31. Il moto kepleriano

Questo capitolo è dedicato alla presentazione di un altro esempio canonico di meccanica del punto materiale: il cosiddetto "moto kepleriano," ossia il moto sotto l'azione di una forza centrale inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Il campo di applicazione di questa teoria è, come ben noto, l'interazione gravitazionale fra masse puntiformi (o a simmetria sferica); ma accanto a questa dobbiamo mettere anche l'interazione elettrostatica fra cariche con uguali caratteristiche geometriche. L'unica differenza è che nel secondo caso la forza può essere anche repulsiva, mentre nel caso gravitazionale è sempre attrattiva.

Non ci occuperemo ora delle basi fisiche della legge di gravitazione universale di Newton, ma l'assumeremo come un dato di fatto, espresso dalla legge di forza:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

dove M e m sono le due masse in interazione, G è la costante di gravitazione, r la distanza fra le masse. Resta inteso che $\vec{F}$ indica la forza che M esercita su m, essendo $\vec{r}$ il vettore che va da M a m (fig. 31–1). La forza che sente M, stante il 3° principio, è $-\vec{F}$.

L'approssimazione del centro di forza fisso

In questo capitolo faremo un'ipotesi addizionale: che sia $M \gg m$, così che sia lecito trascurare il moto di M. Infatti a parità di forza i due corpi hanno accelerazioni inversamente proporzionali alle loro masse. Potremo dunque scegliere un riferimento inerziale in cui M è fermo.

Osserviamo che l'ipotesi $M \gg m$ sarà più o meno accettabile a seconda non soltanto del sistema in esame, ma anche delle richieste di accuratezza che si fanno alla teoria. Sappiamo che per il sistema Sole–Terra il rapporto delle masse è circa $3 \cdot 10^5$; ma questa informazione non basta per sapere se potremo trascurare il moto del Sole: bisogna avere un'idea dell'approssimazione che si richiede, ad es. per il confronto con le osservazioni (che in questo caso sono molto più precise). È invece evidente che l'approssimazione sarà cattiva nel caso Terra–Luna, il cui rapporto di masse è circa 80. Un altro esempio può essere l'atomo d'idrogeno (dove l'interazione è elettrostatica): il rapporto delle masse di protone ed elettrone è vicino a 1800, e quindi la nostra approssimazione può dare un primo orientamento, ma non è sufficiente rispetto alla precisione dei dati spettroscopici.

Stabilito che l'approssimazione sia accettabile, avremo a che fare con un sistema retto dall'equazione del moto

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}. \tag{31–1}$$

Si noti che nella (31–1) è scomparsa la massa del corpo in moto, il che vuol dire che il moto non dipende dalla grandezza della massa (a parità di condizioni iniziali, e nei limiti della nostra approssimazione). Ciò deriva dal fatto che la legge di gravitazione fa dipendere l'intensità della forza dalla stessa grandezza m che compare nella seconda legge della dinamica: spesso si esprime la situazione parlando di "identità fra massa *inerziale* e massa *gravitazionale*." Abbiamo già discusso l'argomento nel Cap. 17a.

Potrà riuscire utile, per semplificare qualche formula, usare la cosiddetta *costante di Gauss*:

$$k = \sqrt{GM}.$$

Osserviamo solo, a scanso di equivoci, che non si tratta di una "costante universale," in quanto dipende dalla massa del corpo che genera il campo gravitazionale.

Le costanti del moto: energia e momento angolare

Com'è ormai abituale, iniziamo cercando le costanti del moto del sistema. Senza neppure bisogno di guardare l'equazione (31–1), possiamo già dire, grazie al fatto che la forza è centrale, che debbono conservarsi energia e momento angolare.

Più esattamente, l'espressione dell'energia è

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{k^2 m}{r} = m\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \frac{k^2}{r}\right), \tag{31–2}$$

come si vede cercando la primitiva di F_r. Notiamo che nella (31–2) si è fatta una scelta per la costante arbitraria nell'energia potenziale: abbiamo preso $V = 0$ a distanza infinita, secondo l'uso universale.

Quanto al momento angolare, la sua espressione è la solita:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v}.$$

La conservazione del momento angolare ci assicura che il moto sarà piano, per cui nello studio della traiettoria, che faremo fra poco, potremo sempre limitarci a due dimensioni.

Il vettore di Lenz

Nel moto kepleriano esiste un'altra costante del moto, che non si presenta per una generica forza centrale:

$$\vec{N} = \vec{v} \times \vec{L} - k^2 m\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

La verifica si fa calcolando $d\vec{N}/dt$ e usando la (31–1) per esprimere $\ddot{\vec{r}}$: la lasciamo per esercizio.

Un'osservazione va fatta subito: contando l'energia, le tre componenti del momento angolare, e poi le tre del vettore di Lenz, si arriva a 7 costanti del moto, contro un massimo possibile di 5 per un sistema con 3 gradi di libertà. Debbono dunque esistere delle relazioni che permettano di esprimere due delle grandezze in funzione delle altre.

La prima relazione è immediata: dalla definizione di $\vec{N}$ si vede che esso è sempre ortogonale a $\vec{L}$, per cui

$$L_x N_x + L_y N_y + L_z N_z = 0.$$

In altri termini, possiamo dire che $\vec{N}$ *giace sempre nel piano della traiettoria.*

La seconda relazione si trova calcolando $|\vec{N}|^2$:

$$|\vec{N}|^2 = |\vec{v} \times \vec{L}|^2 + k^4 m^2 - \frac{2k^2 m}{r}\, \vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{L}.$$

Il primo termine a secondo membro si calcola osservando che $\vec{v}$ e $\vec{L}$ sono ortogonali, e perciò il modulo del prodotto vettore è il prodotto dei moduli; il terzo termine si trasforma sfruttando l'identità

$$\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{L} = \frac{1}{m}\, |\vec{L}|^2.$$

Risulta:

$$N^2 = v^2 L^2 + k^4 m^2 - \frac{2k^2}{r}\, L^2 = k^4 m^2 + \frac{2}{m}\, E L^2. \qquad (31\text{–}3)$$

Dunque una volta assegnati E ed $\vec{L}$ anche il modulo di $\vec{N}$ è fissato: resta libera soltanto la sua direzione nel piano della traiettoria (fig. 31–2).

La traiettoria

Conviene usare coordinate polari (r, ϑ), scegliendo l'asse polare nella direzione di $\vec{N}$. Calcoliamo allora

$$\vec{r} \cdot \vec{N} = \vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{L} - k^2 m r = \frac{1}{m}\, L^2 - k^2 m r.$$

Dato che il primo membro si scrive $N r \cos\vartheta$, abbiamo

$$r = \frac{L^2/m}{k^2 m + N \cos\vartheta} = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} \qquad (31\text{–}4)$$

dove abbiamo posto

$$p = \left(\frac{L}{km}\right)^2 \qquad e = \frac{N}{k^2 m}.$$

La (31–4) è l'equazione in coordinate polari di una conica, avendo preso il polo in un fuoco: si tratta di un'ellisse, di una parabola o di un'iperbole a seconda che sia $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$. Se si guarda la (31–3), si scopre che i tre casi corrispondono a $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$ rispettivamente. In questo risultato è inclusa la *prima legge di Keplero.* Segue anche che nel primo caso, e soltanto in quello, il moto è periodico.

Il legame tra segno dell'energia e forma della traiettoria si spiega facilmente, ricordando che dalla conservazione dell'energia segue una disuguaglianza:

$$E \geq V(r) = -\frac{k^2 m}{r}.$$

Se $E > 0$, questa non pone alcuna limitazione su r: il corpo può arrivare a distanza infinita, con una velocità $v = \sqrt{2E/m}$. Se $E = 0$ è ancora vero che il corpo arriva all'infinito, ma con velocità nulla; infine, se $E < 0$, si vede che $r < k^2 m/|E|$, e perciò la traiettoria è limitata.

In tutti i casi la distanza minima da M (il *perielio* di un pianeta) si raggiunge per $\vartheta = 0$, e vale $p/(1+e)$; nel caso dell'ellisse la distanza massima (*afelio*) è invece $p/(1-e)$, e da qui si vede che il semiasse maggiore dell'ellisse è

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{(L/km)^2}{1-(N/k^2m)^2} = \frac{k^2 L^2}{(k^2 m)^2 - N^2} = \frac{k^2 m}{2|E|}$$

(abbiamo usato la (31–3), e tenuto conto che E è negativa). Il fatto importante è che *il semiasse maggiore dell'ellisse dipende soltanto dall'energia.*

La legge oraria

Non si può dare un'espressione elementare della legge oraria del moto, ma si possono dire alcune cose usando la conservazione del momento angolare. Cominciamo osservando che dalla (31–3) segue (per $E < 0$)

$$L^2 \leq \frac{k^4 m^3}{2|E|} = k^2 m^2 a.$$

L'uguaglianza si ha solo se $N = 0$, ossia $e = 0$, e la traiettoria riesce circolare: anche qui *il massimo del momento angolare, a parità di energia, si ha per una traiettoria circolare.* La corrispondente velocità (detta *velocità circolare*) vale

$$v_\mathrm{c} = \frac{k}{\sqrt{a}}.$$

Lasciamo per esercizio di calcolare le velocità al perielio e all'afelio, che indicheremo con v_p e v_a:

$$v_\mathrm{p} = v_\mathrm{c}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad v_\mathrm{a} = v_\mathrm{c}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

È anche facile calcolare il periodo, se si ricorda

a) la relazione fra i semiassi dell'ellisse: $b = a\sqrt{1-e^2}$

b) l'area dell'ellisse: $S = \pi ab$.

Avremo infatti $S = \mathcal{A}T$, dove $\mathcal{A}$ è la velocità areale, e T il periodo; con $L = 2m\mathcal{A}$ si ottiene

$$T = \frac{\pi ab}{\mathcal{A}} = \frac{2\pi m a^2\sqrt{1-e^2}}{L} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{k\sqrt{p}} = \frac{2\pi}{k}\,a^{3/2}, \tag{31–5}$$

che è la *terza legge di Keplero.*

Determinazione della massa

Sappiamo che il moto non dipende dalla grandezza di m, e perciò non è possibile determinare la massa di un pianeta studiandone il moto; possiamo invece verificare in che misura sia soddisfatta la terza legge di Keplero. La tabella che segue riporta, per i pianeti del sistema solare, il semiasse dell'orbita (in unità astronomiche), il periodo siderale (in anni tropici) e il rapporto $T/a^{3/2}$:

Mercurio	0.387099	0.24085	1.00003
Venere	0.723332	0.61521	1.00004
Terra	1.000000	1.00004	1.00004
Marte	1.523691	1.88089	1.00004
Giove	5.202803	11.86223	0.99956
Saturno	9.53884	29.4577	0.99990
Urano	19.1819	84.0139	1.00003
Nettuno	30.0578	164.793	1.00001
Plutone	39.44	247.7	1.00005

Si vede che il rapporto è abbastanza costante (entro qualche unità su 10^4): ciò giustifica Keplero, che non disponeva di osservazioni molto precise. Ma coi dati moderni dobbiamo dire che la terza legge di Keplero non è esatta.

Il fatto è che l'approssimazione $M \gg m$ non è soddisfatta ugualmente bene per tutti i pianeti: i casi peggiori sono i pianeti "giganti," ossia Giove e Saturno. Vedremo più avanti come si debbano modificare le relazioni scritte in questo capitolo, per tener conto del moto del Sole.

Dalla terza legge di Keplero nella forma (31–5) si vede che conoscendo a e T si può determinare M (ad es. la massa del Sole). Non ci sono problemi per i periodi, che erano già noti con precisione dall'antichità; sulla misura della distanza abbiamo già detto nel Cap. 3. Resta però il passaggio da k a M, che richiede la conoscenza di G. Questa si fa con esperimenti di laboratorio (è classica la misura di Cavendish, 1798).

Con lo stesso procedimento si calcola la massa della Galassia, nell'ipotesi che essa sia concentrata in un nucleo pressoché sferico. Il Sole è in orbita circolare attorno a questo nucleo, e occorre conoscere raggio e periodo. Le osservazioni astronomiche danno per il raggio un valore di circa 10^4 pc $= 3 \cdot 10^{20}$ m e per il periodo $2 \cdot 10^8$ anni. Ne risulta una massa della Galassia dell'ordine di 10^{11} volte quella del Sole (lasciamo i calcoli per esercizio).

Il contributo di Keplero

È il caso di riassumere il contributo dato da Keplero al problema che abbiamo trattato. Agli inizi del '600 la meccanica newtoniana non era ancora nata, per cui non era possibile l'approccio che abbiamo descritto. In effetti il lavoro di Keplero andò in tutt'altra direzione: basandosi sulla grande messe di osservazioni di Tycho Brahe, e sul modello copernicano del sistema solare, egli riuscì in primo luogo a scoprire la forma ellittica delle orbite, poi le altre due leggi. In particolare la terza legge stabiliva una connessione fra due classi di grandezze fino allora del tutto separate: da un lato i periodi dei moti, dall'altro le dimensioni delle orbite.

È invece dovuta a Newton la dimostrazione che le leggi di Keplero si deducono dai principi della meccanica e dalla legge di gravitazione.

Il caso iperbolico e quello parabolico

Occorre tornare brevemente su questi casi per precisare alcuni punti. In primo luogo nel caso iperbolico la traiettoria non può mai essere l'intera iperbole, che consiste di due rami sconnessi. Se la forza è attrattiva, verrà percorso il ramo che è concavo verso il centro della forza (si ricordi la relazione fra accelerazione e curvatura della traiettoria): fig. 31–3.

Tutte le equazioni che abbiamo scritto valgono anche se la forza è repulsiva (cariche elettriche dello stesso segno); occorre al più correggere qualche segno, ma non cambia la sostanza dei risultati. Un fatto essenziale è che in questo caso l'energia potenziale è positiva, e perciò anche l'energia totale deve avere lo stesso segno; si vede poi che stavolta esiste un *distanza minima*, ma non una massima. La traiettoria è ancora un ramo d'iperbole, ma si tratta del ramo convesso (fig. 31–4).

Quanto al caso parabolico (che è possibile solo con forza attrattiva, e si presenta con buona approssimazione per certe comete) è interessante calcolare la velocità al perielio. Dalla (31–2), per $E = 0$ si ha subito

$$v_\mathrm{p} = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{r_\mathrm{p}}}.$$

Questa si chiama *velocità parabolica*, e si vede che a parità di distanza è maggiore per un fattore $\sqrt{2}$ della velocità circolare. A titolo di esempio, nel caso della Terra e per distanza pari al raggio terrestre si ha

$$v_\mathrm{c} = 7.9 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}, \qquad v_\mathrm{p} = 1.12 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s}.$$

32. Il problema dei due corpi

Abbiamo visto nel Cap. 31 che i dati di osservazione sul sistema solare richiedono — almeno in alcuni casi — di migliorare l'approssimazione fatta, consistente nel supporre la massa del Sole molto maggiore di quella dei pianeti. Abbiamo anche accennato che una situazione analoga si presenta nell'atomo d'idrogeno. Dedicheremo questo capitolo a una generalizzazione del problema, che formuliamo come segue:

Studiare il moto di un sistema di due punti materiali, soggetti soltanto alle forze che ciascuno esercita sull'altro.

Questo è il "problema dei due corpi"; è il più semplice esempio di sistema *isolato*, sul quale non agiscono forze *esterne*, ma soltanto *interne*.

Notazioni

In fig. 32–1 è rappresentata la situazione, e sono definite le notazioni: le masse dei due punti materiali sono indicate con m_1, m_2; la forza che m_1 esercita su m_2 è $\vec{F}_2$ e la reciproca è $\vec{F}_1$. Assunto un riferimento inerziale, e scelto in esso un punto fisso O, le posizioni dei due punti sono descritte dai vettori $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, mentre con $\vec{r}$ è indicato il vettore che unisce m_1 a m_2, e che coincide con $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Il punto G verrà definito tra poco.

A differenza che nella dinamica del singolo punto materiale, qui (come in tutta la dinamica dei sistemi) gioca un ruolo essenziale il 3° principio: esso ci dice che sarà sempre

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \tag{32–1}$$

ma non solo; le due forze debbono essere entrambe dirette come $\vec{r}$, cosa che non è implicita nella (32–1).

Le equazioni del moto

Partiamo scrivendo la seconda legge della dinamica per entrambi i punti:

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1 \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_2. \end{aligned} \tag{32–2}$$

Da queste possiamo trarre numerose conseguenze importanti. Iniziamo sommando termine a termine le due equazioni:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

grazie alla (32–1). Poiché $\vec{a}_1 = d\vec{v}_1/dt$, ecc. si ha subito

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{cost.}$$

e se poniamo

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

(quantità di moto totale del sistema) vediamo che abbiamo trovato una prima costante del moto:

$$\vec{P} = \text{cost.} \tag{32–3}$$

Alla (32–3) si poteva arrivare anche scrivendo le (32–1) nella forma di Newton

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_1 \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_2 \end{aligned} \tag{32–4}$$

e sommando queste. Osserviamo che le (32–4) valgono anche nella meccanica relativistica, e perciò lo stesso si può dire della (32–3).
Nota: In realtà occorre riflettere sulla validità relativistica del 3° principio, ma ora non possiamo affrontare l'argomento.

La quantità di moto del sistema $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ è la derivata rispetto al tempo di $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$: possiamo dunque scrivere

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{P}\,t + \text{cost.} \tag{32–5}$$

Conviene esprimere questa introducendo un'altra definizione:

$$\vec{r}_\text{G} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{32–6}$$

Il vettore $\vec{r}_\text{G}$ così introdotto individua un punto G, che si chiama *baricentro* oppure *centro di massa* del sistema, e ha grande importanza nella dinamica dei sistemi. Per ora osserviamo soltanto che la (32–5) diventa

$$\vec{r}_\text{G} = \frac{\vec{P}}{M}\,t + \text{cost.} \tag{32–7}$$

dove abbiamo usato l'abbreviazione $M = m_1 + m_2$ (massa totale del sistema).

La (32–7) contiene due risultati distinti:

– Il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.
– La quantità di moto totale si può scrivere $\vec{P} = M\vec{v}_\text{G}$, cioè la stessa che si avrebbe se il sistema si riducesse a un solo punto materiale che abbia la massa totale e si muova alla velocità del centro di massa.

Il momento angolare

Definiremo il momento angolare totale del nostro sistema nella maniera più naturale:

$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2. \tag{32–8}$$

Dimostriamo subito che anche $\vec{L}$ è una costante del moto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \vec{v}_2 \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

perché il primo e il terzo termine sono nulli ($\vec{v} \parallel \vec{p}$). Proseguendo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 = 0$$

perché $\vec{F}_2$ è parallela a $\vec{r}$.

Osserviamo che qui entra in modo decisivo l'enunciato completo del 3° principio: si vede quindi che la conservazione della quantità di moto *non equivale da sola* al 3° principio. Infatti se valesse la (32–1), ma le forze non fossero dirette come $\vec{r}$, la quantità di moto sarebbe ancora costante, il momento angolare no.

L'energia

Per arrivare alla conservazione dell'energia, a differenza di quanto abbiamo fatto fin qui, dovremo aggiungere un'altra ipotesi, in stretta corrispondenza con quello che succede per il singolo punto materiale. Cominciamo col definire l'energia cinetica:

$$T \overset{\text{def}}{=} T_1 + T_2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2, \tag{32–9}$$

e studiamone la variazione. Ricordando la (26–7) abbiamo

$$dT = dT_1 + dT_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_2 \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}.$$

Possiamo esprimere questo risultato in parole:

- La variazione dell'energia cinetica del sistema è uguale al lavoro delle forze (che sono soltanto interne, poiché il sistema è isolato)
- Il lavoro delle forze interne dipende solo dallo spostamento relativo dei due corpi.

Se le forze dipendono solo dalla distanza (forze centrali) esiste, come già visto, un'energia potenziale $V(r)$, tale che

$$dV = -\vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \tag{32–10}$$

e di conseguenza, posto $E = T + V$, si vede che $dE = 0$, ossia che E è una costante del moto.

Osservazione: Non ci si deve meravigliare che nella (32–10) sembri avere un ruolo privilegiato il punto 2: in realtà ciò dipende solo dalla convenzione che abbiamo adottata nel definire $\vec{r}$. Se si orientasse $\vec{r}$ da 2 verso 1, nella (32–10) comparirebbe $\vec{F}_1$, che è opposta a $\vec{F}_2$, e il risultato non cambierebbe.

Poniamoci ora una domanda: a chi "appartiene" l'energia potenziale? Nel caso di un singolo punto riesce spontaneo usare espressioni come "il corpo *possiede* un'energia potenziale ..."; si potrebbe perciò credere che nel sistema di due corpi si debba attribuire l'energia potenziale parte a uno e parte all'altro. Ma non esiste nessun modo sensato di fare questa ripartizione: l'energia potenziale dipende dalla distanza dei due corpi, e non è scindibile. Si può solo dire che *il sistema* possiede tale energia, che del resto esiste a causa dell'interazione fra i due corpi.

Ciò non toglie che in casi particolari si possa ammettere un modo di esprimersi a rigore scorretto: ad es. per un sasso che cade nel campo gravitazionale della Terra, dovremmo parlare di energia potenziale del sistema Terra–sasso; ma dal momento che è solo il sasso a muoversi (data l'enorme disparità delle masse) è ragionevole dimenticare che anche la Terra fa parte del sistema. È ovvio che non si potrebbe accettare lo stesso discorso nello studio del sistema Terra–Luna; e meno ancora per una stella doppia o per un nucleo, dove le masse dei componenti sono confrontabili.

Il moto relativo

Fino a questo punto abbiamo scoperto alcune costanti del moto, ma non abbiamo appreso nulla che ci aiuti a risolvere il problema da cui eravamo partiti: in effetti questo richiede che si prenda in esame il *moto relativo* dei due corpi. Dobbiamo dunque cercare un'equazione per il vettore $\vec{r}$. Ci si arriva subito dividendo le (32–2) per le masse, e sottraendo:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_2}\vec{F}_2 - \frac{1}{m_1}\vec{F}_1 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)\vec{F}_2$$

che scriveremo

$$\mu\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_2 \tag{32–11}$$

avendo definito

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Questa μ si chiama *massa ridotta* del sistema.

La (32–11) risolve il nostro problema: il moto relativo è uguale a quello di un corpo di massa μ, sul quale agisca, per effetto di un corpo fisso, la forza $\vec{F}_2$. *Osservazione*: Anche in questo caso la comparsa di $\vec{F}_2$ è dovuta all'orientamento di $\vec{r}$, e non ha altro significato.

A proposito della massa ridotta è bene rilevare alcune proprietà e casi particolari:

– μ è sempre minore di entrambe le masse
– se $m_1 = m_2$ la massa ridotta vale $m_1/2$ (es. la molecola di azoto)
– se $m_1 \to \infty$, si ha $\mu \to m_2$.

La terza proprietà dimostra che nel caso $m_1 \gg m_2$ ci si riconduce al moto di un singolo punto attorno a un centro di forza fisso, come avevamo fatto nel Cap. 31.

Correzione alla terza legge di Keplero

In base alla (32–11) si vede che la (31–1) va così modificata:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{\mu r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{G(M+m)}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r},$$

il che è quanto dire che la costante di Gauss va scritta $k = \sqrt{G(M+m)}$.

Dunque la costante di Gauss *dipende* dal pianeta, e lo stesso accadrà per il rapporto $T/a^{3/2}$: la terza legge di Keplero non è più esattamente valida. Al crescere della massa del pianeta, k aumenta e perciò il periodo sarà minore di quello previsto dalla terza legge. Ad es. nel caso di Giove, essendo $m/M = 0.000954$ troviamo

$$k_{\mathrm{G}} = k_0\sqrt{1+\frac{m}{M}} = 1.000477\,k_0,$$

avendo indicato con k_0 il valore $\sqrt{GM}$, che corrisponde a un pianeta di massa trascurabile. Dalla tabella a pag. 31–5 si vede che lo scarto relativo è 0.00048, in ottimo accordo col nostro calcolo.

Il centro di massa

Abbiamo già introdotto la definizione del punto G, ma non abbiamo giustificato perché nella fig. 32–1 esso sia stato disegnato sul segmento che unisce le due masse. La dimostrazione di questa proprietà verrà come conseguenza di un calcolo che stiamo per fare, e che ha un altro scopo: esprimere i due vettori $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ tramite $\vec{r}_{\mathrm{G}}$ e $\vec{r}$.

Partiamo dalla (32–6) e dalla definizione di $\vec{r}$, che riscriviamo qui sotto per comodità:

$$\begin{aligned} M\,\vec{r}_{\mathrm{G}} &= m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \end{aligned}$$

Moltiplicando la seconda per m_2 e sottraendo si elimina $\vec{r}_2$, mentre moltiplicandola per m_1 e sommando si elimina $\vec{r}_1$. I risultati sono:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_{\mathrm{G}} - \frac{m_2}{M}\,\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{\mathrm{G}} + \frac{m_1}{M}\,\vec{r}. \end{aligned} \tag{32–12}$$

Le (32–12) mostrano che si arriva in m_1 andando da O in G, e poi spostandosi in direzione di $\vec{r}$, ma in verso opposto, di un tratto $m_2\,r/M$; analogamente per andare in m_2, salvo che lo spostamento sarà concorde a $\vec{r}$, e di lunghezza $m_1\,r/M$.

Ciò dimostra non solo che G è interno al segmento $m_1 m_2$, ma che divide questo segmento in parti inversamente proporzionali alle due masse.

Ma la ragione principale per scrivere le (32–12) è di usarle per trasformare le espressioni del momento angolare e dell'energia cinetica. Sostituiamo nella (32–8) in luogo di $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ le (32–12), e in luogo di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_\mathrm{G} - \frac{m_2}{M}\,\vec{v} \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_\mathrm{G} + \frac{m_1}{M}\,\vec{v}. \end{aligned} \tag{32–13}$$

Si trova:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m_1\,\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \\ &= m_1\Bigl(\vec{r}_\mathrm{G} - \frac{m_2}{M}\,\vec{r}\Bigr) \times \Bigl(\vec{v}_\mathrm{G} - \frac{m_2}{M}\,\vec{v}\Bigr) + m_2\Bigl(\vec{r}_\mathrm{G} + \frac{m_1}{M}\,\vec{r}\Bigr) \times \Bigl(\vec{v}_\mathrm{G} + \frac{m_1}{M}\,\vec{v}\Bigr) \\ &= M\,\vec{r}_\mathrm{G} \times \vec{v}_\mathrm{G} + \mu\,\vec{r} \times \vec{v} \\ &= \vec{L}_\mathrm{G} + \vec{S}. \end{aligned} \tag{32–14}$$

La (32–14) c'insegna che il momento angolare totale del sistema può essere visto non solo come la somma dei momenti angolari dei due corpi (che è la sua definizione) ma anche come somma di due altre grandezze:

– il momento angolare che spetterebbe al centro di massa, se esso fosse un punto materiale dotato dell'intera massa del sistema
– il "momento angolare del moto relativo," calcolato come quello di un punto materiale di massa μ e il cui moto sia descritto dal vettore $\vec{r}$.

La ragione per cui tale decomposizione è utile, è che *tanto $\vec{L}_\mathrm{G}$ quanto $\vec{S}$ sono separatamente costanti del moto.* Questo è evidente per $\vec{L}_\mathrm{G}$ se si ricorda la (32–7); di conseguenza, dato che è costante $\vec{L}_\mathrm{G} + \vec{S}$, lo è anche $\vec{S}$.

È anche importante osservare che in situazioni più generali (in presenza di forze esterne) può benissimo accadere che uno dei due momenti angolari sia ancora costante, e l'altro no: ma su questo torneremo.

In maniera perfettamente analoga si conduce il calcolo per l'energia cinetica: dalla (32–9) e dalle (32–13)

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m_1 \left|\vec{v}_\mathrm{G} - \frac{m_2}{M}\,\vec{v}\right|^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left|\vec{v}_\mathrm{G} + \frac{m_1}{M}\,\vec{v}\right|^2 \\ &= \tfrac{1}{2} M v_\mathrm{G}^2 + \tfrac{1}{2}\mu v^2. \end{aligned} \tag{32–15}$$

L'interpretazione è la stessa vista per il momento angolare: possiamo separare l'energia cinetica totale in una parte dovuta al moto del baricentro, e una dovuta al moto relativo.

Osserviamo che il primo termine della (32–15) è ovviamente costante, dato che è costante $\vec{v}_{\mathrm{G}}$; invece non c'è nessun motivo che lo sia il secondo. Se però le forze interne sono conservative sarà costante

$$E_{\mathrm{int}} = \tfrac{1}{2}\mu v^2 + V, \tag{32–16}$$

che possiamo chiamare "energia interna" o "energia del moto relativo."

L'effetto isotopico

Vogliamo descrivere ora un'applicazione relativamente recente della massa ridotta: la scoperta del deuterio. Abbiamo già visto, nel Cap. 22, l'espressione dei livelli energetici dell'atomo d'idrogeno:

$$E_n = -\frac{m_{\mathrm{e}} e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad \text{(unità CGS).} \tag{32–17}$$

Ora possiamo anche spiegare sommariamente come si può arrivare a questa formula. Basta calcolare, per un atomo d'idrogeno, e supponendo fermo il protone, l'energia delle orbite circolari in funzione di L, e poi assumere, con Bohr, che il momento angolare possa assumere solo valori "quantizzati": $L = n\hbar$. Si ottiene esattamente la (32–17).

Però abbiamo supposto il protone fermo, il che non è corretto: ora sappiamo che per tener conto del moto del protone basterà sostituire a m_{e}, nella (32–17), la massa ridotta del sistema elettrone–protone, che è leggermente più piccola della massa dell'elettrone: ne risulteranno energie tutte un po' minori in valore assoluto.

Quelle che si ottengono in questo modo sono le possibili "energie interne" dell'atomo: sono proprio queste energie (o meglio le loro differenze) che si misurano indirettamente attraverso le frequenze delle righe spettrali. Da quanto abbiamo detto per le energie, si capisce che anche le frequenze saranno minori di quelle calcolate trascurando il moto del protone; la differenza, sebbene sia all'incirca di $5 \cdot 10^{-4}$, è chiaramente visibile con le tecniche spettroscopiche.

Non solo: sappiamo oggi che molti nuclei posseggono *isotopi*, che sono altri nuclei di uguale carica (ugual numero di protoni) e diversa massa (diverso numero di neutroni). Ciò accade anche per il nucleo dell'idrogeno, che si presenta in tre varianti, delle quali qui interessano le prime due: il protone e il deutone. Quest'ultimo consiste di un protone e un neutrone, legati dalle forze nucleari, e ha una massa all'incirca doppia del protone. Un atomo d'idrogeno che abbia un deutone al posto del protone si chiama "deuterio": ha le stesse proprietà chimiche, per cui si presenta associato all'idrogeno "leggero," sia nell'elemento puro, sia nei composti, a cominciare dall'acqua (acqua "pesante").

Perciò quando si osserva lo spettro dell'idrogeno ci si deve aspettare di aver a che fare con una miscela in cui è presente anche deuterio: quale sarà il comportamento di quest'ultimo? La differenza è soltanto nella massa del nucleo, che si traduce in una diversa (maggiore) massa ridotta del sistema elettrone–nucleo. Maggiore massa significa maggiore energia (per la (32–17)) e quindi frequenze più alte delle righe spettrali.

È proprio in questo modo che il deuterio è stato scoperto (Urey, 1932): nello spettro dell'idrogeno si videro delle righe a frequenze leggermente più alte ($\sim 2 \cdot 10^{-4}$), che furono correttamente interpretate come un "effetto isotopico": dagli scostamenti delle frequenze fu anche possibile calcolare la massa del nuovo isotopo.

33. La dinamica dei sistemi

In questo capitolo generalizzeremo i concetti introdotti nel cap. precedente. La generalizzazione sarà in due direzioni:

- li applicheremo a sistemi composti di un numero qualsiasi di punti materiali
- ci occuperemo anche di sistemi *non isolati*, ossia soggetti a forze esterne.

Sotto la dinamica dei sistemi rientrano così gli oggetti fisici più diversi: il sistema solare oppure un atomo; un'automobile, un sasso o una molecola. Questo studio ci permetterà di comprendere meglio perché, e in che senso, lo schema del punto materiale sia adatto in numerose situazioni a rappresentare sistemi anche complessi.

Si noti che ciò è necessario, tra l'altro, per ragioni di coerenza interna: noi studieremo un sistema qualsivoglia come un insieme di punti materiali, ma sappiamo che in realtà — se si va abbastanza nei dettagli — nessun oggetto fisico è davvero un punto materiale. Se dunque non avessimo modo di sapere quando, e in che misura, lo schema del punto materiale descrive correttamente i fatti, potremmo temere che tutta la costruzione sia priva di agganci con la realtà…

Notazioni

Fissiamo anzitutto le notazioni (fig. 33–1). I punti materiali che costituiscono il sistema verranno contraddistinti con indici $i, j \ldots$ che potranno assumere i valori da 1 a n (numero dei punti). Preso un riferimento inerziale, e in esso un punto fisso O, indicheremo per ciascun punto

- con m_i la massa
- con $\vec{r}_i$ la posizione, con $\vec{v}_i$ la velocità, ecc.
- con $\vec{F}_i$ la *forza esterna* ad esso applicata (la somma vettoriale, se sono più d'una *sullo stesso punto*).

Ancora, per ogni coppia (i, j) di punti porremo

$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ il vettore della *posizione relativa*

$\vec{f}_{ij}$ la *forza interna* che il punto i esercita sul punto j.

Il 3° principio ci assicura che sarà sempre $\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0$, e che entrambe le forze sono dirette come $\vec{r}_{ij}$.

La prima equazione cardinale

È immediato scrivere il 2° principio per ciascun punto:

$$m_i \, \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji} \qquad (i = 1 \ldots n). \tag{33–1}$$

Una prima conseguenza delle (33–1) si ottiene sommandole tutte:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}. \tag{33–2}$$

La somma a primo membro è la derivata rispetto al tempo della *quantità di moto totale* del sistema:

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \vec{v}_i,$$

mentre il primo termine a secondo membro è la *risultante delle forze esterne*:

$$\vec{R} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \vec{F}_i.$$

Quanto al secondo termine, si tratta della somma, fatta su tutti i punti, della somma delle forze interne agenti su ciascuno: in altre parole, abbiamo scritto la *risultante delle forze interne*. Ma in questa somma compaiono (ciascuna una sola volta) tutte le coppie $\vec{f}_{ij}$ e $\vec{f}_{ji}$, la cui somma è nulla per il 3° principio. Abbiamo dunque dimostrato:

a) che la risultante delle forze interne è identicamente nulla (grazie al 3° principio)

b) che vale la *prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi*:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{R}. \tag{33–3}$$

In parole: la variazione della quantità di moto totale del sistema dipende soltanto dalla risultante delle forze *esterne*. In particolare, se $\vec{R} = 0$, la quantità di moto si conserva.

Osservazione: Si noti che per la conservazione della quantità di moto *non occorre* che il sistema sia isolato: un esempio è una palla che rotola su di un piano orizzontale, in assenza di attrito (fig. 33–2).

Il centro di massa

La definizione di centro di massa ricalca quella data per il sistema di due soli punti materiali:

$$\vec{r}_{\mathrm{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \tag{33–4}$$

Abbrevieremo la massa totale con $\mathcal{M}$; dalla (33–4) si ricava subito, derivando rispetto al tempo,

$$\vec{P} = \mathcal{M}\, \vec{v}_{\mathrm{G}} \tag{33–5}$$

e la (33–3) si può scrivere

$$\mathcal{M}\, \vec{a}_{\mathrm{G}} = \vec{R}. \tag{33–6}$$

Questo è il
Teorema del baricentro: *Il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale avente la massa totale del sistema, e sul quale agisca la risultante delle forze esterne.*

Un'applicazione interessante del teorema del baricentro si ha se le forze esterne si riducono alla forza peso (in campo gravitazionale uniforme): $\vec{F}_i = m_i\,\vec{g}$, da cui $\vec{R} = \mathcal{M}\,\vec{g}$. Dunque il centro di massa si muove su di una semplice traiettoria parabolica, come se fosse un singolo punto di massa $\mathcal{M}$, qualunque cosa accada all'interno del sistema.

Esempio: Pensiamo a un missile che esplode in volo (fig. 33–3): i frammenti del missile si disperderanno in varie direzioni, ma se si trascura la resistenza dell'aria il centro di massa del missile prima dell'esplosione, e quello dei frammenti dopo l'esplosione, percorreranno la stessa parabola, come se l'esplosione non ci fosse stata. (Finché uno dei frammenti non tocca terra: perché?)

Problema: Si potrà fare lo stesso discorso per un satellite in orbita attorno alla Terra?

Il momento angolare e la seconda equazione cardinale

La definizione è la solita:

$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i\,\vec{r}_i \times \vec{v}_i. \tag{33–7}$$

Calcoliamo $\dot{\vec{L}}$:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i m_i\,\vec{v}_i \times \vec{v}_i + \sum_i m_i\,\vec{r}_i \times \vec{a}_i.$$

Il primo termine a secondo membro è nullo; nel secondo sostituiamo le (33–1):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \sum_i \vec{r}_i \times \Bigl(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ji}\Bigr)\\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}.\end{aligned}$$

Per un qualunque vettore $\vec{w}_i$, associato all'i-mo punto materiale, l'espressione $\vec{r}_i \times \vec{w}_i$ si chiama *momento di $\vec{w}_i$ rispetto al polo* O. Allora il primo termine a secondo membro è la somma dei momenti delle forze esterne, e si chiama *momento risultante delle forze esterne*: lo indicheremo con $\vec{M}$. Quanto al secondo termine, che sarebbe il momento risultante delle forze interne, dimostreremo ora che è sempre nullo.

Dovendo calcolare la somma dei momenti delle forze interne, consideriamole a coppie ($\vec{f}_{ij}$ con $\vec{f}_{ji}$, fig. 33–4):

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ji} = \vec{r}_{ji} \times \vec{f}_{ji} = 0.$$

Nel primo passaggio abbiamo usato il 3° principio (azione e reazione sono opposte) e nel quarto l'abbiamo usato di nuovo (entrambe sono dirette come $\vec r_{ji}$).

Abbiamo dunque dimostrato:

a) che il momento risultante delle forze interne è identicamente nullo (grazie al 3° principio)

b) che vale la *seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi*:

$$\dot{\vec L} = \vec M. \tag{33–8}$$

In parole: la variazione del momento angolare totale del sistema dipende soltanto dal momento risultante delle forze *esterne*. In particolare, se $\vec M = 0$, il momento angolare si conserva.

Osservazione 1: Anche per la conservazione del momento angolare *non occorre* che il sistema sia isolato: come esempio possiamo dare la solita palla che rotola su di un piano orizzontale. Si vede infatti che le forze esterne non hanno soltanto risultante nulla, ma anche momento risultante nullo, rispetto a qualunque punto fisso. Ma su questo argomento dovremo andare un po' più a fondo.

Osservazione 2: Il momento risultante delle forze esterne ha un'espressione semplice se si tratta di forze di gravità in campo uniforme. Abbiamo infatti:

$$\vec M = \sum_i \vec r_i \times (m_i\,\vec g) = \Bigl(\sum_i m_i\,\vec r_i\Bigr) \times \vec g = \mathcal{M}\,\vec r_{\mathrm{G}} \times \vec g,$$

che è lo stesso risultato che avremmo se ci fosse un solo punto materiale, situato in G, e di massa $\mathcal{M}$.

Il teorema delle forze vive

Tanto per cambiare, definiremo l'energia cinetica totale del sistema:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i T_i = \tfrac12 \sum_i m_i\,v_i^2.$$

Per la sua variazione abbiamo:

$$\begin{aligned} dT &= \sum_i dT_i = \sum_i \Bigl(\vec F_i + \sum_{j\neq i} \vec f_{ji}\Bigr)\cdot d\vec r_i \\ &= \sum_i \vec F_i\cdot d\vec r_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec f_{ji}\cdot d\vec r_i. \end{aligned} \tag{33–9}$$

Il primo termine è il lavoro delle forze esterne; quanto al secondo — che è il lavoro delle forze interne — possiamo trasformarlo osservando che la somma è fatta su tutte le coppie *ordinate*, e ciò equivale a sommare sulle coppie *non ordinate* se poi teniamo conto dei due ordinamenti possibili di ciascuna coppia:

$$\sum_i \sum_{j<i} \left(\vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_j\right) = \sum_i \sum_{j<i} \left(\vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i - \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j\right) = \sum_i \sum_{j<i} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji}.$$

Riscriviamo dunque la (33–9) come segue:

$$dT = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \sum_{j<i} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji}. \qquad (33\text{–}10)$$

che ci dice anzitutto che *la variazione dell'energia cinetica è data dalla somma del lavoro delle forze esterne e di quello delle forze interne* (teorema delle forze vive). In termini finiti:

$$\Delta T = \mathcal{L}_{\text{est}} + \mathcal{L}_{\text{int}}.$$

Ci sono però altri commenti da fare:

1. A differenza di $\vec{P}$ e di $\vec{L}$, la variazione di T dipende *anche dalle forze interne*, che possono benissimo fare lavoro. (Vedremo più avanti un caso importante in cui il lavoro delle forze interne è certamente nullo.)
2. In generale il lavoro delle forze esterne *non dipende solo dalla risultante* delle forze (anche qui, a meno di casi particolari che vedremo).

Forze conservative

Può accadere che le forze esterne, oppure quelle interne, o entrambe, siano conservative: in tal caso il lavoro si esprimerà come variazione (cambiata di segno) della corrispondente energia potenziale:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -dV_{\text{est}}$$
$$\sum_i \sum_{j<i} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji} = -dV_{\text{int}}.$$

Per quanto riguarda le forze interne, se sono conservative la loro energia potenziale — come abbiamo visto nel caso di due corpi — dipenderà solo dalle distanze. Per le forze esterne non si può dire molto di utile in generale, mentre un caso semplice è quello di un campo gravitazionale uniforme: se $\vec{F}_i = m_i\,\vec{g}$, avremo

$$dV_{\text{est}} = -\sum_i m_i\,\vec{g} \cdot d\vec{r}_i = -\vec{g} \cdot \sum_i m_i\,d\vec{r}_i = -\mathcal{M}\,\vec{g} \cdot d\vec{r}_{\text{G}}$$

e quindi

$$V_{\text{est}} = -\mathcal{M}\,\vec{g} \cdot \vec{r}_{\text{G}}.$$

L'energia potenziale è la stessa di un unico punto materiale, coincidente col baricentro, e di massa uguale alla massa totale del sistema. Tra l'altro, questo spiega il termine "baricentro," ossia "centro dei pesi": quando la forza esterna è il peso, tutto (non solo risultante, ma anche momento ed energia potenziale) va come se il peso fosse applicato nel baricentro. Del resto, abbiamo già ripetutamente fatto uso di questa proprietà senza darne giustificazione, ma su base puramente intuitiva.

Il riferimento del centro di massa

Per motivi che vedremo fra poco, riescono utili le posizioni:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_\mathrm{G} + \vec{r}_i^{\,\prime} \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_\mathrm{G} + \vec{v}_i^{\,\prime}. \end{aligned} \tag{33–11}$$

L'interpretazione delle (33–11) è la seguente.

Introduciamo, accanto al riferimento inerziale K, usato finora, un secondo riferimento K$'$, che chiameremo *riferimento del centro di massa*, così scelto:

a) K$'$ si muove rispetto a K di moto *traslatorio*

b) il centro di massa del sistema è in quiete rispetto a K$'$.

Allora se prendiamo il punto G come origine delle posizioni in K$'$, vediamo che $\vec{r}_i^{\,\prime}$ è la posizione dell'i-mo punto in K$'$, e $\vec{v}_i^{\,\prime}$ la sua velocità; le chiameremo perciò rispettivamente posizione e velocità *relative al centro di massa*, oppure *nel riferimento del centro di massa.*

Osservazione: In genere il riferimento del centro di massa non sarà inerziale: questo accade sse $\vec{a}_\mathrm{G} = 0$, ossia sse $\vec{R} = 0$.

Dalla prima delle (33–11) si ricava subito, moltiplicando per m_i e sommando:

$$\sum_i m_i\, \vec{r}_i = \mathcal{M}\, \vec{r}_\mathrm{G} + \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime}$$

e quindi

$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime} = 0. \tag{33–12}$$

Allo stesso modo, dalla seconda si ottiene:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,\prime} = 0. \tag{33–13}$$

La (33–13) esprime una proprietà fondamentale del riferimento del centro di massa: in questo riferimento *la quantità di moto totale del sistema si annulla.* Si potrebbe usare questa al posto della *b*) nella definizione di K$'$, col vantaggio di ottenere una definizione valida anche in meccanica relativistica.

Decomposizione del momento angolare

Introduciamo le (33–11) nella definizione di $\vec{L}$:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i\,(\vec{r}_{\mathrm{G}} + \vec{r}_i{}') \times (\vec{v}_{\mathrm{G}} + \vec{v}_i{}') \\ &= \mathcal{M}\,\vec{r}_{\mathrm{G}} \times \vec{v}_{\mathrm{G}} + \sum_i m_i\,\vec{r}_{\mathrm{G}} \times \vec{v}_i{}' + \sum_i m_i\,\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_{\mathrm{G}} + \sum_i m_i\,\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'.\end{aligned}$$

Il secondo e il terzo termine sono nulli per le (33–13) e (33–12), e si ha:

$$\vec{L} = \mathcal{M}\,\vec{r}_{\mathrm{G}} \times \vec{v}_{\mathrm{G}} + \sum_i m_i\,\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}' = \vec{L}_{\mathrm{G}} + \vec{S},$$

avendo introdotto i due vettori $\vec{L}_{\mathrm{G}}$ e $\vec{S}$, che chiameremo rispettivamente momento angolare *del centro di massa* e momento angolare *relativo al centro di massa*, per ragioni evidenti.

Infatti $\vec{L}_{\mathrm{G}}$ è il momento angolare che avrebbe un punto materiale che avesse la massa totale del sistema, e occupasse la posizione del centro di massa; invece $\vec{S}$ è il momento angolare del sistema nel riferimento del centro di massa.

Osservazione: In realtà $\vec{S}$ può anche essere visto in un altro modo:

$$\vec{S} = \sum_i m_i\,\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}' = \sum_i m_i\,\vec{r}_i{}' \times (\vec{v}_i - \vec{v}_{\mathrm{G}}) = \sum_i m_i\,\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i$$

e quest'ultima espressione rappresenta il momento angolare del sistema nel riferimento K (perché ci sono le $\vec{v}_i$), ma preso *rispetto al polo* G. Abbiamo così dimostrato che *il momento angolare rispetto al polo* G *è lo stesso nei due riferimenti* K *e* K$'$.

Esempio 1: Se lanciamo in aria un corpo di forma e struttura qualsiasi (non è necessario che sia rigido) esso avrà, rispetto a un punto fisso O, momento angolare per due motivi:

a) il suo centro di massa si muove, e perciò in genere $\vec{L}_{\mathrm{G}}$ non è nullo

b) le parti del corpo si muovono rispetto a G (per es. perché il corpo ruota) e perciò neanche $\vec{S}$ è nullo.

Esempio 2: Se in particolare il moto è *traslatorio* esiste solo $\vec{L}_{\mathrm{G}}$.

Esempio 3: Se invece il corpo si muove in modo che G resti fermo (per es. perché vincolato, come una ruota) allora soltanto $\vec{S}$ è diverso da zero.

Che cosa possiamo dire delle variazioni nel tempo di $\vec{L}_{\mathrm{G}}$ e di $\vec{S}$? Calcoliamo

$$\dot{\vec{L}}_{\mathrm{G}} = \mathcal{M}\,\vec{v}_{\mathrm{G}} \times \vec{v}_{\mathrm{G}} + \mathcal{M}\,\vec{r}_{\mathrm{G}} \times \vec{a}_{\mathrm{G}} = \vec{r}_{\mathrm{G}} \times \vec{R}.$$

Quanto a $\vec{S}$, ricordiamo che

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} = \vec{M} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_\mathrm{G} + \vec{r}\,'_i) \times \vec{F}_i \\ &= \vec{r}_\mathrm{G} \times \vec{R} + \sum_i \vec{r}\,'_i \times \vec{F}_i = \dot{\vec{L}}_\mathrm{G} + \vec{M}\,'\end{aligned}$$

e perciò

$$\dot{\vec{S}} = \vec{M}\,', \tag{33–14}$$

dove $\vec{M}\,'$ è il momento risultante delle forze esterne *rispetto al polo* G.

Come al solito, è interessante il caso di forze esterne dovute al peso: allora

$$\vec{M}\,' = \sum_i \vec{r}\,'_i \times (m_i\,\vec{g}) = 0.$$

L'insieme delle forze peso ha momento nullo rispetto al centro di massa, e perciò $\vec{S}$ in questo caso è costante: è ciò che accade nell'esempio 1.

Quello che vale per il peso, vale anche per le forze apparenti che si vedono in un riferimento non inerziale, in moto puramente traslatorio (principio di equivalenza). Ma allora, se passiamo da K a K′ (in generale non inerziale) dovremo sì aggiungere alle forze esterne delle forze apparenti, ma queste avranno momento nullo rispetto a G: ne segue che *la* (33–14) *vale anche in* K′.

Resta solo da spiegare la ragione del simbolo $\vec{S}$ per il momento angolare relativo al centro di massa (anche se a rigore non c'è motivo di giustificare la scelta di un simbolo!) Il fatto è che S è l'iniziale di "spin," parola inglese che significa "rotazione su se stesso." Il termine è entrato in uso universale nella fisica dopo il 1925, quando è stato scoperto che gli elettroni hanno uno "spin," il che vuol dire semplicemente che per un elettrone $\vec{S}$ ha un modulo fissato, e può solo cambiare in direzione. È però necessario avvertire che un'interpretazione corretta dello spin dell'elettrone è del tutto impossibile al di fuori della meccanica quantistica: in particolare, sarebbe fuori strada chi pensasse a un elettrone come a una minuscola pallina che ruota su se stessa... Ovviamente qui non possiamo dire di più. Aggiungiamo solo che spesso il vettore $\vec{S}$ viene chiamato momento angolare "intrinseco," specie con riferimento alle particelle.

La decomposizione dell'energia cinetica

Il discorso potrà ora essere più breve, perché procede sulla stesse linee viste per $\vec{L}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}T &= \tfrac{1}{2} \sum_i m_i\, v_i^2 = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i\, |\vec{v}_\mathrm{G} + \vec{v}\,'_i|^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \mathcal{M}\, v_\mathrm{G}^2 + \sum_i m_i\, \vec{v}_\mathrm{G} \cdot \vec{v}\,'_i + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i\, v'^2_i.\end{aligned}$$

Il secondo termine è nullo, e arriviamo quindi a

$$T = \tfrac{1}{2}\mathcal{M}\, v_{\mathrm{G}}^2 + \tfrac{1}{2}\sum_i m_i\, {v_i'}^2 = T_{\mathrm{G}} + T',$$

la cui interpretazione è la solita: l'energia cinetica del sistema è la somma dell'energia cinetica del centro di massa e di quella *relativa al centro di massa.* Questo risultato si chiama comunemente *teorema di König.*

È interessante calcolare il lavoro delle forze esterne nel riferimento del centro di massa (occorre solo ricordare che dovremo considerare le forze apparenti):

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i' &= \sum_i \Big(\vec{F}_i - m_i\, \vec{a}_{\mathrm{G}}\Big) \cdot d\vec{r}_i' = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i' - \sum_i m_i\, \vec{a}_{\mathrm{G}} \cdot d\vec{r}_i' \\ &= \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i' = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i - \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_{\mathrm{G}} \\ &= \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i - \vec{R} \cdot d\vec{r}_{\mathrm{G}}. \end{aligned} \tag{33–15}$$

D'altra parte, per la variazione di T_{G} abbiamo

$$dT_{\mathrm{G}} = \vec{R} \cdot d\vec{r}_{\mathrm{G}},$$

come si vede dalla sua definizione e dal teorema del baricentro. Ne segue per l'energia cinetica totale, da una parte

$$dT = dT_{\mathrm{G}} + dT' = \vec{R} \cdot d\vec{r}_{\mathrm{G}} + dT' \tag{33–16}$$

e dall'altra

$$dT = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i' + \sum_i \sum_{j<i} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji} \tag{33–17}$$

(che è la (33–10)). Confrontando (33–15), (33–16) e (33–17) si arriva a

$$dT' = \sum_i \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i' + \sum_i \sum_{j<i} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji}$$

che in parole si esprime dicendo che la variazione dell'energia cinetica nel riferimento del centro di massa è uguale al lavoro delle forze esterne (forze apparenti incluse) più quello delle forze interne. Insomma: *anche nel riferimento del centro di massa*, sebbene possa essere non inerziale, *vale il teorema delle forze vive*:

$$\Delta T = \mathcal{L}_{\mathrm{est}}' + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}.$$