot (\vec{v} dt) = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Lo scopo del calcolo è di studiare come varia l’energia cinetica del nostro punto materiale *nel corso del moto*. I primi due passaggi fanno uso rispettivamente:

- della definizione di energia cinetica, e della linearità del differenziale, nel senso che $d(cf) = c df$
- della regola per il differenziale di un prodotto (che è uguale a quella per la derivata).

Del tutto diverso, anche se apparentemente innocuo, è il terzo passaggio. Qui si è usata la relazione fra differenziale e derivata: $d\vec{v} = \vec{a} dt$ perché \vec{a} è la derivata di \vec{v} rispetto al tempo. Però mentre fino a questo punto T era stata intesa come funzione delle componenti della velocità, ora diventa *una funzione del tempo*, perché stiamo considerando un moto ben preciso, con una data curva oraria $\vec{r}(t)$, in cui quindi anche la velocità è funzione del tempo. Ne segue una certa ambiguità della notazione: come dobbiamo intendere dT ? Sarà certo un differenziale, ma di quale funzione? Della T funzione della velocità (per definizione) o della T funzione del tempo (seguendo un determinato moto)?

I due passaggi successivi non aggiungono niente di nuovo: il quarto fa uso della linearità e commutatività del prodotto scalare, il quinto del fatto che $\vec{r}(t)$ soddisfa alla seconda legge della dinamica (equazione differenziale). Alla fine però il tempo sembra sparito, e dT sembra espresso in termini di $d\vec{r}$ (un altro differenziale? delle coordinate?) e della forza, che è funzione solo della posizione.

Un'espressione come $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ prende il nome di *forma differenziale*: dunque il nostro risultato finale (il teorema delle forze vive)

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (33a-1)$$

sembra “identificare” il differenziale della funzione energia cinetica con la forma differenziale *lavoro della forza*.

L'imbroglio sta nell'“identificare”: non è vero che le due cose siano identiche, ma solo che lo sono se le calcoliamo entrambe *seguendo il moto* del nostro punto materiale. Dunque la notazione ambigua nasconde una differenza sostanziale sotto un segno di uguaglianza, che è — per così dire — solo un'uguaglianza “condizionata.”

La situazione si vede meglio andando avanti: infatti introducendo l'energia potenziale scriviamo

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy. \quad (33a-2)$$

Ora questa relazione, se l'energia potenziale esiste, è una vera uguaglianza: afferma che il differenziale della funzione $V(x, y)$ è *incondizionatamente* uguale alla forma differenziale lavoro, cambiata di segno. Dunque la differenza fra la (33a-1) e la (33a-2) è assai grande, e non è affatto rappresentata nella notazione usata.

Differenziali e costanti del moto

Lo stesso gioco è stato ripetuto altre volte: nel Cap. 32, parlando di energia; nel Cap. 33, ancora a proposito del teorema delle forze vive (equazioni (33-9) e (33-10)). Anzi nel Cap. 32 c'è qualcosa di più: abbiamo scritto che posto $E = T + V$ si trova $dE = 0$, “ossia che E è una costante del moto.”

Siamo di nuovo in presenza di una notazione comoda, sintetica, ma anche pericolosa se non se ne capisce il significato. Essendo $E = T + V$, alla fine E risulta funzione di tutte le coordinate e di tutte le componenti delle velocità dei punti del sistema: nel caso in questione (problema dei due corpi) avremo in tutto 12 variabili dalle quali l'energia dipende. Che cosa vuol dire allora $dE = 0$? Forse che approssimando l'energia con una funzione lineare di tutte queste variabili, si trova che essa è costante? Ciò è manifestamente assurdo, dato che l'energia cambia sia al cambiare della velocità anche di uno solo dei punti, sia al cambiare della posizione (a causa dell'energia potenziale).

È intuitivo che s'intende un'altra cosa: se studiamo la variazione dell'energia *seguendo l'evoluzione del sistema nel tempo*, troviamo che essa non cambia. Si tratta quindi ancora di una variazione “condizionata”: non per variazioni arbitrarie delle variabili indipendenti, ma solo per quelle variazioni compatibili col moto reale del sistema, ossia con le equazioni differenziali fornite dal secondo principio della dinamica.

Conclusione provvisoria

Tutti questi discorsi servivano solo a mettere sull'avviso, senza proporre nessuna alternativa. Dovrebbero almeno aver prodotto due effetti:

- mostrare come la notazione matematica (e in realtà anche i concetti che essa rappresenta) possa risultare più o meno adeguata a seconda dell'ambito di applicazione
- motivare quindi la ricerca di un modo diverso di rappresentare i concetti che stanno sotto a certe formule.

Per ora non andremo oltre. Riprenderemo il problema quando — trattando di termodinamica — non potremo più eluderlo senza gravi difficoltà e grossi rischi di equivoci e fraintendimenti.

34. Sistemi continui, misure, integrali

Fino a questo momento abbiamo sempre avuto a che fare con sistemi materiali schematizzati come uno o più punti materiali. Accade però spesso che questa schematizzazione non sia la più adeguata, o la più semplice, e convenga usare un altro tipo di schema: quello di *sistema continuo*.

Dal punto di vista matematico, lo schema del sistema continuo porta con sé il concetto di *integrale*: questo capitolo è dedicato a una discussione di entrambi i temi.

Dall'insieme di punti al sistema continuo

Supponiamo di aver a che fare con un *insieme di punti materiali*, di masse m_i ($i = 1, \dots, n$). Abbiamo visto, e vedremo ancora, che riescono spesso utili espressioni come:

$$\mathcal{M} = \sum_i m_i \quad \vec{r}_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad I = \sum_i m_i \delta_i^2 \quad (34-1)$$

(avendo sottinteso in tutti i casi che la somma va da 1 a n). Queste espressioni rappresentano rispettivamente la massa totale, la posizione del centro di massa, il momento d'inerzia del sistema rispetto a una data retta (δ_i è la distanza dell' i -mo punto da quella retta).

L'insieme di cui sopra potrebbe essere:

- il sistema solare (i punti sono i pianeti)
- un ammasso o una galassia (i punti sono le stelle)
- un gas (i punti sono le molecole)
- un solido metallico (i punti sono gli atomi).

Nel primo caso è importante l'individualità dei punti, negli ultimi spesso no.

Esempio 1: Uno dei parametri fondamentali nella struttura di una stella è la funzione $\mathcal{M}(r)$, che dà la massa totale in una sfera di raggio r (nell'ipotesi di simmetria sferica).

Altri esempi: Consideriamo le espressioni

$$Q = \sum_i q_i \quad \vec{D} = \sum_i q_i \vec{r}_i,$$

che rappresentano la carica totale e il momento di dipolo elettrico di un sistema di cariche puntiformi. Le cariche sostituiscono in questo esempio le masse: il sistema potrebbe essere un atomo o un plasma, e di nuovo potrebbero interessarci le individualità delle singole cariche, oppure no (cosa probabile nel caso di un plasma).

Si sostituisce allora lo schema “insieme di punti materiali” (o di cariche) con quello “sistema continuo,” in cui interessa solo *quanta massa* o *quanta carica* c'è in ogni regione di spazio. Le proprietà fondamentali di queste funzioni “massa” e “carica” sono le seguenti:

- se la regione di spazio che si considera è vuota, la massa/carica corrispondente è nulla
- se due regioni non hanno punti comuni, la massa/carica dell'unione delle due regioni è la somma delle masse/cariche (additività).

Nota storica: Nella storia della fisica la distinzione fra insieme di punti materiali e sistema continuo è ben altro che una questione di convenienza pratica: nella discussione circa “l'intima costituzione della materia” le due soluzioni si sono intrecciate e alternate fin dall'antichità (le “essenze” e gli “atomi” della filosofia greca, i “fluidi” e i “corpuscoli” del '600 e '700, la disputa sulla realtà degli atomi fino ai primi anni di questo secolo). Oggi però adottiamo l'uno o l'altro schema, per es. nella nostra trattazione della meccanica, senza con ciò sottintendere nessuna opzione sulla realtà.

Definizione di misura

Possiamo utilizzare le proprietà sopra indicate per caratterizzare assiomaticamente gli oggetti matematici che traducono l'idea fisica di “massa/carica associata a una regione.” Supponiamo assegnata una funzione a valori reali sui sottoinsiemi di E^3 :

$$\mu : \mathcal{P}(E^3) \rightarrow \mathbf{R},$$

tale che

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Una funzione così fatta prende il nome di *misura* su E^3 .

Avvertenza: Come in altri casi, la definizione che abbiamo data è tutt'altro che rigorosa, per più ragioni:

- non è necessario (anzi non conviene) che una misura sia definita su *tutti* i sottoinsiemi di E^3
- la seconda proprietà di una misura va formulata in modo più restrittivo (additività numerabile)
- è opportuno ammettere anche insiemi di misura infinita
- spesso conviene restringere i valori possibili di una misura a \mathbf{R}^+ (misura positiva): la massa, a differenza della carica, è un esempio di misura positiva.

Esempi: Un'altra misura definita in E^3 è il *volume*. In una e due dimensioni si definiscono in modo corrispondente la *lunghezza* e l'*area*.

L'integrale

Lo schema di sistema continuo porta a tradurre le somme viste sopra in *integrali*. Ad es. se μ è la misura di massa, in luogo delle (34-1) scriveremo

$$\mathcal{M} = \int_A d\mu \quad \vec{r}_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_A \vec{r} d\mu \quad I = \int_A \delta^2 d\mu \quad (34-2)$$

dove A è la regione di spazio occupata dal sistema fisico di cui vogliamo calcolare la massa, il centro di massa, il momento d'inerzia.

Osserviamo però che la definizione di misura che abbiamo data include sia il caso continuo sia quello discreto: per es. la massa di un insieme finito di punti materiali è una misura definita su qualunque insieme $A \subset E^3$, nel senso che la sua massa è la somma delle masse dei punti che si trovano in A . Se viceversa $\mu(A) = 0$ tutte le volte che A si riduce a un punto, diremo che la misura è *continua*.

Nella notazione $\int \dots d\mu$ il simbolo \int è una "S" deformata, e sta a ricordare che l'integrale è una somma generalizzata; il $d\mu$ indica che all'integrale si arriva con un processo di limite da $\sum \dots \mu$. Vediamo meglio come vanno le cose, limitandoci per semplicità a supporre che μ sia una misura (positiva) continua, che A sia compatto (chiuso e limitato) e che anche f sia continua. In queste ipotesi ci sono due modi per dare significato a $\int_A f d\mu$:

1. Si decompone A in "pezzi abbastanza piccoli" $B_1 \dots B_n$ (fig. 34-1); per ogni B_k si calcola

$$\sum_{k=1}^n \mu(B_k) \inf_{P \in B_k} f(P) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \sup_{P \in B_k} f(P).$$

Si dimostra che le due espressioni hanno lo stesso limite quando i pezzi B_k "diventano sempre più piccoli," e si prende tale limite come definizione dell'integrale. Questa è la definizione di Riemann (detta molto alla buona e tralasciando un certo numero di precisazioni).

2. Si prende l'intervallo $(\min f, \max f)$ e lo si decompone in sottointervalli, scegliendo i punti (a_0, a_1, \dots, a_m) , dove $a_0 = \min f$ e $a_m = \max f$. Si definiscono

$$C_k = \{P \mid a_{k-1} \leq f(P) < a_k\}$$

(fig. 34-2) e si calcolano

$$\sum_{k=1}^m a_{k-1} \mu(C_k), \quad \sum_{k=1}^m a_k \mu(C_k).$$

Si dimostra che queste espressioni hanno lo stesso limite al crescere delle suddivisione in sottointervalli. Questa è la definizione di Lebesgue (anche qui, molto alla buona).

Nelle ipotesi che abbiamo fatto, le due definizioni danno lo stesso risultato; ma differiscono quando si generalizza ad altri insiemi e/o funzioni. La definizione di Lebesgue permette di definire l'integrale per una classe più generale di funzioni, e anche per misure non continue (integrale di Lebesgue–Stieltjes), mentre quella di Riemann può essere estesa a insiemi non limitati.

Si vede senza difficoltà che l'integrale è *additivo* sugli insiemi, e *lineare* sulle funzioni:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$$

$$\int_A (af + bg) \, d\mu = a \int_A f \, d\mu + b \int_A g \, d\mu.$$

La densità di una misura

L'additività dell'integrale mostra che esso definisce una nuova misura

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f \, d\mu$$

e ci si può porre il problema se sia vero il viceversa: sotto quali ipotesi una misura ν si può scrivere come integrale di una funzione f rispetto a un'altra misura μ ? La risposta è il

Teorema (di Radon–Nikodym): Se μ, ν sono due misure (la prima delle quali positiva) e se

$$\forall B: \quad \mu(B) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(B) = 0,$$

esiste f tale che

$$\forall A: \quad \int_A d\nu = \int_A f \, d\mu.$$

Possiamo scrivere $f = d\nu/d\mu$ e chiamare f la *densità* di ν rispetto a μ .

Nota: Come al solito, l'enunciato del teorema è incompleto (in particolare, non abbiamo precisato se, e in che senso, f sia unica); ma qui vogliamo soltanto dare l'idea generale.

Esempio: Sia $\mu = V$ (volume) e $\nu = \mathcal{M}$ (massa). La condizione del teorema richiede che non ci siano regioni di spazio di volume nullo e massa positiva (in particolare che non siano presenti masse puntiformi, ma neanche distribuzioni

uni- o bidimensionali di massa): allora dM/dV esiste e coincide col concetto elementare di densità.

Integrali in \mathbf{R}^2 : il teorema di Fubini

La misura “lunghezza” si denota di solito con dx (o dy , dz , ecc.); poi vedremo perché. Indichiamo con σ la misura “area” in \mathbf{R}^2 , e consideriamo un insieme A di area finita (ad es. compatto). Indichiamo con A_x la proiezione di A sull’asse x , e con $h(x)$ la lunghezza della sezione verticale di A corrispondente all’ascissa x (fig. 34-3): si dimostra

$$\sigma(A) = \int_A d\sigma = \int_{A_x} h(x) dx,$$

e analogamente sull’asse y .

Da questo teorema discende l’interpretazione dell’integrale di una funzione di una variabile reale come area sottesa al suo grafico: basta prendere come A l’insieme delimitato dall’asse x e dal grafico di f , per avere $h = f$ (fig. 34-4).

Più in generale: se indichiamo con $A_y(\bar{x})$ l’intersezione di A con la retta $x = \bar{x}$, posto $h(x) = \int_{A_y(x)} f(x, y) dy$ si ha

$$\int_A f d\sigma = \int_{A_x} h(x) dx.$$

Questo è il *teorema di Fubini*, che possiamo scrivere:

$$\int_A f d\sigma = \int_{A_x} dx \int_{A_y(x)} f(x, y) dy = \int_{A_y} dy \int_{A_x(y)} f(x, y) dx$$

Nota 1: Questo teorema, che insegna a calcolare un integrale in \mathbf{R}^2 mediante due successivi integrali in \mathbf{R} , e inoltre autorizza a *invertire l’ordine d’integrazione*, si estende in modo ovvio a un numero qualunque di dimensioni.

Nota 2: Spesso si scrive $dx dy$ invece di $d\sigma$: così facendo il teorema appare più intuitivo

$$\int_A f dx dy = \int_{A_x} dx \int_{A_y(x)} f(x, y) dy = \int_{A_y} dy \int_{A_x(y)} f(x, y) dx.$$

Corollario: Se A è un rettangolo coi lati paralleli agli assi, e se la f è della forma $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, si ha

$$\int_A f dx dy = \int_{A_x} f_1(x) dx \int_{A_y} f_2(y) dy$$

ossia l'integrale si spezza nel prodotto di due integrali, fatti sulle proiezioni del rettangolo.

Il teorema fondamentale dell'integrazione

Le definizioni che abbiamo dato d'integrale, per quanto intuitive, non ci dicono come calcolare un dato integrale. Il teorema di Fubini è un passo avanti, in quanto ci permette di ricondurre un integrale in \mathbf{R}^n al caso unidimensionale. Resta da risolvere quest'ultimo, e a ciò serve il famoso *teorema fondamentale*.

Premettiamo alcune notazioni di uso comune. Quando l'insieme $A \subset \mathbf{R}$ è un intervallo $[a, b]$ si scrive

$$\int_{[a,b]} f dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Inoltre conviene dare significato al secondo membro anche quando $a > b$:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_b^a f(x) dx.$$

e quando $a = b$:

$$\int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Teorema: La funzione F definita da

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

è la primitiva di f che si annulla per $x = a$.

Corollario: Sia F una qualsiasi primitiva di f : allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Osservazione 1: Il teorema fondamentale, col suo corollario, può essere letto in due modi: se sappiamo calcolare per altra via l'integrale, ci fornisce una *primitiva* di f ; viceversa, se la primitiva è nota, ci dice come calcolare l'integrale. Resta purtroppo il fatto che *non c'è un algoritmo* per calcolare integrali (o primitive).

Osservazione 2: Possiamo vedere F come una misura:

$$F(A) = \int_A f dx.$$

Allora per il teorema di Radon–Nikodym $f = dF/dx$, e questo spiega perché nel teorema di R–N si sia introdotta per la densità la stessa notazione di Leibniz della derivata.

Osservazione 3: Il teorema fondamentale giustifica l'uso di dx per esprimere la misura “lunghezza.” Se infatti la chiamiamo λ , abbiamo

$$\int_0^x d\lambda = \int_0^x 1 d\lambda = x$$

(x è la primitiva di 1 che si annulla per $x = 0$). Allora $dx/d\lambda = 1$ e diventa naturale scrivere dx in luogo di $d\lambda$.

La relazione fra primitiva e integrale data dal teorema fondamentale sta alla base dell'uso di chiamare *integrale indefinito*

$$\int f(x) dx$$

l'insieme delle primitive di f . Invece gli integrali usati finora si chiamano *definiti*.

Integrazione per sostituzione

Sia f una funzione (continua), F una sua primitiva, $A = [a, b]$ un intervallo della retta reale, g una funzione differenziabile e strettamente crescente in $B = [p, q] = g^{-1}(A)$. Se indichiamo con G la funzione composta $F \circ g$, abbiamo

$$G'(u) = F'(g(u)) g'(u) = f(g(u)) g'(u)$$

e d'altra parte, per il teorema fondamentale

$$F(b) - F(a) = \int_A f(x) dx, \quad G(q) - G(p) = \int_B G'(u) du.$$

Ma $F(a) = G(p)$, $F(b) = G(q)$ e perciò

$$\int_A f(x) dx = \int_B f(g(u)) g'(u) du. \quad (34-3)$$

Osservazione: La (34-3) può essere vista come un'applicazione del teorema di R-N: infatti $g' = dx/du$, anche nel senso di derivata della misura x rispetto alla misura u .

Si può sfruttare la (34-3) per trasformare un integrale mediante una *sostituzione* di variabile, che può portare a un integrale noto.

Esempio: Si debba calcolare

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Poniamo $x = \sin u$: allora $A = [0, 1/2]$, $B = [0, \pi/6]$, $dx = \cos u \, du$ e perciò:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos u \, du}{\cos u} = \int_0^{\pi/6} du = \frac{\pi}{6}.$$

Integrazione per sostituzione in più variabili

Vediamo direttamente un esempio di frequente uso: vogliamo calcolare

$$\int_A f(x, y) \, dx \, dy$$

usando, in luogo delle coordinate cartesiane, le coordinate polari r, ϑ .

In base al teorema di R-N, tra la misura $d\sigma = dx \, dy$ nel piano (x, y) e la misura $d\omega = dr \, d\vartheta$ nel piano (r, ϑ) c'è una relazione del tipo $d\sigma = \psi(r, \vartheta) \, d\omega$: occorre solo determinare la funzione ψ . Se A è come in fig. 34-5, la formula per l'area di un settore circolare ci dà

$$\int_A dx \, dy = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta = \int_B r \, dr \, d\vartheta$$

Dunque $\psi = r$ e

$$\int_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_B f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \, r \, dr \, d\vartheta. \quad (34-4)$$

Tenendo conto dell'additività dell'integrale, si vede che la (34-4) non vale solo se A ha la forma particolare della fig. 34-5, ma in generale; B è l'immagine di A nel piano (r, ϑ) per effetto della trasformazione di coordinate.

In modo analogo, anche se un po' più laborioso, si può dimostrare la trasformazione da coordinate cartesiane a polari in \mathbf{R}^3 : qui $\psi = \varrho^2 \sin \vartheta$, e perciò:

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_B f(\varrho \sin \vartheta \cos \varphi, \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \varrho \cos \vartheta) \varrho^2 \sin \vartheta d\varrho d\vartheta d\varphi.$$

Ci si può chiedere se esista una regola per trovare la ψ per una trasformazione qualunque di coordinate: la risposta è sì, e diamo qui la regola — come al solito senza dimostrazione — per il caso di una trasformazione da due coordinate (x_1, x_2) a due altre (ξ_1, ξ_2) :

Teorema: Posto

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix}$$

(questo si chiama il determinante *Jacobiano* della trasformazione) *si ha* $\psi = |J|$. È evidente la generalizzazione a un numero qualsiasi di dimensioni.

Integrazione per parti

Per due funzioni $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, derivabili, F e G si ha

$$\frac{d}{dx} F G = F' G + F G' = F' G + F g,$$

avendo indicato con g la derivata di G . Ne segue

$$F G = \int F' G dx + \int F g dx$$

o anche

$$\int F g dx = F G - \int F' G dx.$$

Questo per l'integrale indefinito. Ne segue, per l'integrale definito:

$$\int_a^b F g dx = (F(x) G(x)) \Big|_a^b - \int_a^b F' G dx$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Esempio: Calcoliamo

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx.$$

Conviene prendere $F = x$, $g = \cos x$ (e quindi $G = \sin x$). Possiamo seguire due strade: la prima è di calcolare l'integrale indefinito:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x,$$

e poi

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = (x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi} = -2.$$

La seconda strada è di calcolare direttamente l'integrale definito:

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = (x \sin x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0 - 2 = -2.$$

35. Calcolo di baricentri e momenti d'inerzia

Applicheremo ora quanto abbiamo detto sugli integrali al calcolo di alcune espressioni di uso frequente.

Esempio 1: Determiniamo il centro di massa di una lastra omogenea, a forma di triangolo rettangolo. Detti a , b i cateti del triangolo, e presi gli assi come in fig. 35-1, dovremo calcolare

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_A x d\mu \quad y_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_A y d\mu.$$

È evidente che basta calcolare il primo: il secondo si ottiene scambiando a con b . Se ρ è la densità superficiale della lastra, avremo $\mu = \rho \sigma$, e in particolare $\mathcal{M} = \frac{1}{2}ab\rho$; quindi

$$x_G = \frac{2}{ab} \int_A x d\sigma = \frac{2}{ab} \int_A x dx dy.$$

Applichiamo il teorema di Fubini: abbiamo $f(x, y) = x$, e per la lunghezza della sezione verticale $c(x) = b(1 - x/a)$, da cui

$$h(x) = \int_0^{c(x)} x dy = \frac{b}{a} x(a - x)$$

e poi

$$x_G = \frac{2}{ab} \int_0^a h(x) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x(a - x) dx = \frac{2}{a^2} \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{1}{3}a,$$

perché una primitiva di $x(a - x)$ è $\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3$.

Esempio 2: Determiniamo il centro di massa di una lastra omogenea, a forma di semicerchio (fig. 35-2). Occorre calcolare solamente

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2} \int_A y d\sigma.$$

Si può fare il calcolo in coordinate cartesiane:

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2} \int_A y dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^R dx \int_0^h y dy$$

dove abbiamo posto per brevità $h = \sqrt{R^2 - x^2}$. L'integrale su y dà come risultato $\frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)$ e poi:

$$y_G = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{4R}{3\pi},$$

avendo usato la primitiva $R^2x - \frac{1}{3}x^3$.

Usiamo invece coordinate polari: l'insieme B è un rettangolo (fig. 35-3), per cui

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2} \int_B r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{\pi R^2} \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

(abbiamo usato il corollario per gli integrali su di un rettangolo, e abbiamo preso $-\cos \vartheta$ come primitiva di $\sin \vartheta$).

Esempio 3: Mentre i due esempi precedenti erano solo degli esercizi, i due che seguono portano a risultati di uso molto frequente. Vogliamo trovare in primo luogo il momento d'inerzia di un cilindro omogeneo rispetto al suo asse. Se R è il raggio del cilindro A , e h la sua altezza (fig. 35-4) dobbiamo calcolare

$$I = \int_A r^2 d\mu = \varrho \int_A r^2 dV.$$

È evidente che conviene usare coordinate cilindriche:

$$I = \varrho \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h dz = \varrho \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \cdot h = \frac{1}{2} \pi \varrho R^4 h = \frac{1}{2} M R^2,$$

essendo $M = \pi \varrho R^2 h$ la massa del cilindro.

Esempio 4: Se invece di un cilindro abbiamo una sfera, il calcolo è un po' più complicato. Possiamo seguire due strade: usare coordinate cilindriche oppure polari.

In coordinate cilindriche:

$$I = \int_A r^2 d\mu = \varrho \int_A r^2 dV$$

esattamente come nel caso del cilindro, ma è diverso l'insieme A . Possiamo ancora usare il teorema di Fubini, ma dobbiamo scegliere bene l'ordine degli integrali. Conviene sezionare la sfera perpendicolarmente all'asse z (fig. 35-5):

$$I = \varrho \int_{-R}^R dz \int_0^{s(z)} r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\vartheta$$

dove $s = \sqrt{R^2 - z^2}$ è il raggio della sezione. Allora:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \varrho \int_{-R}^R dz \frac{1}{4} s^4 = \frac{1}{2} \pi \varrho \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \pi \varrho \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \frac{8}{15} \pi \varrho R^5 = \frac{2}{5} M R^2, \end{aligned}$$

essendo $M = \frac{4}{3} \pi \varrho R^3$ la massa della sfera.

In coordinate polari:

$$I = \varrho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin^2 \vartheta$$

dove r è ora la coordinata radiale, e $r \sin \vartheta$ la distanza dall'asse z . Proseguendo:

$$I = 2\pi \varrho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{2}{5} \pi \varrho R^5 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta.$$

L'integrale su ϑ si può calcolare in diversi modi, che lasciamo per esercizio; il risultato finale è ovviamente lo stesso visto prima.

35a. La legge di gravitazione

La legge di gravitazione è la prima legge universale della fisica concernente una delle interazioni fondamentali. Abbiamo già avuto occasione di ricordare che essa è dovuta a Newton e che è rimasta un principio base della fisica, senza alcuna correzione, fino a questo secolo. Abbiamo anche visto una serie di applicazioni della legge di gravitazione, anch'esse in buona parte opera di Newton.

Non abbiamo però discusso fino a questo momento alcuni aspetti della sua scoperta, che hanno costituito un grave problema per Newton e la cui soluzione ha aperto la strada alla teoria classica dei campi (elettromagnetismo). Neppure abbiamo accennato a possibili revisioni di questa legge — in senso diverso da quella di Einstein — di cui si è parlato anche in tempi recenti. Vogliamo perciò dedicare questo capitolo a chiarire tali questioni.

Il moto della Luna

Newton arriva alla legge di gravitazione sulla base del moto della Luna, i cui parametri fondamentali erano già ben noti ai suoi tempi. Quelli che ci servono sono i seguenti: la distanza Terra–Luna è pressoché costante (le variazioni sono di $\pm 5\%$) e vale in media $D = 3.84 \cdot 10^8$ m. Il periodo di rivoluzione (*siderale*, ossia misurato rispetto a un riferimento orientato secondo le stelle fisse) è $T = 2.36 \cdot 10^6$ s.

Nota: Anche se abbiamo dato tre sole cifre, il periodo (non la distanza) era noto ai tempi di Newton con incertezza assai minore; già gli astronomi babilonesi, oltre 2000 anni fa, lo conoscevano entro 10^{-7} .

Problema: Come avranno fatto?

È utile osservare che D vale quasi esattamente 60 raggi terrestri; inoltre da D e da T si calcola facilmente l'accelerazione della Luna:

$$a_L = 2.72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Invece l'accelerazione di un grave alla superficie della Terra è $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, e il rapporto fra le due risulta:

$$\frac{g}{a_L} = 3.6 \cdot 10^3.$$

Ora 3600 è il quadrato di 60, e da qui l'intuizione di Newton: la forza di gravità è *inversamente proporzionale al quadrato della distanza*.

Nota: In realtà, se si usano i dati più accurati, prendendo in particolare per R e per g i valori all'equatore, si trova uno scarto di quasi l'1%: come mai? forse la legge di gravitazione è imprecisa? Ovviamente no, e la risposta sta in tre effetti che bisogna considerare:

- lo schiacciamento terrestre
- la forza centrifuga
- la massa non trascurabile della Luna.

Di questi, il più importante è il terzo. Poiché abbiamo già trattato l'argomento nel Cap. 17, mentre ora il nostro obiettivo è diverso, lasciamo la verifica per esercizio.

Data la proporzionalità di \vec{F} a m , conviene introdurre il concetto di *campo gravitazionale*, definito come la forza per unità di massa:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}.$$

Newton postula anche che il campo gravitazionale è *additivo*, ossia che il campo prodotto dalla presenza di più corpi è la somma (vettoriale) dei campi prodotti dai singoli corpi.

Il problema della sorgente estesa

Gli storici hanno accertato che la prima idea della legge $1/r^2$ è del 1666 (va anche ricordato l'apporto di Halley e Hooke); tuttavia la pubblicazione dei *Principia* è del 1687. Ci si è chiesti quale sia stata la causa del ritardo di oltre 20 anni, e sembra che la si possa identificare in una grave difficoltà, che Newton impiegò molto tempo a superare. La difficoltà è la seguente.

La Terra è un corpo esteso (e anche la Luna): dunque ogni sua parte contribuisce all'attrazione gravitazionale, in modo diverso a seconda della distanza. Questo non è un grave problema quando calcoliamo la forza fra la Terra e la Luna, perché le loro dimensioni sono abbastanza piccole rispetto alla distanza; ma se vogliamo calcolare la forza che la Terra produce su di un sasso posto alla sua superficie la situazione è ben diversa (fig. 35a-1). Ci saranno parti della Terra vicinissime al sasso, e altre lontanissime; per di più anche la direzione della forza sarà molto diversa. In conclusione, dovremo sommare tante forze elementari, e non è facile vedere quale sarà il risultato; tanto meno appare ovvio che tutto vada come se la massa della Terra fosse tutta raccolta nel suo centro. Eppure proprio questo abbiamo supposto nel calcolo fatto sopra. . .

In effetti nei *Principia* Newton dimostra il teorema seguente (qui espresso in linguaggio moderno):

Teorema 1: Il campo gravitazionale prodotto da un corpo a simmetria sferica nei punti esterni è lo stesso che si avrebbe se tutta la massa fosse raccolta nel suo centro.

Questo teorema si può vedere come un semplice corollario di un risultato più generale, dimostrato da Gauss un secolo dopo; noi qui presenteremo la dimostrazione che ne dà Newton (riformulata con notazioni moderne).

Dimostrazione del teorema 1

Cominciamo col premettere un

Lemma: Se nel triangolo OPQ (fig. 35a-2) si muove il punto P, lasciando fissi O, Q e costante \overline{OP} , si ha

$$r^2 \cos \vartheta' \sin \vartheta d\vartheta = r'^2 \sin \psi d\psi.$$

Dim.: Se P₁ è la nuova posizione di P, dalla fig. 35a-3 si vede che

$$\overline{PP_1} = r d\vartheta, \quad \overline{PP_2} = r' d\psi$$

(a meno di infinitesimi di ordine superiore) e perciò

$$r' d\psi = r d\vartheta \cos \vartheta'.$$

Dal teorema dei seni:

$$r' \sin \psi = r \sin \vartheta$$

e moltiplicando si ha la tesi. ■

Dim. (del teorema 1 di Newton): Possiamo pensare che il corpo sia costituito da tanti sottilissimi gusci sferici (bucce di cipolla). Se il teorema è vero per uno di questi gusci, per l'additività del campo gravitazionale sarà vero anche per l'intero corpo.

Supponiamo dunque che il corpo M sia un sottilissimo guscio sferico, di raggio a e densità superficiale μ costante. Dunque un elemento di superficie di area $d\sigma$ avrà massa $\mu d\sigma$; tutto il guscio ha massa $M = 4\pi a^2 \mu$.

Prendiamo in esame la zona delimitata da ϑ , $\vartheta + d\vartheta$ (fig. 35a-4): la sua larghezza è $a d\vartheta$ e la lunghezza $2\pi a \sin \vartheta$, quindi l'area vale $2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta$. Un pezzetto della zona, vicino a Q, produce in P un campo di modulo $G\mu d\sigma/r'^2$. Per l'intera zona conta solo la componente lungo OP (le altre si cancellano per simmetria) e si ottiene il campo

$$\frac{G\mu}{r'^2} \cdot 2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta \cdot \cos \vartheta'.$$

Il lemma ci dice che per a ed r costanti:

$$\frac{\sin \vartheta d\vartheta}{r'^2} \cos \vartheta' = \frac{\sin \psi d\psi}{r^2}$$

e perciò il campo dovuto alla zona è

$$2\pi a^2 \frac{G\mu}{r^2} \sin \psi d\psi = \frac{GM}{2r^2} \sin \psi d\psi.$$

Quando ϑ va da 0 a π , lo stesso accade per ψ : quindi integrando su tutto il guscio si ottiene

$$g = \int_0^\pi \frac{GM}{2r^2} \sin \psi \, d\psi = \frac{GM}{r^2},$$

che è quanto si voleva. ■

Il campo interno: il secondo teorema di Newton

Newton enuncia e dimostra anche il

Teorema 2: Nei punti interni al guscio il campo è nullo.

Dim.: Anche qui possiamo limitarci a un guscio sferico. Nella fig. 35a-5 i triangoli PQR, PQ'R' sono simili, e ne segue

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{Q'R'}}{\overline{PR'}} = \frac{\overline{Q'R'}}{\overline{PQ'}}$$

a meno di termini di ordine superiore.

Se consideriamo due quadratini sulla sfera, costruiti sui lati QR e Q'R', per le loro aree abbiamo:

$$\frac{d\sigma}{r^2} = \frac{d\sigma'}{r'^2}.$$

Dunque i campi prodotti da $d\sigma$ e $d\sigma'$ nel punto P si cancellano, e lo stesso vale per tutta la sfera. ■

Corollario: Il campo in un punto P interno a una distribuzione di massa a simmetria sferica è solo quello dovuto alla materia contenuta nella sfera di raggio $r = \overline{OP}$ (fig. 35a-6); se M' è la massa totale di questa materia, si ha quindi $g = GM'/r^2$.

Esercizio: Calcolare il campo gravitazionale all'interno di un corpo sferico di densità costante ρ .

Soluzione: Abbiamo $M' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, $g = GM'/r^2 = \frac{4}{3}\pi G \rho r$: il campo cresce proporzionalmente a r .

Limiti di validità della legge di Newton: la scoperta di Nettuno

Ai tempi di Newton la regione accessibile all'astronomia si riduceva al sistema solare fino a Saturno; fu quello perciò il campo di applicazione e verifica della legge di gravitazione. Anche in uno spazio che oggi può sembrarci ristretto, non è male tener presente che si trattava pur sempre di un'estrapolazione: dalla distanza della Luna a quella di Saturno c'è un fattore 4000. Non era quindi affatto ovvio che la legge dovesse ancora funzionare, come invece risultò dai fatti.

Un secolo dopo, Herschel scopriva casualmente Urano; a partire dal 1800 iniziava la scoperta degli asteroidi (con Cerere, vista da Piazzi). I matematici del

tempo (primi fra tutti Laplace e Gauss) si mettevano all'opera e dimostravano che tutti questi oggetti "nuovi" seguivano puntualmente le leggi di Newton. Ma...

Proprio Urano doveva creare il primo problema: le osservazioni protratte nei primi decenni dell'800 provavano che il moto di Urano non era quello che ci si aspettava, anche tenendo conto della complicazione dovuta all'attrazione di tutti gli altri pianeti, e non soltanto del Sole. Sembrava dunque che si fosse trovata una deviazione dalla legge di gravitazione: cosa in fondo prevedibile, dato che ci si stava spingendo a distanze sempre maggiori...

Però non tutti la pensavano così: qualcuno (i nomi legati a questa storia sono Adams e LeVerrier) riteneva invece che l'irregolarità del moto di Urano segnalasse l'esistenza di un pianeta sconosciuto, che anch'esso perturbava Urano con la sua attrazione gravitazionale. I due si posero separatamente al lavoro per risolvere il "problema inverso": *dal moto osservato di Urano determinare massa e posizione del pianeta sconosciuto.*

I calcoli richiesero anni; ma nel 1846, pressoché simultaneamente, entrambi furono in grado di trasmettere i loro risultati agli osservatori: il 25 settembre l'astronomo berlinese Galle telegrafava a LeVerrier: "Il pianeta di cui ci avete segnalato la posizione *esiste realmente.*" E pochi giorni più tardi il direttore dell'Osservatorio, Encke, scriveva della "più significativa prova concepibile della validità della gravitazione universale."

Limiti di validità della legge di Newton: il problema di Mercurio

Paradossalmente, allo stesso LeVerrier è anche dovuta un'altra scoperta, che in seguito avrebbe segnato una crisi — questa volta reale — della gravitazione newtoniana: la precessione del perielio di Mercurio.

Si tratta di questo: le osservazioni mostrano che l'orbita di Mercurio non è esattamente un'ellisse. Anche tenendo conto delle perturbazioni degli altri pianeti, resta un moto di rotazione dell'asse maggiore, assai lento (un giro in 50 000 anni) che non dovrebbe esistere se la legge di Newton fosse esattamente valida.

Questo fenomeno rimase senza spiegazione per almeno 70 anni: il problema venne risolto solo da Einstein, il quale mostrò che la precessione era conseguenza necessaria della relatività generale, che era in grado di dar conto dell'effetto entro gli errori di osservazione (dell'ordine dell'1%).

In realtà la precessione del perielio non esiste solo per Mercurio, ma per tutti i pianeti (Terra inclusa); per Mercurio è molto più grande, per due ragioni:

- Mercurio ha una velocità orbitale maggiore degli altri pianeti, e perciò gli effetti relativistici dipendenti dalla velocità sono più grandi
- è più vicino al Sole, e questo rende maggiori gli effetti che dipendono dal campo gravitazionale.

Purtroppo qui non è possibile andare oltre questi cenni descrittivi, perché la teoria della precessione del perielio non si può fare con i mezzi di cui disponiamo.

Al di là del sistema solare

Dai tempi di Newton (e anche di Adams e LeVerrier) la scala delle osservazioni astronomiche si è molto estesa, e parallelamente si è ampliato il campo di applicazione della legge di gravitazione, che oggi è alla base dello studio delle stelle, degli ammassi, delle galassie. . .

Piccoli effetti (analoghi a quello su Mercurio) sono riscontrabili solo in casi speciali: ad es. certe pulsar binarie, che sono sistemi molto “stretti” e sui quali è possibile fare misure precise grazie alla regolarità degli impulsi di radiazione che emettono.

È solo quando si arriva alla scala cosmologica, ossia allo studio della struttura ed evoluzione dell'Universo, che di nuovo la gravitazione newtoniana cade in difetto, ed è necessario usare “in tutta la sua potenza” la relatività generale. Infatti qui è la stessa concezione dello spazio e del tempo che sta alla base della fisica newtoniana, ad essere inadeguata.

La ricerca della “quinta forza”

Da quanto abbiamo detto fin qui, è chiaro che al momento la gravitazione newtoniana — con le correzioni introdotte dalla relatività generale — spiega perfettamente i fatti osservati alla scala astronomica. Resta tuttavia aperta la possibilità che a scala inferiore vi sia ancora qualcosa da dire.

In effetti esiste un intervallo di distanze nel quale gli esperimenti — fino a qualche anno fa — non avevano detto molto. A parte le verifiche astronomiche, la sola altra conferma della legge di gravitazione era negli esperimenti di laboratorio alla Cavendish, ossia su distanze inferiori al metro. Anche gli esperimenti di caduta dei gravi non danno informazioni a distanze medie, perché la gran parte della massa della Terra sta a migliaia di km dal corpo che cade.

Negli ultimi anni è sorto il sospetto, dovuto a un riesame critico degli esperimenti di Eötvös, che la forza di gravità non agisse nello stesso modo su tutte le masse, ma potesse variare con la composizione del corpo (ad es. col rapporto tra numero di neutroni e protoni nei nuclei). Parallelamente, argomenti teorici portavano a ipotizzare una “quinta forza,” con proprietà simili alla gravità, ma sensibile solo a distanze al più di centinaia di metri.

Come si potrebbe accertare se tale forza esiste? La risposta in linea di principio è semplice, e si basa sui teoremi di Newton di cui abbiamo già parlato. Se la forza di gravità segue esattamente le legge di Newton, essa

- all'esterno della Terra deve decrescere come l'inverso del quadrato della distanza dal centro;
- se invece ci si addentra nella Terra — ad es. in un pozzo di miniera — deve diminuire: proporzionalmente alla distanza dal centro, se pensiamo la Terra

omogenea; ma anche supponendo una diversa distribuzione di massa, sarà sempre possibile calcolarla.

Si può anche provare a misurare la forza dovuta a una montagna (fig. 35a-7), e vedere se varia con la distanza come dovrebbe.

Negli ultimi anni sono stati compiuti diversi esperimenti come quelli accennati: i risultati sono stati contraddittori, ma gli effetti annunciati da alcuni ricercatori non sono stati confermati. L'opinione più diffusa al momento è che *non esista nessuna prova* di deviazioni dalla legge di gravitazione di Newton alla scala considerata.