

25. Oscillazioni forzate e risonanza

Abbiamo visto nel Cap. 21 che l'oscillatore armonico costituisce una buona approssimazione per le piccole oscillazioni dei più svariati sistemi; nel Cap. 24 abbiamo invece osservato che nei sistemi fisici reali sono quasi sempre presenti forze non conservative, che provocano lo smorzamento delle oscillazioni. Tuttavia è anche molto frequente, sia nella realtà naturale, sia nelle applicazioni tecniche e scientifiche, una situazione diversa: un sistema oscillante, che di per sé sarebbe smorzato, viene mantenuto in movimento grazie a forze esterne, che *forzano* l'oscillazione. Esempi:

- il pendolo o il bilanciere di un orologio meccanico (se non ci dimentichiamo di caricarlo)
- la colonna d'aria in un flauto
- i circuiti di sintonia di un radiorecettore
- il campo elettromagnetico nella cavità di un MASER, rifornito di energia dagli atomi eccitati che l'attraversano...

L'equazione differenziale

Possiamo schematizzare la situazione come segue: un oscillatore armonico smorzato è assoggettato a una forza esterna $F = mf \cos \omega_1 t$ (con ω_1 in generale diversa sia da ω_0 , sia da ω). Se inizialmente l'oscillatore è fermo, si metterà in moto, oscillando con ampiezza crescente (la forza esterna fa lavoro positivo, ossia qualche sistema esterno cede energia all'oscillatore) finché l'energia dissipata dalla resistenza di attrito (che fa lavoro negativo) compensa quella guadagnata. Si arriva così a un *regime stazionario*, ossia a un'oscillazione di ampiezza costante alla frequenza ω_1 . Vedremo ora come si ritrova rigorosamente quanto abbiamo asserito in forma intuitiva; ma dobbiamo prima formulare esattamente il problema matematico.

Per cambiare, partiremo questa volta dall'equazione del moto scritta per la coordinata x , come equazione differenziale di secondo ordine:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega_1 t. \quad (25-1)$$

Questa equazione, che naturalmente è valida per qualsiasi possibile moto del nostro oscillatore forzato, è ancora lineare ma *non più omogenea*, causa la presenza del termine forzante a secondo membro. Sempre a causa dello stesso termine, il sistema *non è più autonomo*.

Che cosa possiamo dire in generale delle soluzioni della (25-1)? Siano $h_1(t)$, $h_2(t)$ due integrali particolari: non è più vero che $ah_1 + bh_2$ è ancora soluzione per a e b qualsiasi, ma solo se $a + b = 1$ (verificare!) Molto più interessante è però un altro fatto: $h_1 - h_2$ non soddisfa la (25-1), bensì l'*equazione omogenea associata*:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (25-2)$$

ossia quella dell'oscillatore smorzato libero. Di più, vale anche il viceversa: se $h_0(t)$ è una soluzione della (25-2), allora $h_0 + h_1$ è soluzione della (25-1). Abbiamo dunque dimostrato il

Teorema: L'integrale generale della (25-1) si ottiene sommando un'integrale particolare all'integrale generale dell'equazione omogenea associata (25-2).

Osservazione: Dal ragionamento fatto si capisce che il teorema vale per qualsiasi sistema di equazioni differenziali lineari non omogenee, e anche se il termine forzante non ha andamento sinusoidale.

Attenzione: Non bisogna commettere l'errore di credere che per trovare la soluzione che soddisfa determinate condizioni iniziali si debba prima scegliere l'integrale particolare dell'equazione omogenea che soddisfa quelle condizioni iniziali, e a questo sommare l'integrale particolare dell'equazione non omogenea. Al contrario, prima si deve scrivere l'integrale generale dell'equazione non omogenea, e poi imporre a questo le condizioni iniziali.

Esempio (banale): Se le condizioni iniziali per la (25-1) sono $x = 0$, $\dot{x} = 0$, la soluzione della (25-2) che le soddisfa è $x = 0$; se a questa sommiamo un integrale particolare $h_1(t)$ della (25-1), la somma non potrà più soddisfare le stesse condizioni iniziali (a meno che questo non sia vero anche per h_1 , che sarebbe in tal caso già la risposta finale).

Dal momento che noi conosciamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, ci basterà trovare un integrale particolare per risolvere completamente il problema matematico.

Il principio di sovrapposizione

Di grande importanza per questi sistemi è il seguente

Teorema (principio di sovrapposizione): Date due equazioni differenziali lineari (anche non omogenee) che differiscono al più per i termini noti (ossia che hanno la stessa equazione omogenea associata):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x &= \xi_1(t) \\ \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x &= \xi_2(t)\end{aligned}$$

se $h_1(t)$ e $h_2(t)$ sono due loro integrali particolari, allora $h(t) = a_1h_1(t) + a_2h_2(t)$ è un integrale particolare dell'equazione

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x = a_1\xi_1(t) + a_2\xi_2(t).$$

La dimostrazione non richiede altro che la semplice sostituzione.

Si vede che il principio di sovrapposizione esprime nel modo più diretto la *linearità* delle equazioni, ossia della descrizione matematica del sistema fisico in esame. Possiamo perciò vederlo come una formulazione equivalente della linearità, e ritenerlo valido, del tutto in generale, per ogni tipo di sistemi lineari.

Un esempio chiarirà meglio la seconda affermazione. Una data distribuzione \mathcal{D}_1 di cariche genera nello spazio un certo campo elettrico \vec{E}_1 ; una seconda distribuzione \mathcal{D}_2 genera invece un altro campo \vec{E}_2 . Se le due distribuzioni sono presenti insieme (senza che nessuna modifichi l'altra) il campo elettrico prodotto è esattamente la somma $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, in ogni punto dello spazio. Questo perché anche le equazioni dell'elettrostatica sono lineari.

A causa della sua generalità si preferisce talvolta enunciare il principio di sovrapposizione in una forma più espressiva da un punto di vista fisico, ma anche pericolosamente vaga:

In un sistema lineare se due cause agiscono insieme producono un effetto che è la somma degli effetti che ciascuna delle due produce se agisce da sola.

Abbiamo definito “pericolosamente vaga” questa formulazione, perché si nominano “cause” ed “effetti” senza definirli con precisione, e non si chiarisce che la somma va intesa nel senso di una precisa operazione matematica. Il punto centrale è infatti che il principio di sovrapposizione ha senso solo nell'ambito di una determinata teoria matematica, nella quale si riscontri la proprietà di essere *lineare*.

Il regime stazionario

Abbiamo già detto che deve esistere una soluzione stazionaria della (25-1), in cui l'oscillatore si muove con legge sinusoidale, alla frequenza del termine forzante. Il modo più semplice di trovarla è di lavorare di nuovo nel corpo complesso, studiando, in luogo della (25-1), la seguente:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f e^{-i\omega_1 t}. \quad (25-3)$$

La (25-3) è un'equazione in cui il termine forzante è complesso, e perciò tali saranno in generale anche le possibili soluzioni per la funzione incognita z (osservazione banale: non è l'uso della lettera z che sta a indicare “complesso”: avremmo potuto benissimo usare x , w , σ , o qualunque altro simbolo, senza che con questo cambiasse l'equazione!) Però la (25-3) ha un'altra proprietà: è *a coefficienti reali*. La conseguenza è che se $z(t)$ è un'integrale particolare, allora la funzione coniugata $z^*(t)$ è integrale particolare dell'equazione coniugata

$$\ddot{z}^* + \gamma\dot{z}^* + \omega_0^2 z^* = f e^{i\omega_1 t}. \quad (25-4)$$

Ciò posto, il principio di sovrapposizione ci assicura che ogni soluzione z della (25-3) ce ne dà una della (25-1), prendendo $x = \frac{1}{2}(z + z^*) = \Re z$. Infatti

$$\frac{1}{2} (e^{-i\omega_1 t} + e^{i\omega_1 t}) = \cos \omega_1 t.$$

Cerchiamo dunque una soluzione della (25-3) che abbia la forma

$$z = z_0 e^{-i\omega_1 t}.$$

Dato che $\dot{z} = -i\omega_1 z_0 e^{-i\omega_1 t}$ e $\ddot{z} = -\omega_1^2 z_0 e^{-i\omega_1 t}$, si deve avere

$$(-\omega_1^2 - i\gamma\omega_1 + \omega_0^2) z_0 = f$$

da cui

$$z_0 = \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega_1^2) - i\gamma\omega_1} = f \frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2) + i\gamma\omega_1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \gamma^2\omega_1^2} = if \frac{\gamma\omega_1 + i(\omega_1^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \gamma^2\omega_1^2}.$$

Se poniamo $z_0 = A e^{i\varphi}$ abbiamo subito

$$A^2 = \frac{f^2}{D}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\gamma\omega_1} \quad (25-5)$$

dove $D = (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \gamma^2\omega_1^2$.

È importante studiare come variano l'ampiezza e la fase dell'oscillazione stazionaria, al variare della frequenza forzante. Per quanto riguarda l'ampiezza, la prima delle (25-5) ci mostra i seguenti fatti:

- a basse frequenze ($\omega_1 \ll \omega_0$) l'ampiezza approssima f/ω_0^2
- ad alte frequenze ($\omega_1 \gg \omega_0$) l'ampiezza tende a zero come f/ω_1^2 : l'esatto significato di questa espressione è

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \frac{A}{f/\omega_1^2} = 1$$

- esiste un massimo dell'ampiezza per $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2$, e vale $f/\gamma\omega$, dove ω è quella definita nel Cap. 24.

Se $\gamma \ll \omega_0$ si ha dunque una notevole esaltazione delle oscillazioni (risonanza).

Negli stessi casi, la fase ha il seguente comportamento:

- a basse frequenze $\varphi \rightarrow 0$ (l'oscillazione è in fase con la forza esterna)
- ad alte frequenze $\varphi \rightarrow \pi$, ossia le oscillazioni sono in opposizione alla forza
- $\varphi = \pi/2$ per $\omega_1 = \omega_0$.

Il tutto è riassunto nelle fig. 25-1 e 25-2.

Il caso $\gamma \ll \omega_0$, ossia $Q \gg 1$, merita un esame particolare: il massimo della curva di risonanza è aguzzo, e basta studiare valori di ω_1 poco diversi da ω_0 . Allora

$$D = (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \gamma^2\omega_1^2 = (\omega_0 - \omega_1)^2 (\omega_0 + \omega_1)^2 + \gamma^2\omega_1^2 \simeq 4\omega_0^2 [(\omega_0 - \omega_1)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2]$$

e poi:

$$A^2 = \frac{1}{4\omega_0^2} \frac{f^2}{(\omega_0 - \omega_1)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\omega_1 - \omega_0}{\gamma/2}.$$

Le caratteristiche essenziali sono:

- A risonanza ($\omega_1 = \omega_0$), $A = f/\gamma\omega_0$ e $\varphi = \pi/2$.
- Fuori risonanza, le curve sono simmetriche.
- L'ampiezza si riduce di un fattore $\sqrt{2}$ per $|\omega_1 - \omega_0| = \gamma/2$; poiché in tal caso l'energia dell'oscillatore è dimezzata rispetto alla risonanza, si dice che la "larghezza di banda a metà altezza" (half-height bandwidth) è γ .
- Negli stessi punti, $\varphi = \pi/2 \pm \pi/4$.
- Per $|\omega_1 - \omega_0| \gg \gamma$, la curva dell'ampiezza non dipende da γ :
 $A = f/(2\omega_0|\omega_1 - \omega_0|)$.

Tutte queste caratteristiche sono riassunte in fig. 25-3.

La larghezza della risonanza ci dà una nuova interpretazione del fattore di merito: $Q = \omega_0/\gamma$ è il rapporto tra la frequenza di risonanza e la larghezza di banda.

Bilancio dell'energia

È interessante studiare il bilancio energetico a risonanza. L'energia dell'oscillatore è

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{mf^2}{2\gamma^2}.$$

Questa si mantiene costante, come abbiamo già detto, perché la forza esterna fa un lavoro positivo che compensa quello negativo della forza d'attrito. Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza esterna: in un intervallo dt avremo (a risonanza $\omega_1 \simeq \omega_0$, $x = A \sin \omega_0 t$)

$$F dx = Fv dt = (mf \cos \omega_0 t) (\omega_0 A \cos \omega_0 t) dt = \frac{mf^2}{\gamma} \cos^2 \omega_0 t dt.$$

Questa espressione dipende da t a causa del termine $\cos^2 \omega_0 t$, che oscilla fra 0 e 1; il suo valor medio è 1/2, per cui il lavoro fatto in un periodo è

$$L = \frac{mf^2}{2\gamma} T = \frac{\pi mf^2}{\gamma\omega_0} = 2\pi \frac{E}{Q}.$$

Abbiamo così trovato un'altra interpretazione del fattore di merito: esso misura (a meno del fattore 2π) il rapporto fra l'energia accumulata nell'oscillatore e il lavoro fatto dalla forza esterna in un periodo. Ne segue che un oscillatore con Q molto grande

- risponde in modo selettivo a sollecitazioni esterne con frequenze poco diverse da quella propria
- richiede pochissima energia dall'esterno per essere mantenuto in oscillazione.

Sono queste due qualità (l'una o l'altra a seconda dei casi) che rendono pregiati gli oscillatori con alto fattore di merito.

Esempi di risonanze

Oscillazioni forzate e risonanza sono assai frequenti e importanti — come abbiamo già osservato — nella fisica e nella tecnica, anche al di fuori dell'ambito strettamente meccanico: vogliamo ora guardare più da vicino alcuni esempi significativi.

1. *Strumenti musicali:*

In quasi tutti gli strumenti musicali la risonanza gioca un ruolo importante, ma il caso più evidente e più semplice è quello degli strumenti a fiato della famiglia del flauto. Qui il sistema oscillante è la colonna d'aria contenuta nel tubo; la forza eccitante sono le fluttuazioni irregolari di pressione prodotte dal soffio del suonatore sull'imboccatura. Il fatto per noi importante è che il termine forzante non è affatto sinusoidale, ma ha invece le caratteristiche di un “rumore bianco” (fig. 25-4).

Si può considerare tale rumore come la somma di un gran numero di contributi sinusoidali, a diverse frequenze (Fourier) e grazie al principio di sovrapposizione il flauto risponde a ciascuno, con un'ampiezza diversa a seconda della frequenza. Se il Q è sufficientemente alto, solo una ristrettissima banda di frequenze darà luogo a oscillazioni di ampiezza apprezzabile, e il risultato sarà un suono pressoché puro. Per cambiare l'altezza del suono occorre e basta variare la frequenza di risonanza, cosa che si fa coprendo o scoprendo i buchi che esistono sul lato del tubo.

Non si può fare a meno di osservare che una colonna d'aria come quella del flauto (o di tutti gli strumenti a fiato) non ha in realtà una sola risonanza, ma infinite (uno *spettro*): di conseguenza è possibile ottenere diverse note (armoniche) anche senza sfruttare l'apertura o chiusura dei buchi.

È anche necessario avvisare che in realtà il semplice schema che abbiamo proposto non spiega a sufficienza il comportamento del flauto che ogni suonatore conosce. Perché se non si soffia abbastanza forte il suono non si “innesca”? Perché se si soffia più forte si salta a un'armonica superiore? Infine, il suono è assai più puro di quanto lascerebbe prevedere il Q dello strumento, che non è molto alto (dopo tutto, se noi sentiamo un suono, e piuttosto forte, vuol dire che una buona parte dell'energia viene emessa nell'aria circostante). Tutti questi elementi puntano in una sola direzione: il funzionamento di un flauto coinvolge effetti *non lineari*, che qui non possiamo analizzare.

2. *Sintonizzatori:*

Un caso apparentemente molto diverso, ma del tutto simile nei principi, si ha nella tecnica radio. Un ricevitore radio (o anche un televisore) ha un'antenna, che per effetto delle onde elettromagnetiche emesse da tutte le possibili sorgenti

è percorsa da corrente elettrica. Questa corrente entra nel ricevitore e contiene sovrapposte tutte le informazioni provenienti dalle sorgenti. Il problema è quello di separarle, scegliendo di volta in volta quella che interessa.

A ciò provvedono uno o più circuiti risonanti, che si comportano anch'essi come oscillatori armonici: rispondono con molto maggiore ampiezza alle correnti aventi frequenza vicina alla propria frequenza di risonanza. Si usano spesso più circuiti risonanti “in cascata,” allo scopo di aumentare l'effetto complessivo di selettività. Oggigiorno è molto comune l'uso di “filtri a cristallo,” che utilizzano cristalli (di quarzo o altri) in luogo di circuiti LC: la ragione è che, come abbiamo visto, il Q di un quarzo è di qualche ordine di grandezza maggiore. È possibile impiegare la risonanza meccanica del cristallo di quarzo in un apparato elettronico, perché il quarzo è *piezoelettrico*, il che vuol dire — in termini semplici — che le sue vibrazioni producono cariche elettriche, e che viceversa può essere messo in vibrazione applicando un campo elettrico.

Un requisito essenziale di un “sintonizzatore” è di essere “sintonizzabile” su diverse frequenze: questo si ottiene facilmente nei risonatori elettrici variando uno dei parametri (di solito la capacità del condensatore). Non si vede facilmente come sintonizzare un cristallo, e infatti questo non si fa; si usa la tecnica della “conversione di frequenza” (un tempo nota come “supereterodina”), su cui non possiamo soffermarci.

3. Risonanze atomiche e nucleari:

Un terzo esempio, radicalmente diverso nei processi fisici, ma ancora del tutto simile quanto ai concetti di base, è dato dagli atomi, dai nuclei, ecc. Conviene presentare la situazione descrivendo un possibile esperimento (come al solito, semplificando molto e trascurando fatti non essenziali).

Nella fig. 25-5 abbiamo un recipiente (una *cella*) a pareti trasparenti, in cui è contenuto un gas (ad es. vapore di sodio). Sulla cella si manda una radiazione elettromagnetica (luce visibile) e si misura l'intensità della luce che attraversa la cella e raggiunge un rivelatore. Se si varia la frequenza della radiazione, e si ripete la misura, un grafico dell'energia sottratta dal gas al fascio di luce, in funzione della frequenza, presenta una successione di “picchi” (*righe spettrali*) (fig. 25-6).

Abbiamo dunque un effetto selettivo analogo a quello del flauto: gli atomi interagiscono in modo notevole con la radiazione solo per certe frequenze. La radiazione sottratta al fascio viene dissipata con due meccanismi fondamentali: può andare a scaldare il gas (*assorbimento*) o può essere riemessa in tutte le direzioni (*diffusione*). Come ci si può aspettare in conseguenza di questi effetti dissipativi, le righe spettrali hanno una certa larghezza, e si può perciò parlare di un fattore di merito. Inoltre si vede che la radiazione diffusa persiste anche se si spegne la sorgente di luce, con un'intensità che decresce esponenzialmente nel tempo; la costante di tempo è legata alla larghezza della riga dalla solita relazione: $\tau = 1/\gamma$.

In questo caso si presenta un fatto nuovo: le frequenze di risonanza sono connesse a variazioni discrete dell'energia che l'atomo può avere (livelli energetici): la relazione è data dalla stessa formula di Bohr ($\Delta E = h\nu = \hbar\omega$) che abbiamo vista al Cap. 23. Nascono a questo punto una serie di problemi:

- Emissione e assorbimento della radiazione hanno luogo solo in “quanti” discreti, e ciò porta ad attribuire carattere discreto anche alla stessa radiazione elettromagnetica (fotoni).
- Il singolo atto di emissione dovrebbe avvenire a un istante determinato; cosa che non si concilia col carattere esponenziale che si osserva nell'emissione da un insieme di atomi.
- Se la risonanza non è ben definita, ma ha una certa larghezza, lo stesso si dovrà dire dell'energia del livello...

La soluzione di tutte queste difficoltà si trova soltanto nella meccanica quantistica.

Esperimenti analoghi si possono realizzare con i nuclei atomici; la differenza essenziale sta nell'ordine di grandezza delle energie in gioco, che sono circa 10^6 volte maggiori.

4. Particelle come risonanze:

Sempre sulla stessa linea, possiamo condurre un esperimento che coinvolge “particelle.” Cominciamo con un “bersaglio” consistente di protoni (nuclei d'idrogeno) sui quali facciamo arrivare per es. dei pioni (mesoni π). Anche in questo caso si può misurare l'assorbimento (questa volta è più semplice contare le particelle) e si trova un risultato analogo al precedente. A titolo di esempio, la prima risonanza si trova quando i pioni hanno un'energia cinetica $\simeq 160$ MeV, e ha una larghezza (espressa in energia) di circa 130 MeV; tenendo conto dell'energia totale del sistema protone-pione (energie di riposo incluse) si trova un fattore di merito intorno a 0.1.

Per analogia con gli atomi, si può interpretare questo risultato come la prova che esiste un “livello energetico eccitato” del protone; in altri casi però la larghezza della risonanza è molto minore, e perciò la costante di tempo (*vita media*) è abbastanza lunga perché sia possibile rivelare direttamente il sistema nello stato eccitato. Allora riesce più naturale parlare di una nuova “particella”: si vede così che la distinzione fra particella e risonanza non è affatto netta, e i due concetti sfumano l'uno nell'altro. Per fare un esempio più recente, la famosa Z^0 è una risonanza con energia intorno a 90 GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) e larghezza di 2.8 GeV, cui corrisponde una vita media $\tau \sim 10^{-26}$ s.

25a. Oscillazioni forzate e spazio delle fasi

Come si muove l'oscillatore prima di raggiungere il regime stazionario? Il problema matematico è chiaro: dobbiamo trovare una soluzione della (25-1) con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. La soluzione già trovata non va bene: infatti essa dà $x(0) = A \cos \varphi$, $\dot{x}(0) = \omega_1 A \sin \varphi$, e dovrebbe perciò essere $A = 0$, cosa possibile solo se $f = 0$.

L'integrale generale

Ricordiamo quanto detto al cap. prec.: l'integrale generale della (25-1) è la somma di un qualsiasi integrale particolare e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata. Un integrale particolare ci è già noto:

$$x = \Re z = \Re (z_0 e^{-i\omega_1 t}) = \Re (A e^{i(\varphi - \omega_1 t)}) = A \cos(\varphi - \omega_1 t),$$

con A e φ date dalle (25-5). Quanto all'integrale generale dell'equazione omogenea, l'abbiamo visto nel Cap. 24, per es. nella forma

$$x = a e^{-\gamma t/2} \cos \omega t + b e^{-\gamma t/2} \sin \omega t,$$

dove ω è definito nella (24-5), mentre a e b sono costanti arbitrarie.

Mettendo tutto insieme, troviamo l'integrale generale

$$x = A \cos(\varphi - \omega_1 t) + a e^{-\gamma t/2} \cos \omega t + b e^{-\gamma t/2} \sin \omega t, \quad (25a-1)$$

e dobbiamo solo imporre le condizioni iniziali. Però il calcolo è piuttosto lungo, e l'espressione finale è poco istruttiva; possiamo imparare molto di più da una discussione *qualitativa*.

Le sezioni di Poincaré

Vogliamo studiare le oscillazioni forzate di un oscillatore armonico smorzato usando la tecnica geometrica dello spazio delle fasi, già vista al Cap. 21 per l'oscillatore libero. La differenza essenziale è che l'oscillatore forzato *non* è *autonomo*: occorre allora ricorrere all'espedito della variabile ausiliaria, cui avevamo accennato alla fine del Cap. 20. Se indichiamo con q tale variabile ausiliaria, dovremo aggiungere l'equazione $\dot{q} = 1$, e la condizione iniziale $q(0) = 0$. Si arriva così al sistema di tre equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega u \\ \dot{u} &= -\omega x - \gamma u + \frac{f}{\omega} \sin \omega_1 q \\ \dot{q} &= 1. \end{aligned} \quad (25a-2)$$

Di questo sistema abbiamo già visto come calcolare l'integrale generale, ma vogliamo evitare di disperderci in una discussione della sua complicata espressione, e interpretarlo invece per via grafica. Una difficoltà sta nel fatto che non è facile disegnare uno spazio delle fasi tridimensionale; ma ci viene in soccorso un'idea di Poincaré.

La forza esterna è periodica, di periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$; è quindi ragionevole pensare che il problema si semplifichi se ci si limita a studiare delle sezioni dello spazio delle fasi, parallele al piano (x, u) e fatte per $q = 0, T_1, 2T_1, \dots$ (*sezioni di Poincaré*). Una qualunque curva integrale del sistema (25a-1) verrà allora rappresentata solo dalle sue intersezioni P_0, P_1, \dots con quei piani, che disegneremo tutti sovrapposti (fig. 25a-1 e 25a-2).

Da un punto di vista fisico, ciò corrisponde a fotografare l'oscillatore agli istanti $0, T_1, 2T_1, \dots$: a fare cioè un'analisi *stroboscopica*. In questo modo una soluzione periodica di periodo T_1 darà un *punto fisso*, mentre se la soluzione non è periodica il punto d'intersezione cambierà da una sezione all'altra.

Studio delle traiettorie

Noi già conosciamo la soluzione periodica: è il regime stazionario, che nelle attuali coordinate ha equazioni

$$\begin{aligned}x &= a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t \\u &= \frac{\omega_1}{\omega} (b \cos \omega_1 t - a \sin \omega_1 t) \\q &= t.\end{aligned}$$

Si vede che la traiettoria è un'elica di passo T_1 , avvolta su di un cilindro con asse coincidente con l'asse q (fig. 25a-3). Se $\omega_1 \neq \omega$ non si tratta in generale di un cilindro circolare, bensì ellittico; ma questa non è una complicazione, dato che noi dell'elica vediamo solo i punti delle sezioni, che sulla proiezione (x, u) sono tutti coincidenti, come abbiamo detto.

Che cosa possiamo dire della soluzione generica? Occupiamoci in primo luogo della soluzione omogenea: sappiamo che nel piano (x, u) essa descrive una spirale, e che il tempo per un giro è $T = 2\pi/\omega$, in genere $\neq T_1$. Se ad es. T_1 è poco maggiore di T , le foto stroboscopiche vengono fatte un po' in ritardo rispetto al tempo occorrente per un giro: vedremo perciò dei punti che avanzano in senso orario. Se al contrario T_1 è un po' minore di T , le foto saranno in anticipo, e i punti si muoveranno in senso anti orario (fig. 25a-4 e 25a-5). In tutti i casi però i punti andranno sempre avvicinandosi all'origine, perché nella soluzione omogenea tanto x quanto u tendono a zero per $t \rightarrow \infty$; ciò equivale a dire che l'origine è l'unico attrattore.

Se ora sommiamo le due soluzioni (periodica e omogenea) avremo la seguente situazione (fig. 25a-6 e 25a-7):

- per $t = 0$, $P = O$ (perché questa è la condizione iniziale)
- per $t = T_1, 2T_1, \dots$ P gira intorno al punto fisso P_∞ ; in senso orario se $\omega_1 < \omega$ ($T_1 > T$) e in senso antiorario se $\omega_1 > \omega$
- in tutti i casi, $P \rightarrow P_\infty$.

L'interpretazione fisica è la seguente:

- l'oscillatore inizia il moto con ampiezza piccola (il punto P è vicino ad O)
- l'ampiezza via via cresce fino a un massimo, poi decresce e oscilla attorno a quella della soluzione stazionaria,
- l'oscillazione si stabilizza dopo un tempo teoricamente infinito, ma in pratica dopo qualche multiplo della costante di tempo $1/\gamma$
- dopo questo tempo si mantiene l'oscillazione stazionaria.

Si noti che lo stesso succede anche se si parte da altre condizioni iniziali: infatti nelle sezioni di Poincaré P_∞ è l'unico *attrattore*, che corrisponde nell'intero spazio delle fasi a un *attrattore periodico*. Del resto, che le cose stiano così si vede anche dall'espressione analitica (25a-1) dell'integrale generale: quali che siano a e b , per t molto grande la seconda parte dell'espressione tende a zero a causa dell'esponenziale, e rimane solo la soluzione stazionaria. La fig. 25a-8 mostra l'andamento tipico di x in funzione del tempo.

26. L'oscillatore armonico bidimensionale isotropo

Accade spesso di dover considerare moti sotto l'azione di forze elastiche non lungo una retta, ma in un piano o nello spazio. Discuteremo ora le principali differenze e novità rispetto al caso unidimensionale, cominciando col caso di un moto nel piano. Quest'esempio ci servirà poi per introdurre concetti di portata molto più generale.

Equazioni del moto, integrale generale, traiettoria

Innanzitutto precisiamo la schematizzazione:

- il moto ha luogo in un piano
- la forza è proporzionale allo spostamento da un punto fisso O, con la stessa costante di proporzionalità in tutte le direzioni:

$$\vec{F} = -k\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r} \quad \left(\omega = \sqrt{k/m}\right).$$

Si parla in questo caso di oscillatore *isotropo*: termine che sta a significare che il comportamento del sistema è lo stesso *in tutte le direzioni*.

Abbiamo a che fare con un sistema autonomo, ma con due gradi di libertà: perciò l'integrale generale richiederà 4 costanti arbitrarie, e 4 dati occorreranno per fissare le condizioni iniziali. Introducendo coordinate cartesiane con origine in O si ottengono due equazioni uguali per le componenti di \vec{r} :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y. \end{aligned} \tag{26-1}$$

Non conviene ridurre il sistema (26-1) a 4 equazioni del primo ordine, perché la discussione geometrica richiederebbe uno spazio delle fasi a 4 dimensioni, che non è possibile rappresentare ed è difficile “vedere.” In termini astratti, quanto abbiamo detto per i sistemi con un solo grado di libertà resta valido (campo delle velocità, traiettorie, ecc.) ma ne faremo a meno.

L'integrale generale delle (26-1) è

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t - \varphi) = a \cos \omega t + a' \sin \omega t \\ y &= B \cos(\omega t - \psi) = b \cos \omega t + b' \sin \omega t. \end{aligned} \tag{26-2}$$

Abbiamo dunque due oscillazioni armoniche lungo i due assi, con la stessa frequenza ma con fasi e ampiezze arbitrarie. Dato che è sempre $|x| \leq A$, $|y| \leq B$, la traiettoria è certamente contenuta in un rettangolo di lati $2A$, $2B$, col centro in O. Si vede inoltre che esistono istanti nei quali $x = \pm A$, e altri in cui $y = \pm B$:

dunque la traiettoria dovrà essere tangente al rettangolo. Eliminando $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ dalle (26-2) si ottiene l'equazione della traiettoria:

$$(b^2 + b'^2) x^2 - 2(ab + a'b') xy + (a^2 + a'^2) y^2 = (ab' - ba')^2.$$

Si tratta dunque di un'ellisse, inscritta nel rettangolo già definito (fig. 26-1).

In quali casi si ha un moto rettilineo? Dev'essere $y/x = \text{cost.}$, il che è possibile sse $\varphi = \psi$ o $\varphi = \psi + \pi$, ossia se i due moti componenti sono in fase o in opposizione. È anche possibile un moto circolare (uniforme): dovrà essere $A = B$, $\varphi = \psi \pm \pi/2$.

Le costanti del moto

Dalle (26-2) si ricava subito

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega A \sin(\omega t - \varphi) \\ \dot{y} &= -\omega B \sin(\omega t - \psi) \end{aligned} \quad (26-3)$$

ed è facile vedere, cercando di eliminare i termini in seno e coseno, che le seguenti grandezze sono costanti del moto:

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 \quad \dot{y}^2 + \omega^2 y^2 \quad xy - y\dot{x}. \quad (26-4)$$

Un teorema generale, che non vogliamo qui dimostrare, ci assicura che *per un sistema autonomo in n gradi di libertà esistono al più $2n - 1$ costanti del moto indipendenti*: nel nostro caso 3. Dunque non dobbiamo cercarne altre, e ci resta solo da interpretare quelle che abbiamo trovato.

1. L'energia:

È ovvio che le prime due hanno a che fare con le energie dei due oscillatori armonici lungo x e lungo y : infatti

$$E_x = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

e lo stesso vale per E_y .

Attenzione: La notazione E_x , E_y non deve trarre in inganno: non si tratta delle componenti di un vettore!

Naturalmente sarà anche costante la somma

$$E = E_x + E_y = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2,$$

che viene spontaneo chiamare *energia totale* dell'oscillatore bidimensionale, e leggere come la somma di un'energia cinetica e di un'energia potenziale:

$$T = \frac{1}{2} m v^2, \quad V = \frac{1}{2} k r^2.$$

Mentre per l'energia cinetica non ci sono commenti da fare, dovremo tornare sull'energia potenziale, per capire la sua relazione con la forza elastica \vec{F} .

Nota: Quando si parla di costanti del moto *indipendenti* non ci si riferisce all'indipendenza lineare, ma *funzionale*: in questo senso non soltanto E non è indipendente da E_x , E_y , essendone la somma; ma neppure E_x^2 oppure E_x/E_y lo sono. La definizione esatta d'indipendenza funzionale è compito dei corsi di Analisi, ma l'idea intuitiva è che una grandezza non sia determinata quando sono note le altre, come invece accade negli esempi che abbiamo dato.

2. Il momento angolare:

Possiamo vedere la terza delle (26-4) in diversi modi. Uno si ottiene passando a coordinate polari: con la solita sostituzione $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ si trova

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\vartheta}.$$

Ricordando la (9-6)

$$a_{\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\vartheta})$$

per la componente trasversale dell'accelerazione, vediamo che la nostra costante del moto esiste sse $a_{\vartheta} = 0$, ossia sse la forza è puramente *radiale*.

Nel nostro caso la forza non è solamente radiale, ma per di più il suo modulo dipende soltanto da r (il campo di forze è simmetrico, ovvero invariante per rotazioni, attorno ad O). Un campo così fatto si chiama *centrale*, e il moto sotto l'azione di una tale forza si chiama *moto centrale*. Si noti che l'esistenza della nostra costante del moto non richiede che la forza sia centrale (anche se questo è il caso di gran lunga più frequente), ma soltanto che sia radiale; tanto meno occorre che la forza sia elastica. Abbiamo dunque trovato un risultato molto più generale, valido per qualunque forza puramente radiale.

Osserviamo poi che

$$\vec{r} \times \vec{v} = (x\dot{y} - y\dot{x}) \vec{e}_z, \quad (26-5)$$

o anche

$$\vec{r} \times d\vec{r} = (x\dot{y} - y\dot{x}) \vec{e}_z dt.$$

Questa si può interpretare come segue. Il primo membro ha un modulo che misura il doppio dell'area del triangolo tratteggiato in fig. 26-2, e il suo verso è quello di \vec{e}_z o l'opposto, a seconda che il moto attorno ad O sia antiorario oppure orario. Pertanto, se poniamo

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x})$$

la grandezza così introdotta può essere chiamata *velocità areale*, in quanto misura l'area spazzata dal vettore \vec{r} per unità di tempo.

Dunque: *se la forza è radiale, la velocità areale è costante*. Abbiamo così dimostrato la *seconda legge di Keplero*.

Per ragioni che vedremo in seguito — studiando sistemi più complicati del singolo punto materiale — conviene usare, invece della grandezza definita nella (26-5), quella che si ottiene moltiplicandola per la massa:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p},$$

che si chiama *momento angolare* o *momento della quantità di moto*. Dunque:

In un moto vincolato a un piano, sotto l'azione di una forza radiale, si conserva la componente del momento angolare perpendicolare al piano.

Nota: In realtà \vec{L} si conserva come vettore, visto che le altre componenti sono nulle per definizione in questo caso.

È utile vedere la costanza del momento angolare in modo diretto, dimostrando che $d\vec{L}/dt = 0$. Calcoliamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Sarà dunque $d\vec{L}/dt = 0$ sse la forza è radiale lungo tutta la traiettoria; anzi lungo *tutte le traiettorie*, se il risultato deve valere per tutte le possibili condizioni iniziali. Abbiamo così dimostrato di nuovo che condizione necessaria e sufficiente per la conservazione del momento angolare è che la forza sia sempre radiale.

3. Relazione fra E e L_z :

Nell'oscillatore armonico isotropo tanto E quanto L_z sono costanti del moto: ciò vuol dire che possiamo avere moti con valori arbitrari di ciascuna? Dalle definizioni che abbiamo dato si ricavano facilmente le relazioni:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 + B^2) \\ L_z &= m \omega AB \sin(\psi - \varphi). \end{aligned} \tag{26-6}$$

Dalle (26-6), sfruttando la disuguaglianza $A^2 + B^2 \geq 2AB$, dove l'uguaglianza si ha sse $A = B$, si ottiene la condizione

$$E \geq \omega |L_z|$$

e per l'uguaglianza si richiede $\varphi = \psi \pm \pi/2$ (perché sia $|\sin(\varphi - \psi)| = 1$) e poi $A = B$. Queste sono esattamente le condizioni per avere traiettoria circolare: *a parità di energia, il momento angolare massimo si ha per un moto circolare.*

Forza ed energia potenziale

Abbiamo visto che per l'oscillatore armonico isotropo è possibile introdurre un'energia potenziale V , funzione soltanto della posizione, tale che la somma $T + V$ sia una costante del moto: si generalizza così il risultato trovato per un solo grado di libertà. Vogliamo ora discutere le seguenti questioni:

- che relazione c'è tra V e la forza \vec{F} ?
- in quali casi, diversi da quello particolare qui studiato, esiste un'energia potenziale con le stesse proprietà?

La risposta alla prima domanda si trova guardando perché $E = T + V$ è una costante del moto. Scriviamo come varia l'energia cinetica tra l'istante t e l'istante $t + dt$, tenendo presente che in quest'intervallo di tempo la posizione del punto materiale varia di $d\vec{r} = \vec{v} dt$ e la velocità varia di $d\vec{v} = \vec{a} dt$:

$$dT = \frac{1}{2}m d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = m\vec{v} \cdot \vec{a} dt = (m\vec{a}) \cdot (\vec{v} dt) = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (26-7)$$

Se vogliamo che l'energia totale si conservi, dovrà dunque essere

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy, \quad (26-8)$$

in qualunque punto, e per qualsiasi spostamento $d\vec{r}$, ossia per arbitrari dx e dy .

Quanto a dV , pensandola funzione delle coordinate cartesiane, e ricordando quanto detto alla fine del Cap. 10, possiamo scrivere

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$$

e il confronto con la (26-8) ci porta subito a

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \quad (26-9)$$

Le (26-9) sono le cercate relazioni tra forza ed energia potenziale, e si vede che esse danno un'immediata generalizzazione della relazione $F = -V'$, che avevamo trovata per il caso di un solo grado di libertà. Resta il secondo problema: se è data la forza (e quindi le sue componenti F_x , F_y , in ogni punto del piano, come funzioni di x , y) come possiamo trovare V ? o meglio: sarà sempre possibile trovare una funzione $V(x, y)$ che soddisfi le (26-9)?

La risposta in generale è *no*; ma abbiamo il

Teorema: Per un campo centrale V esiste sempre, ed è data da una primitiva di $-F_r$.

Dim.: L'espressione $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ che compare nella (26-8) si riduce a $F_r dr$, perché la forza è radiale; inoltre F_r dipende solo da r perché la forza è addirittura centrale. Se prendiamo $V(r)$ in modo che sia $F_r = -V'(r)$ abbiamo

$$dV = V'(r) dr = -F_r dr = -\vec{F} \cdot d\vec{r},$$

e la (26-8) è soddisfatta. ■

Corollario: Vediamo che per un campo centrale l'energia potenziale dipende soltanto da r .

Osservazione: Abbiamo dimostrato che una forza centrale è sempre conservativa, e abbiamo visto come determinare l'energia potenziale; ciò non vuol dire però che soltanto le forze centrali siano conservative. Un esempio lo vedremo nel prossimo capitolo.

27. L'oscillatore armonico bidimensionale anisotropo

In questo capitolo vogliamo studiare un caso più generale di quello trattato nel cap. prec., e che ha frequenti applicazioni. Ci limiteremo ancora al moto in un piano, ma supponendo solo che la forza sia conservativa, e che esista una posizione di equilibrio stabile O . In queste condizioni è intuitivo che il punto materiale oscillerà intorno ad O , almeno se non lo scostiamo troppo. Il moto che risulta potrà essere anche molto complicato, ma si semplifica se si accetta un'approssimazione, consistente nel limitarsi alle *piccole oscillazioni*.

L'approssimazione delle piccole oscillazioni

Abbiamo supposto la forza conservativa (ma non necessariamente centrale): ciò vuol dire che esiste un'energia potenziale V , e che le componenti cartesiane della forza sono legate a V dalle (26-9):

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Il fatto che O sia una posizione di equilibrio stabile significa in primo luogo che \vec{F} si annulla in O . Inoltre la forza deve opporsi all'allontanamento da O : questo non richiede che essa sia radiale, ma solo che la sua componente radiale sia *negativa*, ossia che $\vec{r} \cdot \vec{F} < 0$. Prendendo l'origine delle coordinate cartesiane in O , avremo

$$xF_x + yF_y \leq 0, \quad (27-1)$$

col segno = valido soltanto in O .

Facendo opportune ipotesi di differenziabilità, la funzione V potrà essere approssimata, in un intorno di O , e a meno di termini di ordine superiore al secondo, da un polinomio di secondo grado in x, y :

$$V = V_0 + hx + ky + a_{xx}x^2 + 2a_{xy}xy + a_{yy}y^2.$$

Possiamo sempre disporre della costante arbitraria esistente in V per fare $V_0 = 0$; quanto ai termini lineari, essi sono nulli, perché i loro coefficienti (a parte il segno) danno le componenti di \vec{F} in O , che è posizione di equilibrio. Abbiamo così:

$$V = a_{xx}x^2 + 2a_{xy}xy + a_{yy}y^2$$

e da qui

$$\begin{aligned} F_x &= -2a_{xx}x - 2a_{xy}y \\ F_y &= -2a_{xy}x - 2a_{yy}y. \end{aligned} \quad (27-2)$$

Usando le (27-2) si vede subito che la (27-1) equivale a richiedere che V sia sempre positiva fuori dell'origine (sia una forma quadratica *definita positiva*);

in tal caso si dimostra che è sempre possibile scegliere l'orientamento degli assi cartesiani in modo che scompaia il termine misto $2a_{xy}xy$ (che la forma quadratica risulti *diagonale*):

$$V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2$$

con k_x, k_y costanti *positive*.

Dunque nella nostra approssimazione la forza riesce *lineare* nello spostamento:

$$F_x = -k_x x, \quad F_y = -k_y y,$$

e perciò l'oscillatore è armonico, ma in generale *non isotropo*. Solo se $k_x = k_y$ si ha isotropia: infatti allora $V = \frac{1}{2}kr^2$, e la forza è centrale: $\vec{F} = -k\vec{r}$.

Equazioni del moto e integrale generale

Le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_x x &\Rightarrow &\quad \ddot{x} = -\omega_x^2 x \\ m\ddot{y} &= -k_y y &\Rightarrow &\quad \ddot{y} = -\omega_y^2 y \end{aligned} \tag{27-3}$$

dove

$$\omega_{x,y} = \sqrt{\frac{k_{x,y}}{m}}.$$

L'integrale generale delle (27-3) è

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_x t - \varphi) = a \cos \omega_x t + a' \sin \omega_x t \\ y &= B \cos(\omega_y t - \psi) = b \cos \omega_y t + b' \sin \omega_y t. \end{aligned}$$

Il moto è ancora confinato nel rettangolo di lati $2A, 2B$, come nel caso isotropo, ma *in generale non è periodico*: lo è sse ω_x/ω_y è *razionale*. Infatti x ha periodo $T_x = 2\pi/\omega_x$, e y ha periodo $T_y = 2\pi/\omega_y$; il moto sarà periodico sse questi due periodi hanno un multiplo comune:

$$T = n_x T_x = n_y T_y,$$

e allora

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{T_y}{T_x} = \frac{n_x}{n_y},$$

che è la tesi.

Nel caso di moto periodico la traiettoria può assumere le forme più diverse, dette *figure di Lissajous*, tanto più complicate quanto più gli interi n_x, n_y (ridotti primi fra loro) sono grandi. Alcuni esempi sono dati nelle figure.

Il caso irrazionale

S'intuisce che a maggior ragione il moto sarà complicato se le frequenze sono incommensurabili, e infatti vale il

Teorema: Se le frequenze sono incommensurabili la traiettoria è densa nel rettangolo.

Dim.: Scelto un punto (\bar{x}, \bar{y}) gli istanti t_k ai quali si ha $x = \bar{x}$ sono dati da $\bar{x} = A \cos(\omega_x t_k - \varphi)$. Ci basta prendere in considerazione solo i t_k spazati di T_x :

$$t_k = t_0 + kT_x.$$

Sia ora $\bar{\vartheta}$ tale che $B \cos \bar{\vartheta} = \bar{y}$; posto

$$\vartheta_k = \omega_y t_k - \psi \pmod{2\pi}$$

dimostriamo che esiste un ϑ_k vicino quanto si vuole a $\bar{\vartheta}$.

Osserviamo che i ϑ_k sono tutti diversi, perché ω_y/ω_x è irrazionale: allora nell'insieme $\{\vartheta_0 \dots \vartheta_N\}$ esistono $\vartheta_{k'}, \vartheta_{k''}$ tali che $|\vartheta_{k'} - \vartheta_{k''}| < 2\pi/N$ (principio “dei cassetti,” o “dei nidi di piccione”). Ne segue che se poniamo $\eta_r = \vartheta_0 + r(\vartheta_{k'} - \vartheta_{k''})$ è sempre $|\eta_{r+1} - \eta_r| < 2\pi/N$. Gli istanti corrispondenti sono

$$t_0 + r(t_{k'} - t_{k''}) = t_0 + r(k' - k'')T_x,$$

e in almeno uno di questi sarà $|\vartheta - \bar{\vartheta}| < 2\pi/N$, da cui $|y - \bar{y}| < 2\pi B/N$. ■

Osservazione 1: Abbiamo dimostrato che la traiettoria passa vicino quanto si vuole a un punto comunque scelto nel rettangolo, il che è cosa del tutto diversa dal dire che passa per qualunque punto. Anzi questo è impossibile: sapreste dimostrarlo?

Osservazione 2: Questo teorema mostra quanto possa essere complicato il moto di un sistema con due soli gradi di libertà, anche se lineare; eppure questa complicazione è niente, rispetto a quello che accade allo stesso sistema se si fa cadere l'approssimazione lineare: il sistema in genere diventa *caotico*.

Le costanti del moto

Per l'oscillatore armonico anisotropo sono ancora costanti E_x ed E_y (e quindi E). Dato che la forza non è radiale, non si conserva più il momento angolare; la cosa inattesa è che *non esiste nessun'altra costante del moto indipendente*. Limitiamoci a dare l'idea essenziale della dimostrazione, tralasciando i dettagli: si basa sul fatto che anche nello spazio delle fasi (4-dimensionale) la traiettoria è densa nel sottoinsieme di livello di E_x ed E_y . Basta allora supporre che l'ipotetica costante del moto sia funzione continua di x, y, v_x, v_y per concludere che essa, dovendo rimanere costante sulla traiettoria, sarà costante su tutto il sottoinsieme, e sarà quindi funzione di E_x, E_y .

In questo senso l'oscillatore anisotropo è un sistema più "povero" di quello isotropo; ma in realtà il primo è il caso ordinario. La presenza di tre costanti del moto nel caso isotropo è legata a una proprietà particolare: l'invarianza per rotazioni. Rimandiamo la prova di ciò a corsi superiori.

Ancora più inatteso è un altro risultato generale: neppure la presenza di due costanti del moto è la regola per un sistema con due gradi di libertà. Al contrario, basta uscire dal caso lineare per incontrare sistemi (conservativi) la cui sola costante del moto è l'energia. Questa situazione è strettamente connessa col comportamento caotico, cui abbiamo accennato sopra.

Una notazione storica: per quanto possa sembrare incredibile, solo in tempi recentissimi la conoscenza di fatti come questo si è ampiamente diffusa tra i fisici, e ne è nato un nuovo settore di ricerche.

28. L'oscillatore armonico in tre dimensioni

Lo studio dell'oscillatore armonico tridimensionale, isotropo o anisotropo, non richiede sostanziali aggiunte a quanto già visto in due dimensioni, tranne in un punto. Vediamolo ora rapidamente.

L'oscillatore isotropo

Abbiamo ancora $\vec{F} = -k\vec{r}$: la forza è centrale, quindi conservativa, perché la dimostrazione data nel Cap. 26 si estende tale e quale al caso tridimensionale, e si ha sempre

$$V = \frac{1}{2}kr^2.$$

Dunque esiste la costante del moto E , che si può scrivere come somma di tre costanti del moto:

$$E = E_x + E_y + E_z,$$

con

$$E_x = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad \text{ecc.}$$

Inoltre, e sempre con un'ovvia generalizzazione dei ragionamenti fatti nel Cap. 26, si vede che il *vettore momento angolare*

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

si conserva, e fornisce dunque altre *tre* costanti del moto.

In totale abbiamo così 6 costanti del moto, che *non possono essere indipendenti*. È perciò naturale proporre il seguente

Esercizio (di alta acrobazia): Trovare la relazione tra $E_x, E_y, E_z, L_x, L_y, L_z$. L'alta acrobazia consiste nel fatto che è molto difficile arrivarci, se non si sa il trucco; e anche sapendolo, la soluzione non è precisamente semplice!

Moto piano

La cosa più interessante nel problema tridimensionale è la seguente: *Qualunque siano le condizioni iniziali, il moto si svolge tutto in un piano per O*. Ciò si vede dal fatto che per definizione il vettore \vec{L} è sempre ortogonale a \vec{r} : poiché \vec{L} ha direzione costante, ne segue che \vec{r} deve sempre stare nel piano per O ortogonale a \vec{L} (fig. 28-1).

È ovvio che questo risultato non è particolare dell'oscillatore armonico, ma vale tutte le volte che la forza (in 3 dimensioni) è radiale: *il moto in un campo di forza radiale è sempre piano*.

Ne segue che il caso tridimensionale non dà niente di nuovo, quanto a possibili traiettorie ecc., rispetto a quello bidimensionale: avremo sempre traiettorie ellittiche tutte con lo stesso periodo, e così via.

S'intende che anche se il moto è sempre piano, il piano in cui si svolge non è sempre lo stesso, ma dipende dalle condizioni iniziali: sarà il piano per O che contiene il punto di partenza e il vettore \vec{v} (fig. 28-2).

Un argomento di simmetria

Se la forza è non solo radiale, ma anche centrale, al risultato che il moto dev'essere piano si può arrivare con un argomento di simmetria, che detto in termini sbrigativi suona così: consideriamo il piano π per O che contiene posizione e velocità iniziali. Questo è un piano di simmetria sia per le condizioni iniziali, sia per il campo di forza: dunque il moto deve svolgersi tutto in quel piano, perché non c'è nessuna ragione che il punto si porti in uno dei due semispazi, piuttosto che nell'altro (fig. 28-3).

Messa in questi termini, sembra che si tratti di una necessità logica (il "principio di ragion sufficiente" di Leibniz); ma abbiamo già discusso questo punto, e sappiamo che solo i fatti sperimentali possono darci il fondamento del nostro discorso. In effetti, si vede subito che se in quelle condizioni il moto non fosse piano, verrebbe violata l'equivalenza fra destra e sinistra: se infatti vi fosse un esperimento in cui, data una forza centrale, il punto materiale devia dal piano di simmetria, ad es. verso sinistra, potremmo usare quell'esperimento come criterio obbiettivo per definire la sinistra in tutti i laboratori, semplicemente comunicando le modalità dell'esperimento. I fatti ci dicono che ciò non accade.

Naturalmente non c'è bisogno di fare l'esperimento, se crediamo che la meccanica newtoniana dia una corretta descrizione della realtà, perché in essa l'equivalenza di destra e sinistra è già contenuta, attraverso la richiesta che la forza sia un vettore polare, come l'accelerazione.

Con la terminologia introdotta al Cap. 24a, abbiamo la seguente situazione: se la forza è centrale, sussiste invarianza rispetto alla simmetria per il piano che passa per O e contiene posizione e velocità iniziali. Poiché le condizioni iniziali sono simmetriche, la simmetria si deve conservare durante il moto, che quindi deve svolgersi tutto in quello stesso piano.

L'oscillatore anisotropo

Anche in questo caso si ragiona come in quello bidimensionale; solo che ora l'energia potenziale è una forma quadratica in *tre* variabili. Potremo scegliere gli assi in modo da avere

$$V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$$

ossia tre oscillatori armonici (unidimensionali) lungo i tre assi cartesiani; le costanti k_x , k_y , k_z saranno in generale diverse. La forza è conservativa ma non centrale, per cui si hanno le costanti del moto E_x , E_y , E_z ma non più \vec{L} . La traiettoria è sempre inclusa in un parallelepipedo rettangolo centrato in O, ma

in generale *non è piana*; il moto non è periodico, a meno che le tre frequenze non siano commensurabili, ecc.

Resta vero che in generale la traiettoria è densa nel parallelepipedo, e che non ci sono altre costanti del moto tranne le tre energie; ma la dimostrazione è meno semplice.

29. Riepilogo su energia e momento angolare

È opportuno presentare a questo punto un riassunto di tutto quanto abbiamo visto fin qui a proposito delle due grandezze meccaniche per le quali abbiamo dimostrato proprietà di conservazione: l'energia e il momento angolare. Per ora dobbiamo limitarci al caso di un singolo punto materiale; ma alcune delle cose che diremo hanno validità più generale.

Ricordiamo anzitutto che parleremo di forza *radiale* se esiste un punto O (centro della forza) tale che in ogni altro punto P la forza è sempre diretta come \overrightarrow{OP} (concorde o discorde, non importa). Diremo che la forza è *centrale* se oltre ad essere radiale, ha un modulo e un verso che dipendono solo dalla distanza di P da O.

L'energia

Perché si possa parlare di conservazione dell'energia meccanica occorre in primo luogo che non ci siano effetti dissipativi, il che richiede che le forze agenti non dipendano dalla velocità, ma soltanto dalla posizione del punto. Per il caso di un solo grado di libertà, ciò è sufficiente:

Proposizione 1: Un sistema con un solo grado di libertà, in cui le forze dipendano soltanto dalla posizione, è conservativo, e l'energia potenziale si calcola come primitiva (cambiata di segno) della componente tangenziale della forza.

Ricordiamo ancora la

Proposizione 2: Tutte le volte che esiste, l'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria, che si ripresenta anche nell'espressione dell'energia totale.

In due o più dimensioni occorrono ulteriori condizioni perché una forza sia conservativa: in forma differenziale abbiamo

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (29-1)$$

che in componenti cartesiane si scrive

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (29-2)$$

Il significato della (29-1) è che

Proposizione 3: Il lavoro della forza è uguale alla variazione dell'energia potenziale, cambiata di segno.

Osservazione 1: Questa proposizione, che è espressa in forma differenziale, può essere enunciata anche in forma "integrale": il lavoro della forza *su qualunque percorso eguaglia la variazione dell'energia potenziale tra gli estremi del percorso*. Ciò implica che tale lavoro debba essere lo stesso su *tutti* i percorsi che uniscono

due dati punti. Una formulazione equivalente è: il lavoro si annulla su tutti i percorsi chiusi.

Nota: A rigore la condizione differenziale non è equivalente a quella integrale: è possibile trovare situazioni in cui *localmente* vale la (29-1), eppure esistono cammini chiusi su cui il lavoro non è nullo. Non riteniamo però opportuno entrare in dettagli.

Non abbiamo discusso come verificare se un dato campo di forze può soddisfare le (29-2): abbiamo solo dimostrato la

Proposizione 4: Una forza centrale è sempre conservativa, e l'energia potenziale è la primitiva della componente radiale della forza, cambiata di segno.

Osservazione 2: Occorre parlare di "componente radiale," e non di modulo, per tener conto del verso della forza.

Controesempio: Il campo di forza definito da

$$F_x = -ky, \quad F_y = kx, \quad F_z = 0$$

non soddisfa le (29-2) per nessuna V , e infatti si verifica (esercizio) che il lavoro lungo una circonferenza nel piano (x, y) con centro nell'origine e raggio r vale $2\pi kr^2$. Non si tratta di un esempio fittizio: si può ottenere questo campo di forza su di una carica, se la si mette in un campo magnetico uniforme che cresce linearmente nel tempo; e si può usare questa tecnica per accelerare particelle cariche ("betatrone").

Il momento angolare

Il momento angolare è un vettore (assiale) definito da

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

e abbiamo visto che

Proposizione 5: In un moto piano il modulo del momento angolare è uguale al valore assoluto della velocità areale moltiplicato per $2m$, mentre il verso è quello attorno al quale il moto è antiorario.

Abbiamo poi dimostrato:

Proposizione 6: Condizione necessaria e sufficiente perché il momento angolare sia una costante del moto, è che il campo di forze sia puramente radiale.

Infine

Proposizione 7: Se il momento angolare (vettore) è una costante del moto, la traiettoria sta tutta nel piano ortogonale al momento angolare e che contiene il centro della forza.