

30. Integrazione numerica

Molto spesso un sistema di equazioni differenziali non permette una soluzione analitica, e bisogna ricorrere a “soluzioni numeriche.” Queste sono sempre approssimate, ma in linea di principio l'approssimazione può essere migliorata quanto si vuole.

Un tempo il lavoro richiesto per l'integrazione numerica poteva essere formidabile, e in certi casi impegnava squadre di calcolatori (umani) per interi anni; oggi la disponibilità di calcolatori (elettronici) di potenza e velocità continuamente crescenti ha reso sempre più facile il ricorso a questi metodi, che perciò vengono usati con grande frequenza.

Non bisogna però commettere l'errore di credere che i metodi numerici siano perfetti e infallibili: in quanto metodi approssimati, implicano sempre un errore, ed è perciò importante saperlo valutare, per vedere se sia o no rilevante per gli scopi che ci si propone. Esistono poi situazioni critiche, nelle quali un procedimento numerico può dare risultati del tutto inattendibili. Di qui la regola ovvia, ma spesso trascurata: *è bene imparare a servirsi al massimo dei mezzi di calcolo, ma non bisogna mai affidarsi ad essi ciecamente.*

Per questi motivi, vogliamo dare qui i primissimi elementi della tecnica, allo scopo di mostrarne i pro e i contro in qualche caso particolarmente semplice.

Posizione del problema

Vediamo in dettaglio in che consista il problema che abbiamo di fronte, limitandoci, a titolo di esempio, a un sistema autonomo di due equazioni di primo ordine:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

per il quale supporremo date le condizioni iniziali $x = x_0, y = y_0$ a $t = t_0$.

Si vuole trovare un'approssimazione adeguata all'integrale particolare che soddisfa queste condizioni iniziali. È ovvio che l'esatto significato del termine “adeguata” dipende dal problema: in certi casi una soluzione esatta entro tre cifre significative potrà essere sufficiente, in altri potranno occorrerne dieci o più; sta a noi decidere.

Il metodo di Eulero

Scegliamo un *passo temporale* h , e teniamo presente che

$$x(t+h) = x(t) + h\dot{x}(t) + o(h).$$

Allora, posto $t_k = t_0 + kh$, calcoliamo:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hg(x_k, y_k).\end{aligned} \quad k = 0, 1 \dots \quad (30-1)$$

È intuitivo che le successioni $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ danno un'approssimazione alla soluzione $x(t)$, $y(t)$ calcolata agli istanti t_k ; più esattamente, fissato t_f , e posto $h = (t_f - t_0)/n$ (n intero) avremo che x_n , y_n tendono a $x(t_f)$, $y(t_f)$ se $n \rightarrow \infty$. Si dimostra che se le funzioni f , g sono differenziabili, l'errore finale è $O(1/n)$.

Vediamo l'interpretazione grafica di questo procedimento. In fig. 30-1 è tracciata la curva integrale γ per $P_0(x_0, y_0)$; i vettori hanno per componenti gli incrementi $hf(x_k, y_k)$, $hg(x_k, y_k)$ e si vede che il primo è tangente a γ in P_0 , per cui P_1 non sta su γ ; il secondo è tangente alla curva integrale γ_1 che passa per P_1 , ma P_2 non sta su γ_1 , ecc.

Il metodo descritto si chiama "algoritmo di Eulero," ed è applicabile a un numero qualunque di equazioni differenziali del primo ordine (e perciò di qualsiasi ordine).

Osserviamo che gli errori (detti di *troncamento*) si accumulano: in ciascun passo l'errore è $O(h^2)$, ma la loro somma è $O(h) = O(1/n)$. Riducendo h (ossia aumentando n) l'approssimazione migliora, ma aumenta in proporzione il tempo di calcolo.

Questo non sarebbe un gran problema (basterà ricorrere a un calcolatore più veloce!) ma c'è da tener presente un'altra causa di errori, che ha un'origine del tutto distinta dalla precedente. Tutte le operazioni — anche le semplici somme e moltiplicazioni — che il calcolatore dovrà eseguire per procedere secondo le (30-1) sono di necessità approssimate, perché un calcolatore lavora sempre con numero finito di cifre (errori di *arrotondamento*). Il numero di operazioni cresce proporzionalmente a n , e insieme cresce anche l'errore di arrotondamento finale.

Di conseguenza non è vero in pratica che si possa ottenere un'approssimazione buona quanto si vuole, semplicemente riducendo h : così facendo, si riduce l'errore di troncamento, ma si accresce quello di arrotondamento: può quindi accadere che da un certo punto in poi, al crescere di n , le cose peggiorino, anziché migliorare.

Un esempio

Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \tag{30-2}$$

che abbiamo già incontrato, e di cui conosciamo l'integrale generale. Con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ la soluzione è $x = \sin t$, $y = \cos t$.

Applichiamo il metodo di Eulero:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + hy_k \\ y_{k+1} &= y_k - hx_k. \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots$$

Il calcolo numerico, eseguito con 7 cifre significative nell'intervallo $[0, 2\pi]$, con n crescente, dà il risultato riassunto nella tabella che segue, dove per ogni n abbiamo riportato la distanza δ nel piano (x, y) fra il risultato esatto $(0, 1)$ e quello calcolato:

n	δ
2^6	$3.6 \cdot 10^{-1}$
2^7	$1.7 \cdot 10^{-1}$
2^8	$8.0 \cdot 10^{-2}$
2^9	$3.9 \cdot 10^{-2}$
2^{10}	$1.9 \cdot 10^{-2}$
2^{11}	$9.7 \cdot 10^{-3}$
2^{12}	$4.8 \cdot 10^{-3}$
2^{13}	$2.5 \cdot 10^{-3}$
2^{14}	$1.7 \cdot 10^{-3}$
2^{15}	$2.6 \cdot 10^{-3}$
2^{16}	$4.9 \cdot 10^{-3}$
2^{17}	$9.9 \cdot 10^{-3}$

Come si vede, l'errore dapprima si dimezza raddoppiando n , ma poi ricomincia ad aumentare: il miglior compromesso si raggiunge — in questo caso particolare — per $n = 2^{14}$.

Il metodo delle differenze centrali

Se l'approssimazione ottenibile con l'algoritmo di Eulero non è sufficiente, occorre impiegarne uno che abbia errore di troncamento più piccolo, in modo da non dover aumentare eccessivamente il numero di passi. Questo si può fare in molti modi: qui ci limiteremo al più semplice.

Partiamo come prima:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + hf(x_0, y_0) \\y_1 &= y_0 + hg(x_0, y_0).\end{aligned}$$

ma poi proseguiamo così:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_{k-1} + 2hf(x_k, y_k) \\y_{k+1} &= y_{k-1} + 2hg(x_k, y_k)\end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots$$

L'interpretazione grafica è mostrata in fig. 30-2: l'incremento da P_0 a P_2 ha la direzione della tangente in P_1 , ecc. È intuitivo che lo spostamento della soluzione esatta fra t_0 e t_2 sarà più vicino come direzione alla tangente in P_1 che non alla tangente in P_0 : si può dimostrare infatti che l'errore finale in questo caso è $O(h^2)$. Il risultato è che per una data approssimazione nell'intervallo $[t_0, t_f]$ basta un h più grande, ossia meno passi (e minor tempo di calcolo).

Il metodo ora descritto si chiama “delle differenze centrali,” perché si basa sull’idea che la derivata in t_k , ossia al centro dell’intervallo $[t_{k-1}, t_{k+1}]$, viene approssimata dalla differenza $x_{k+1} - x_{k-1}$ divisa per $2h$.

Di nuovo lo stesso esempio

Riprendiamo il sistema (30-2) e integriamolo col metodo delle differenze centrali. Dovremo calcolare

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + hy_0 \\ y_1 &= y_0 - hx_0\end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_{k-1} + 2hy_k \\ y_{k+1} &= y_{k-1} - 2hx_k\end{aligned} \quad k = 1, 2 \dots$$

Il calcolo numerico, eseguito sempre con 7 cifre significative, ci dà questa volta:

n	δ
2^6	$1.0 \cdot 10^{-2}$
2^7	$2.5 \cdot 10^{-3}$
2^8	$6.2 \cdot 10^{-4}$
2^9	$1.4 \cdot 10^{-4}$
2^{10}	$1.0 \cdot 10^{-6}$
2^{11}	$6.7 \cdot 10^{-5}$
2^{12}	$1.5 \cdot 10^{-4}$
2^{13}	$3.1 \cdot 10^{-4}$
2^{14}	$6.2 \cdot 10^{-4}$
2^{15}	$1.3 \cdot 10^{-3}$
2^{16}	$2.5 \cdot 10^{-3}$
2^{17}	$4.9 \cdot 10^{-3}$

La tabella mostra che per n piccolo l’errore si riduce di un fattore 4 quando n raddoppia, ma a partire da $n = 2^{10}$ torna a crescere. Nel caso migliore l’errore è di tre ordini di grandezza inferiore a quello del metodo di Eulero, e per di più richiede un numero di passi 16 volte minore.

È chiaro che facendo i calcoli con sole 7 cifre anche con metodi più raffinati non potremo ottenere molto di più. Se quindi il nostro problema (come accade ad es. in meccanica celeste) richiedesse 10 o 12 cifre esatte, sarebbe indispensabile usare un calcolatore (o un programma) che assicuri prima di tutto errori di arrotondamento abbastanza piccoli, e poi un tempo di calcolo accettabile.

Problemi di stabilità

Non si deve credere che il metodo delle differenze centrali sia sempre superiore a quello di Eulero: è un esercizio utile, e dal risultato sorprendente, verificare

(numericamente) che cosa succede se lo si applica all'equazione $\dot{x} = -x$, che con $x(0) = 1$ ha la soluzione esatta $x(t) = e^{-t}$.

Si trova che al crescere di t dapprima il calcolo dà una buona approssimazione della soluzione esatta; ma poi x , anziché tendere a zero, comincia a crescere esponenzialmente (in valore assoluto), oscillando fra valori alternativamente positivi e negativi. Quel che è peggio, ciò accade qualunque sia h : ridurre h serve solo a “dilazionare” l’insorgere dell’instabilità. Se invece per la stessa equazione differenziale si usa il metodo di Eulero, l’instabilità non si manifesta.

Abbiamo così mostrato, con un esempio addirittura banale, un altro grave problema dell’integrazione numerica: in certi casi il risultato può divergere in modo esponenziale dalla soluzione esatta. Se e quando questo accada, e quali ne siano le ragioni, non è questione che possiamo qui approfondire: si voleva solo segnalare il fenomeno, per ribadire la regola enunciata all’inizio: *mai affidarsi ciecamente a un calcolo numerico!*

30a. Oscillatori armonici accoppiati

Abbiamo accennato, all'inizio del Cap. 21, che il semplice oscillatore armonico è il prototipo dei sistemi lineari, e abbiamo dato alcuni esempi di sistemi più complessi il cui studio si basa sulle proprietà dell'oscillatore armonico. Vogliamo ora occuparci di una prima generalizzazione, la quale a sua volta ha numerose applicazioni, e mette in evidenza alcuni fenomeni nuovi, che è utile conoscere: quella di *due* oscillatori armonici *accoppiati linearmente*.

Il sistema fisico

Consideriamo due punti materiali, entrambi vincolati a muoversi sulla stessa retta, e soggetti ciascuno a una forza elastica. Fino a questo punto abbiamo due oscillatori armonici *disaccoppiati*. In termini concreti, si potrà trattare di due masse (uguali o diverse) attaccate a due distinte molle (fig. 30a-1). Anche le molle potranno essere uguali o diverse tra loro, quanto a costante elastica.

L'accoppiamento tra i due oscillatori si realizza aggiungendo una terza molla tra le due masse: abbiamo quindi in totale due masse e tre molle (fig. 30a-2). Vogliamo studiare i possibili moti di tale sistema. Supporremo che tutte le molle siano ideali, che non ci siano attriti, ecc.

Converrà discutere separatamente i casi con masse uguali e/o molle uguali, da quelli meno simmetrici, cominciando dal più semplice.

Masse uguali, molle uguali

Indichiamo con m il valore comune delle due masse, con k la costante elastica delle due molle laterali, con q quella della molla centrale (vedremo che non si guadagna niente, anzi si perde qualcosa, a supporre che anche questa molla sia uguale alle altre due). Sia poi l la lunghezza di riposo delle molle esterne, l' quella della molla centrale, L la distanza fra i punti cui sono fissati le molle esterne.

Se X_1 e X_2 sono le ascisse delle due masse, rispetto all'origine O indicata in fig. 30a-2, la forza prodotta dalla molla di sinistra sulla massa 1 vale

$$F_1 = -k(X_1 - l)$$

e quella prodotta dalla molla di destra sulla massa 2

$$F_2 = k(L - X_2 - l).$$

Quanto alla molla centrale, essa produrrà sulla massa 1 la forza

$$F'_1 = q(X_2 - X_1 - l')$$

e sulla massa 2 la forza

$$F_2' = -F_1' = -q(X_2 - X_1 - l').$$

S'intende che tutte le forze indicate hanno segno coerente col verso positivo dell'asse X .

Ne segue per la forza risultante su 1:

$$F_1 + F_1' = -(k + q)X_1 + qX_2 + kl - ql' \quad (30a-1)$$

e per quella su 2:

$$F_2 + F_2' = qX_1 - (k + q)X_2 + k(L - l) + ql'. \quad (30a-2)$$

Dalle (30a-1), (30a-2) si trovano facilmente le posizioni delle masse per le quali entrambe le forze si annullano (posizioni di equilibrio). Non occorre darne le espressioni: ci basta indicarle con X_{10} e X_{20} . Se poi facciamo le sostituzioni

$$X_1 = X_{10} + x_1$$

$$X_2 = X_{20} + x_2$$

le (30a-1), (30a-2) diventano:

$$\begin{aligned} F_1 + F_1' &= -(k + q)x_1 + qx_2 \\ F_2 + F_2' &= qx_1 - (k + q)x_2. \end{aligned} \quad (30a-3)$$

È interessante osservare che dalle (30a-3) sono scomparse l , l' e L : se si prendono come coordinate per le due masse i loro spostamenti dalle posizioni di equilibrio, occorre solo conoscere le costanti delle molle. Questo è un risultato del tutto generale, che semplifica sempre i calcoli quando si ha a che fare con forze che dipendono linearmente dalla posizione dei corpi.

A questo punto non c'è più nessuna difficoltà a scrivere le equazioni del moto per le due masse:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + q(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 + q(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (30a-4)$$

Abbiamo dato alle (30a-4) una forma che ne mette in evidenza la simmetria, e che suggerisce subito di trasformarle al modo seguente.

Se sommiamo e sottraiamo membro a membro le due equazioni troviamo:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) &= -(k + 2q)(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ è lo spostamento del punto medio tra le due masse, mentre $\eta = x_2 - x_1$ è la variazione della loro distanza. Dunque:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= -k\xi \\ m\ddot{\eta} &= -(k + 2q)\eta \end{aligned} \quad (30a-5)$$

cioè il punto di mezzo (che è poi il centro di massa, visto che le masse sono uguali) si muove con un moto armonico di frequenza $\omega = \sqrt{k/m}$, mentre la distanza oscilla (sempre con moto armonico) alla frequenza $\Omega = \sqrt{(k + 2q)/m}$.

Integrale generale e soluzioni particolari

Il sistema (30a-5) equivale a (30a-4), ma è di discussione assai più semplice, perché le due variabili ξ ed η sono *separate*. Per questo motivo si trova immediatamente l'integrale generale

$$\xi = A \sin(\omega t - \varphi), \quad \eta = B \sin(\Omega t - \psi)$$

da cui, introducendo di nuovo x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi - \frac{1}{2}\eta = A \sin(\omega t - \varphi) - \frac{1}{2}B \sin(\Omega t - \psi) \\ x_2 &= \xi + \frac{1}{2}\eta = A \sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}B \sin(\Omega t - \psi). \end{aligned} \quad (30a-6)$$

Le (30a-6) non hanno certo un'espressione semplice, per cui conviene esaminare prima due soluzioni particolari. La prima (che chiameremo soluzione A) si ottiene se $B = 0$:

$$x_1 = x_2 = A \sin(\omega t - \varphi).$$

In questo caso le due masse si muovono insieme (con la stessa ampiezza e la stessa fase): di conseguenza la molla centrale non si allunga né si accorcia, e perciò è come se non ci fosse.

La soluzione B si ottiene invece quando $A = 0$:

$$x_1 = -x_2 = -\frac{1}{2}B \sin(\Omega t - \psi).$$

In questo caso le due masse si muovono sempre con uguale ampiezza, ma in opposizione di fase (il centro di massa rimane fermo). Ora anche la molla centrale produce una forza di richiamo, e questo spiega perché la frequenza risulta maggiore ($\Omega > \omega$).

Osserviamo che tanto la soluzione A quanto la B contengono *due* costanti arbitrarie: è perciò giusto che l'integrale generale (30a-6) risulti dalla loro semplice somma (ricordiamo che le equazioni (30a-4) sono lineari omogenee).

A parte l'evidente simmetria, su cui non insistiamo, perché dipende dall'aver scelto masse e molle uguali, è interessante osservare il fenomeno più caratteristico degli oscillatori accoppiati: mentre in assenza di accoppiamento ciascun

oscillatore si muove di moto armonico, ovviamente con la sua frequenza propria, ora il moto risulta dalla sovrapposizione di *due* moti armonici a frequenze diverse. Inoltre le due frequenze sono tanto più diverse, quanto più è grande q , ossia quanto più è forte l'*interazione* tra i due oscillatori. Una tale situazione trova analogie nei più diversi campi della fisica, anche molto lontani dalle semplici molle di cui ci stiamo occupando: fino allo studio delle interazioni fondamentali. Non è quindi possibile qui dare esempi, ma solo rimarcare che la ragione profonda dell'analogia è una sola: in tutti i casi si ha a che fare con sistemi *lineari accoppiati*.

Una soluzione particolarmente interessante

È utile e importante studiare il moto che risulta con le seguenti condizioni iniziali:

$$x_1(0) = a, \quad \dot{x}_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

In parole: all'istante $t = 0$ le masse sono entrambe ferme, ma la prima è spostata dalla posizione di equilibrio.

È intuitivo che negli istanti immediatamente successivi la massa 1 comincerà a oscillare, e che la massa 2 non potrà restare ferma, perché la molla centrale le applica una forza oscillante, a causa del moto della massa 1; ma che cosa accade col passare del tempo? Non c'è che determinare nella (30a-6) i valori delle costanti arbitrarie che soddisfano alle date condizioni iniziali.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} -A \sin \varphi + \frac{1}{2}B \sin \psi &= a \\ -A \sin \varphi - \frac{1}{2}B \sin \psi &= 0 \\ \omega A \cos \varphi - \frac{1}{2}\Omega B \cos \psi &= 0 \\ \omega A \cos \varphi + \frac{1}{2}\Omega B \cos \psi &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali risulta:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 0 \\ 2A \sin \varphi &= -a \end{aligned} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{1}{2}a$$

$$\begin{aligned} \cos \psi &= 0 \\ B \sin \psi &= a \end{aligned} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}, \quad B = a$$

e da queste infine:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}a (\cos \omega t + \cos \Omega t) \\ x_2 &= \frac{1}{2}a (\cos \omega t - \cos \Omega t) \end{aligned}$$

che si scrivono anche

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \frac{1}{2}(\Omega + \omega) t \cos \frac{1}{2}(\Omega - \omega) t \\ x_2 &= a \sin \frac{1}{2}(\Omega + \omega) t \sin \frac{1}{2}(\Omega - \omega) t. \end{aligned}$$

Si capisce bene quello che succede supponendo $q \ll k$, per cui Ω differisce poco da ω . Se trascurassimo gli ultimi fattori (quelli con la frequenza $(\Omega - \omega)/2$) avremmo che entrambe le masse oscillano con la stessa ampiezza e frequenza, ma con x_2 sfasato di un quarto di periodo in ritardo rispetto a x_1 .

Possiamo poi vedere l'effetto dei fattori che abbiamo tralasciato, come una lenta variazione nell'ampiezza di quelle oscillazioni: nel gergo delle radiocomunicazioni si parla di "modulazione." Poiché la modulazione è col coseno per x_1 , e col seno per x_2 , ne segue che all'inizio l'ampiezza di x_1 è massima e quella di x_2 è nulla; poi la prima decresce e la seconda aumenta, fino al punto che l'ampiezza di x_1 si annulla e quella di x_2 raggiunge il massimo. Dopo di che il ciclo s'inverte. La situazione è rappresentata graficamente in fig. 30a-3.

Le costanti del moto

Dalle (30a-5) si vede, poiché abbiamo a che fare con due oscillatori armonici, che esistono le due corrispondenti costanti del moto che danno le loro energie:

$$\begin{aligned} E_\xi &= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}k\xi^2 \\ E_\eta &= \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}(k + 2q)\eta^2 \end{aligned} \quad (30a-7)$$

e che in generale non ce ne sono altre (basta ripensare a quello che abbiamo detto a proposito dell'oscillatore armonico anisotropo alla fine del Cap. 26).

Per un motivo che sarà chiaro fra poco, conviene ridefinire le (30a-7) moltiplicando la prima e dividendo la seconda per 2:

$$\begin{aligned} E_\xi &= m\dot{\xi}^2 + k\xi^2 \\ E_\eta &= \frac{1}{4}m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{4}(k + 2q)\eta^2. \end{aligned}$$

Esprimendo ξ , η per mezzo di x_1 , x_2 si trova:

$$\begin{aligned} E_\xi &= \frac{1}{4}m(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{4}k(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \\ E_\eta &= \frac{1}{4}m(\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{4}(k + 2q)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (30a-8)$$

Dal momento che E_ξ , E_η sono costanti del moto, lo è qualunque loro funzione; in particolare è interessante la somma

$$E = E_\xi + E_\eta = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}q(x_2 - x_1)^2 \quad (30a-9)$$

che ha un'interpretazione evidente: i primi due termini sono le energie cinetiche delle due masse; i due successivi danno le energie potenziali delle molle esterne, e infine l'ultimo termine è l'energia potenziale della molla intermedia. Dunque E è l'energia totale dell'intero sistema di due masse e tre molle, che naturalmente si conserva.

Si può anche riordinare la (30a-9) come segue:

$$E = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right) + \frac{1}{2}q(x_2 - x_1)^2 = E_1 + E_2 + E_{\text{int}}$$

dove si vede che E_1 è l'energia dell'oscillatore armonico costituito dalla massa 1 con la molla di sinistra, E_2 l'energia di quello composto dalla massa 2 con la molla di destra, ed E_{int} , che è l'energia potenziale della molla centrale, è l'energia d'interazione fra i due oscillatori. Solo la somma di queste tre energie è costante, ma non ciascuna separatamente.

Se $q \ll k$ potremo trascurare E_{int} : allora $E_1 + E_2$ è costante, ma ciò non vuol dire che l'interazione non abbia più effetto: come abbiamo visto le ampiezze dei due oscillatori variano nel tempo, in modo tale che mentre E_1 cresce E_2 diminuisce, e viceversa. Si ha dunque un *trasferimento di energia* fra i due oscillatori, alla frequenza $\Omega - \omega$.

Masse uguali, molle diverse

Se le due molle laterali non sono uguali, pur restando uguali le masse, il problema è più complicato, perché perdiamo una simmetria. Procedendo come nel caso simmetrico si arriva senza difficoltà alle equazioni:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - q(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k_2x_2 - q(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (30a-10)$$

Ora non basta sommare e sottrarre per semplificare le equazioni, ma ci viene ancora una volta in soccorso l'uso dei numeri complessi.

Invece di x_1, x_2 scriviamo z_1, z_2 , e cerchiamo una soluzione della forma

$$z_1 = z_{10} e^{-i\omega t}, \quad z_2 = z_{20} e^{-i\omega t}. \quad (30a-11)$$

Se riusciremo a trovarla, prendendo le parti reali troveremo una x_1 e una x_2 che oscillano con la stessa frequenza, anche se con ampiezze e fasi diverse tra loro. Una soluzione così fatta generalizza le soluzioni A e B trovate nel caso simmetrico.

Per andare avanti basta sostituire le (30a-11) nelle (30a-10); dopo qualche passaggio si arriva a

$$\begin{aligned} (k_1 + q - m\omega^2) z_{10} - qz_{20} &= 0 \\ -qz_{10} + (k_2 + q - m\omega^2) z_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (30a-12)$$

Questo è un sistema di due equazioni lineari omogenee in z_{10}, z_{20} ; avrà in generale solo la soluzione nulla (che ovviamente non serve) a meno che il determinante dei coefficienti non sia zero:

$$(k_1 + q - m\omega^2)(k_2 + q - m\omega^2) - q^2 = 0. \quad (30a-13)$$

Dovremo dunque scegliere ω in modo che la (30a-13) sia soddisfatta, e avremo

$$\omega^2 = \frac{1}{2m} \left(k_1 + k_2 + 2q \pm \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4q^2} \right). \quad (30a-14)$$

Poiché a noi interessa $\omega > 0$, la (30a-14) ci dà sempre due valori distinti per ω (il radicando si annulla solo se $k_1 = k_2$ e $q = 0$, ossia se non c'è interazione). Esistono dunque *due* soluzioni diverse della forma (30a-11), e ciascuna contiene *due* costanti arbitrarie (non quattro, perché il sistema (30a-12) determina z_{20} dato z_{10}). In conclusione, una combinazione lineare di queste due soluzioni ci dà l'integrale generale del sistema (30a-10).

Non è il caso di andare oltre nei calcoli; si può indovinare che anche in questo caso esistono due costanti del moto, che si conserva l'energia totale, che per le energie dei due oscillatori si trova un'oscillazione del tutto simile a quella trovata nel caso simmetrico, ecc.

È invece interessante studiare come le frequenze trovate dipendono dalle costanti delle molle. In primo luogo, se $q = 0$ le frequenze sono $\sqrt{k_1/m}$ e $\sqrt{k_2/m}$, il che è ovvio: ciascuno dei due oscillatori si muove per proprio conto. Le cose sono più complicate per $q \neq 0$, che è del resto il caso significativo.

In fig. 30a-4 abbiamo tracciato il grafico dei due valori di ω^2 in funzione di q , per k_1 e k_2 fissati. Si tratta dei due rami di una stessa iperbole, i cui asintoti hanno equazioni $\omega^2 = (k_1 + k_2)/2m$ e $\omega^2 = (k_1 + k_2 + 4q)/2m$.

Problema: Sapreste spiegare perché quando q è molto grande si ottengono le espressioni che abbiamo scritto per gli asintoti? (Suggerimento: la molla intermedia è molto più "dura" delle altre due, quindi...)

Riassumendo e generalizzando

Resterebbe da studiare il caso generale in cui non solo le molle, ma anche le masse sono diverse. Però a parte i calcoli, che sono un po' più complicati, non si trova niente di nuovo rispetto ai casi già studiati. Infatti le equazioni saranno

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - q(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - q(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

e si tratta sempre di un sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine, lineari e omogenee. Potremo perciò usare la stessa tecnica vista sopra per trovare due frequenze, ecc. ecc.

Riassumiamo ora quello che abbiamo trovato. In un sistema di due oscillatori armonici accoppiati è sempre possibile una trasformazione lineare di coordinate (dalle x a certe ξ) in modo tale che le nuove coordinate obbediscono a equazioni differenziali di oscillatori armonici *indipendenti*, in generale con frequenze diverse ω_i . Se scegliamo le condizioni iniziali in modo che solo una ξ_i e

la corrispondente $\dot{\xi}_i$ siano diverse da zero, tutti gli oscillatori si muovono quindi di moto armonico, con la stessa frequenza ω_i . L'integrale generale del sistema si ottiene per sovrapposizione di questi moti semplici, che si chiamano *modi normali*.

La cosa notevole (che verrà dimostrata in corsi superiori) è che questo risultato vale in generale, *per un numero qualsiasi di oscillatori armonici accoppiati*. Ma abbiamo già visto (Cap. 27) che la legge di forza lineare è la prima approssimazione per il moto attorno a una configurazione di equilibrio stabile; ne segue che *le piccole oscillazioni di qualsiasi sistema fisico possono essere trattate come un sistema di oscillatori armonici accoppiati*, e quindi ridotte a un insieme di modi normali. È questa la ragione — già accennata all'inizio del Cap. 21— per cui l'oscillatore armonico è di così grande importanza in tutta la fisica.

30b. Il comportamento caotico

Nel Cap. 20 abbiamo brevemente descritto il problema della stabilità delle equazioni del moto, e citato il connesso fenomeno del caos deterministico; qui vogliamo tornare sull'argomento per approfondirlo un po', soprattutto per mezzo di qualche esempio.

Stabilità di un sistema di equazioni differenziali

Nella meccanica newtoniana, come sappiamo, il moto di un sistema fisico con n gradi di libertà è descritto da n equazioni differenziali di secondo ordine, o equivalentemente da $2n$ equazioni differenziali del primo ordine. Il moto è completamente determinato una volta che siano assegnate le condizioni iniziali (posizione e velocità) di tutti i punti del sistema. È questo il *determinismo* della meccanica newtoniana.

Nel seguito converrà riferirsi al moto nello spazio delle fasi, che sarà un semplice piano per sistemi con un solo grado di libertà, o avrà un numero maggiore di dimensioni, per sistemi più complicati. Ci limiteremo poi a sistemi autonomi (cosa che non è un'effettiva restrizione, come abbiamo visto alla fine del Cap. 20).

Ciò posto, da ogni dato punto iniziale P_0 parte una curva integrale γ , e se consideriamo un secondo punto P'_0 otteniamo una seconda curva γ' ; è intuitivo che se P'_0 è "vicino" a P_0 , la curva γ' resterà "vicina" a γ . Le virgolette stanno a indicare che occorrerebbe dare un'esatta definizione del termine "vicino," ma noi eviteremo di entrare in dettagli.

È meglio dare invece una descrizione della stessa situazione da un punto di vista più fisico, con un esempio. Se abbiamo messi in orbita due satelliti artificiali, in modo tale che a un certo istante le loro posizioni e velocità siano poco diverse, ci aspettiamo che anche al passare del tempo i due satelliti non si allontanino troppo uno dall'altro; e questo sarà tanto più vero, quanto più vicini essi erano all'inizio. In termini matematici, stiamo dicendo che posizione e velocità del satellite a un istante assegnato t_1 saranno funzioni *continue* della sua posizione e della sua velocità all'istante iniziale t_0 . Questo può essere dimostrato, e dunque fin qui non ci sono problemi.

Instabilità e tempo di Liapunov

I problemi nascono quando ci si chiede: che cosa accade al passare del tempo? In altre parole, come varia la distanza fra i satelliti quando t cresce? Oppure, più in astratto: la distanza fra i punti allo stesso t sulle due curve γ e γ' come varia con t ? È naturale aspettarsi che la distanza fra i punti (o quella fra i satelliti) vada aumentando al crescere di t ; quindi la domanda esatta è: con che legge possiamo aspettarci che vada crescendo questa distanza? Potrebbe forse crescere proporzionalmente al tempo? o al quadrato del tempo? o al cubo?

È chiaro l'interesse fisico della domanda: se la distanza cresce molto rapidamente, sarà molto difficile fare previsioni sulla posizione futura, a causa dell'inevitabile incertezza sperimentale sulle condizioni iniziali. Dovremo dunque distinguere sistemi a comportamento "buono" (quelli in cui la distanza non cresce rapidamente) da sistemi a comportamento "cattivo" (se la distanza aumenta troppo velocemente). In pratica la distinzione si fa a seconda che l'aumento sia con una potenza di t , oppure con un esponenziale: il primo caso, che per noi è quello buono, si chiama *stabile*, mentre il secondo (cattivo) si chiama *instabile*.

Se il sistema è instabile, la distanza fra i punti $P(t)$ e $P'(t)$ cresce esponenzialmente:

$$\overline{PP'} \propto e^{t/\tau}$$

e la costante di tempo τ si chiama *tempo di Liapunov* del sistema. Per capire che cosa questo significhi, descriviamo un esempio possibile.

Supponiamo di aver dimostrato che per un certo sistema di punti materiali, vincolati a muoversi in una regione di spazio dell'ordine di un metro (potrebbe ad es. trattarsi di un certo numero di palle su di un tavolo da biliardo) il tempo di Liapunov sia di un minuto. Se l'incertezza nella misura delle posizioni iniziali è $\delta = 1$ mm, dopo un minuto l'incertezza sarà salita solo a $e^1 \delta \simeq 2.7$ mm, ma dopo 10 minuti sarà $e^{10} \delta \simeq 2 \cdot 10^4$ mm, cioè molto più grande dello spazio disponibile; il che è quanto dire che non sarà possibile fare nessuna previsione. Se anche, per assurda ipotesi, riuscissimo a misurare le posizioni con errore $\delta = 10^{-10}$ m, in capo a mezz'ora avremmo

$$e^{30} \delta \simeq 10^3 \text{ m.}$$

L'esempio mostra a sufficienza che se il sistema è instabile il suo comportamento a lungo termine è del tutto imprevedibile. In queste condizioni il sistema sembra evolvere senza nessuna regola, in maniera casuale: si parla perciò di comportamento *caotico*. Un sistema stabile è anche detto *regolare*. L'espressione *caos deterministico* viene usata per mettere in evidenza che il comportamento caotico coesiste col carattere ancora deterministico delle equazioni differenziali.

"Zoologia" dei sistemi caotici

La discussione che abbiamo fatto fin qui potrebbe anche essere vuota di contenuto, nel senso che i sistemi caotici potrebbero anche non esistere, oppure essere delle rarità "patologiche," o almeno essere sistemi assai complicati. È dunque opportuno descrivere la situazione quale si riscontra nella realtà. Enunceremo alcune proposizioni, che non ci sarà possibile dimostrare, e poi mostreremo un esempio tipico.

Proposizione 1: Un sistema con un solo grado di libertà non è mai caotico. Quello che al massimo può accadere è di avere instabilità per condizioni iniziali eccezionali.

Esempio 1: L'oscillatore armonico è isocrono: ne segue che la distanza fra due punti su due diverse curve integrali *non cambia* nel tempo.

Esempio 2: Il pendolo non è isocrono: se perciò consideriamo due curve integrali per ampiezze diverse, abbiamo periodi diversi e i punti si allontanano (quello col periodo più lungo resta indietro); ma la distanza cresce proporzionalmente al tempo. Fa eccezione la posizione di equilibrio instabile.

Proposizione 2: *Un sistema lineare, quale che sia il numero di gradi di libertà, non è mai caotico.* Questo si capisce facilmente, ricordando che lo possiamo sempre ricondurre a più oscillatori armonici indipendenti (Cap. 30a).

Proposizione 3: *Per un sistema conservativo non lineare, a due o più gradi di libertà, esistono “quasi sempre” regioni più o meno estese dello spazio delle fasi a comportamento caotico.* Quasi sempre, perché vi sono casi speciali, in generale legati alla presenza di particolari invarianze, che sono invece completamente stabili: il più classico è il sistema di due corpi in interazione gravitazionale, del quale ci occuperemo più avanti.

Commento 1: La validità di questa proposizione è una scoperta recente, come abbiamo detto. Per molto tempo si è creduto che il comportamento caotico potesse al più essere proprio di sistemi molto complicati: questo per effetto della conoscenza di alcuni sistemi semplici non caotici (quelli di cui si sapeva studiare le soluzioni per via analitica) e di metodi di approssimazione che nascondevano il problema. È stato solo con la disponibilità di potenti mezzi di calcolo che si è potuta raccogliere una sufficiente esperienza che ha portato a ristudiare il problema, e a riscoprire lavori (come quelli di Poincaré di oltre un secolo fa) nei quali i risultati di oggi erano già in parte anticipati.

Commento 2: Dato che i sistemi lineari non sono mai caotici, e che per molto tempo i fisici hanno creduto che il caos fosse un fenomeno solo di sistemi complessi (e perciò difficili da studiare) si è oggi diffusa, fuori dell'ambito specialistico, l'idea che “caotico” equivalga a “non lineare,” e si sente spesso dire che i fisici capiscono e studiano solo i fenomeni lineari. Entrambe le affermazioni sono false se prese alla lettera, sebbene contengano una parte di verità.

Il comportamento caotico si riscontra anche in situazioni diverse da quelle fin qui descritte: ad es. in sistemi non conservativi. Anzi questi presentano fenomeni diversi, che non ci è possibile illustrare, come gli “attrattori strani.” Non è neppure necessario pensare a equazioni differenziali che nascono dalle leggi di Newton: oggi il comportamento caotico è stato ritrovato nei campi più disparati, anche al di fuori della fisica. Da un punto di vista matematico un sistema di tre equazioni differenziali di primo ordine, purché non lineari, è già un buon candidato; è proprio di questo tipo il sistema che genera il famoso

“attrattore di Lorenz” (1962):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= x(28 - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z.\end{aligned}$$

Ma c'è di più: non è neppure necessario pensare a equazioni differenziali: per trovare un comportamento caotico basta un'iterazione discreta, come ad es. la seguente, altrettanto famosa:

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k)$$

che è caotica per $\lambda > 3.56$.

Due esempi a confronto

Abbiamo già detto che un sistema conservativo a due gradi di libertà è generalmente caotico, a meno che non sia lineare. Per verificarlo, mettiamo a confronto due sistemi apparentemente molto simili.

Esempio 1: Consiste di due oscillatori armonici accoppiati, ossia di due masse e tre molle (fig. 30a-2). Supponiamo uguali, per semplicità, le due masse e anche le due molle estreme; le equazioni differenziali del sistema sono allora le (30a-4). Per semplificare ancora i calcoli possiamo scegliere l'unità di tempo uguale a $\sqrt{m/k}$: allora le equazioni si riducono a

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -x_1 + r(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -x_2 + r(x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{30b-1}$$

dove $r = q/k$ è un numero puro che misura la grandezza dell'interazione fra i due oscillatori (verificare!)

Esempio 2: Prendiamo ancora due oscillatori accoppiati, con l'unica differenza che la molla di destra (fig. 30b-1) sia una molla “dura,” la cui legge di forza anziché $-kx$ è $-k'x^3$. Questa volta per semplificare al massimo le equazioni occorre scegliere opportunamente non solo l'unità di tempo, ma anche quella di lunghezza, che dovrà essere $\sqrt{k/k'}$. Così facendo, invece delle (30b-1) avremo

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -x_1 + r(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -x_2^3 + r(x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{30b-2}$$

Quello che vogliamo accertare è se si tratti di sistemi stabili: per vederlo, procediamo come segue. Scegliamo delle condizioni iniziali, ad es. le seguenti:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0, & \dot{x}_1(0) &= v \neq 0 \\ x_2(0) &= 0, & \dot{x}_2(0) &= 0\end{aligned}$$

e determiniamo l'integrale particolare che le soddisfa. Poi ripetiamo il calcolo cambiando leggermente le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0, & \dot{x}_1(0) &= v(1 + \varepsilon) \\x_2(0) &= 0, & \dot{x}_2(0) &= 0.\end{aligned}$$

Chiamiamo δx_1 la differenza fra le $x_1(t)$ ottenute nei due casi, e δx_2 quella fra le $x_2(t)$; ci proponiamo di studiare come δx_1 , δx_2 crescono col tempo.

Studio dell'esempio 1

In questo caso non abbiamo bisogno di fare calcoli, poiché si tratta di un sistema lineare: sappiamo quindi che δx_1 , δx_2 soddisfano ancora le (30b-1), con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned}\delta x_1(0) &= 0, & \delta \dot{x}_1(0) &= v\varepsilon \\ \delta x_2(0) &= 0, & \delta \dot{x}_2(0) &= 0.\end{aligned}$$

È poi facile capire, pensando ad es. alla conservazione dell'energia, che δx_1 , δx_2 sono funzioni *limitate* del tempo, e che il loro estremo superiore è proporzionale a ε . Dunque il sistema dell'esempio 1 è stabile.

Esercizio: Dimostrare che δx_1 , δx_2 non superano mai $v\varepsilon$.

Studio dell'esempio 2

Questa volta il sistema non è lineare, e inoltre il suo integrale generale non è esprimibile con funzioni elementari; non resta perciò che ricorrere a un'integrazione numerica. A questo scopo dobbiamo anzitutto fissare un valore del parametro r , e poi le condizioni iniziali, ossia v ed ε .

Osserviamo anzitutto che per $r = 0$ il sistema (30b-2) si riduce a due equazioni separate, per il moto delle due masse senza molla interposta: un tale sistema è certamente regolare. Per mostrare quanto sia importante la presenza dell'accoppiamento, scegliamo quindi un valore abbastanza piccolo per r , ad es. $r = 0.1$.

Quanto a v , ce ne serviremo per mostrare che il nostro sistema non è sempre caotico: faremo i calcoli per due valori: $v = 1.0$ e $v = 1.4$, che sebbene poco diversi danno luogo a comportamenti opposti. Infine prendiamo ε molto piccolo, per far vedere in modo appariscente l'effetto dell'instabilità: $\varepsilon = 10^{-8}$.

Abbiamo riportato nelle fig. 30b-2 e 30b-3 i risultati dell'integrazione numerica rispettivamente per i due valori di v . (Il grafico mostra $|\delta x_2|$: quello di $|\delta x_1|$ è del tutto simile). Esaminiamoli separatamente.

In fig. 30b-2 vediamo che $|\delta x_2|$ oscilla con ampiezza crescente nel tempo; nell'intervallo esaminato (fino a $t = 4 \cdot 10^3$) l'ampiezza delle oscillazioni è proporzionale a t , e non supera $2 \cdot 10^{-6}$. Dunque con queste condizioni iniziali il comportamento del sistema è *regolare*.

Tutt'altro si vede in fig. 30b-3: osserviamo anzitutto che qui la scala delle ordinate è logaritmica, e l'intervallo di tempo è più breve: fino a $t = 800$. Dato che le oscillazioni crescono con legge grosso modo lineare su scala semilogaritmica, ne deduciamo che la legge d'incremento dell'ampiezza è esponenziale; tracciando una retta che approssimi i dati, possiamo stimare anche la costante di tempo, ossia il tempo di Liapunov. Si trova $\tau \simeq 47$.

Si vede anche che nell'intervallo considerato $|\delta x_2|$ cresce di 8 ordini di grandezza: in altre parole un errore nelle condizioni iniziali viene amplificato cento milioni di volte. È evidente la differenza rispetto all'altro caso: qui il sistema si comporta in modo *caotico*.

Terminiamo con un

Problema: Anche il sistema dell'esempio 2 è conservativo: perché allora non si può usare lo stesso argomento dell'esempio 1 per dare un limite superiore allo scostamento delle traiettorie? Qual'è l'unica informazione ottenibile dalla conservazione dell'energia?