23a. Il pendolo

Molte delle idee che abbiamo introdotte nei capitoli dal 20 al 22 trovano applicazione nello studio del pendolo, che è un sistema meccanico di grande interesse sia teorico, sia sperimentale. La sua prima schematizzazione è il "pendolo semplice."

Il pendolo semplice

Si tratta di un punto materiale vincolato a muoversi (senza attrito) lungo una circonferenza verticale (fig. 23a–1). Le forze agenti su m sono: il peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e la reazione $\vec{T}$ del vincolo, di grandezza incognita, ma direzione certamente radiale. Si noti che il vincolo è supposto bilatero, per cui il verso di $\vec{T}$ può essere qualsiasi.

Abbiamo dunque

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T},$$

le cui componenti tangenziale e normale sono:

$$\begin{aligned} ml\ddot{\vartheta} &= -mg\sin\vartheta \\ -ml\dot{\vartheta}^2 &= mg\cos\vartheta + T_r \end{aligned} \qquad (23a\text{–}1)$$

avendo indicato con T_r la componente radiale di $\vec{T}$ (che in figura è < 0).

La prima delle (23a–1) si scrive

$$\ddot{\vartheta} = -\omega_0^2 \sin\vartheta \qquad \left(\omega_0 = \sqrt{g/l}\right) \qquad (23a\text{–}2)$$

che si chiama "equazione del pendolo semplice"; la seconda serve solo a determinare T_r, se interessa. Si noti che dalla (23a–2) è scomparsa la massa: questa, come sappiamo, è una caratteristica di tutti i moti in cui la sola forza attiva (ossia non vincolare) è la gravità.

Poiché il sistema è conservativo, la (23a–2) ammette l'integrale primo dell'energia, che possiamo scrivere direttamente:

$$E = T + V = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + mgl\,(1 - \cos\vartheta) \qquad (23a\text{–}3)$$

(attenzione alla scelta dello zero per V!). Alla (23a–3) si arriva anche moltiplicando la (23a–2) per $\dot{\vartheta}$ e integrando:

$$\tfrac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 - \omega_0^2\cos\vartheta = \text{cost.} = \frac{E}{ml^2} - \omega_0^2.$$

Se poi sostituiamo dalla (23a–3) nella seconda delle (23a–1) troviamo

$$T_r = -\frac{2E}{l} - 3mg\cos\vartheta + 2mg.$$

Dalla (23a–3) si vede che avremo diversi moti, a seconda del valore di E:

a) Se $E < 2mgl$, esiste un $\vartheta = \vartheta_{\max}$, nel quale $\dot\vartheta = 0$: il moto è un'oscillazione fra $+\vartheta_{\max}$ e $-\vartheta_{\max}$, e si ha $E = mgl\,(1 - \cos\vartheta_{\max})$; per $\vartheta = \vartheta_{\max}$, $T_r = -mg\cos\vartheta_{\max}$. Si vede che se $\vartheta_{\max} > \pi/2$, $T_r > 0$: perciò il vincolo non può essere realizzato con un filo.

b) Se $E > 2mgl$, non si ha mai $\dot\vartheta = 0$: il moto è una rotazione (non uniforme) attorno al punto di sospensione. In questo caso il massimo di T_r si ha per $\vartheta = \pi$, e vale $5mg - 2E/l$, che è > 0 se $E < \frac{5}{2}mgl$. Solo se $E > \frac{5}{2}mgl$ si può usare un filo.

c) $E = 2mgl$ è un caso limite: lo si può avere col pendolo fermo nella posizione più alta (equilibrio instabile), oppure con un moto che si avvicina a quella posizione senza mai raggiungerla (v. più avanti).

Ci sono numerosi sistemi meccanici che sono descritti dalla stessa equazione del pendolo semplice, e che hanno interesse pratico: citiamo tra gli altri il pendolo balistico, il pendolo composto, il sismografo a pendolo. In tutti i casi si tratta di sistemi il cui studio richiede nozioni di dinamica dei sistemi, per cui ne parleremo nel seguito. Dato che però l'equazione del moto è la stessa del pendolo semplice, ad essi potranno applicarsi tutte le conclusioni che trarremo dalla discussione di questo.

L'approssimazione delle piccole oscillazioni

Accade spesso che nel moto del pendolo interessino solo condizioni iniziali tali che $\vartheta_{\max}$ è piccolo. Allora ϑ rimane piccolo durante tutto il moto, ed è lecita un'approssimazione: confondere nella (23a–2) $\sin\vartheta$ con ϑ. Se si fa questo, l'equazione diventa

$$\ddot\vartheta = -\omega_0^2\vartheta,$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico. Si ottiene quindi per il periodo:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (23a–4)$$

che esprime la *legge d'isocronismo* del pendolo (Galileo): il periodo *delle piccole oscillazioni* di un pendolo semplice *dipende solo dalla sua lunghezza.* Incidentalmente, sulla (23a–4) si basa il metodo classico di misura di g: quello che fu usato fin dal '600 per verificare la variazione dell'accelerazione di gravità con la latitudine (Cap. 17).

Abbiamo finora parlato di "piccole oscillazioni," ma non abbiamo ancora detto che cosa vuol dire "piccole." Per capirlo, occorre avere qualche idea di come varia il periodo del pendolo quando si abbandona l'approssimazione che porta all'isocronismo. A questo scopo scriviamo — senza giustificarla — un'espressione del periodo ancora approssimata, ma che già contiene la dipendenza da $\vartheta_{\max}$:

$$T = T_0\left[1 + \tfrac{1}{16}\,\vartheta_{\max}^2 + O(\vartheta_{\max}^4)\right] \qquad (23a–5)$$

dove T_0 è quello dato dalla (23a–4), e $\vartheta_{\max}$ è misurato in radianti.

Possiamo usare la (23a–5) per vedere quanto è buona l'approssimazione delle piccole oscillazioni: se ad es. vogliamo un errore relativo sul periodo inferiore all'1%, la (23a–5) ci dice che $\vartheta_{\max}$ non deve superare $0.4\,\mathrm{rad} = 23°$. Se invece il pendolo è quello di un orologio, che non deve sbagliare più di un secondo al giorno anche se l'ampiezza delle oscillazioni varia, si trova $\vartheta_{\max} < 0.8°$.

Diagrammi di fase

Il moto del pendolo si descrive bene nel piano delle fasi, come abbiamo fatto nel Cap. 20, usando le coordinate $x = \vartheta$ e $u = \dot{\vartheta}/\omega_0$ (fig. 23a–2). Già sappiamo che le traiettorie di fase sono curve di livello dell'energia: la loro equazione è perciò

$$u^2 + 4\sin^2\frac{x}{2} = \text{cost.} = u_0^2 \qquad (23a\text{–}6)$$

(basta usare la (23a–3), e ricordare che $1 - \cos\vartheta = 2\sin^2(\vartheta/2)$). La costante u_0 dà il valore di u per $x = 0$.

Dalla (23a–6) si vede che se u_0 è sufficientemente piccolo lo stesso accade per x (ossia per ϑ); allora si può confondere il seno col suo argomento, e le curve integrali sono approssimativamente cerchi (come nell'oscillatore armonico). Ma questo non è più vero se u_0 è dell'ordine dell'unità.

Comunque finché $|u_0| < 2$ esistono due valori di x (tra loro opposti) per i quali u si annulla: si tratta dei *punti d'inversione* del moto. Di conseguenza le curve integrali sono *chiuse*.

Se invece $|u_0| > 2$ i punti d'inversione non esistono, e u conserva sempre lo stesso segno: come sono fatte allora le curve integrali? Per rispondere, occorre prima di tutto tener presente che l'angolo ϑ è una coordinata polare, e quindi va preso in un intervallo di ampiezza 2π: ad es. $[-\pi, \pi]$. Ciò vuol dire che nel piano (x, u) solo una striscia verticale ha significato, e inoltre che bisogna intendere che il bordo destro e quello sinistro della striscia *corrispondono agli stessi stati fisici*; in altre parole, si dovrebbe vedere la striscia richiusa su se stessa e "cucita" ai bordi, in modo da formare un cilindro.

Ciò posto, una traiettoria in cui sia sempre $u > 0$, e che perciò è sempre orientata verso destra, esce dal bordo di destra e rientra da quello di sinistra, chiudendosi su se stessa: a questo corrisponde un moto del pendolo che ruota attorno al punto di sospensione, come abbiamo già visto. Se invece $u < 0$ il moto è in senso opposto, ma ha le stesse caratteristiche.

Ci sono infine dei casi limite: $u_0 = \pm 2$. La (23a–6) diventa in questo caso

$$u = \pm 2\cos\frac{x}{2},$$

che dà due archi di sinusoide passanti per i punti $(\pi, 0)$ e $(-\pi, 0)$. Però attenzione: in realtà le due traiettorie *non raggiungono* quei punti: in queste condizioni il periodo del pendolo *è infinito* (ma non lo dimostriamo).

In realtà i due punti $(\pi, 0)$ e $(-\pi, 0)$ (che poi sono un unico punto, per quanto detto prima) danno un'ultima possibile traiettoria, corrispondente alla posizione di equilibrio instabile in cui il pendolo è fermo alla massima altezza.

Abbiamo così ritrovato i risultati della discussione fatta all'inizio del capitolo; i vari tipi di curve integrali sono indicate in fig. 23a–2.

24. L'oscillatore armonico smorzato

Per quanto importante sia l'oscillatore armonico, si tratta sempre di un'idealizzazione: non solo perché si suppone la forza elastica, ma anche perché si trascura qualsiasi effetto dissipativo (attriti e simili). È perciò di grande interesse cercare di mantenere per quanto possibile la semplicità matematica dello schema, avvicinandolo però alla realtà fisica. Le proprietà importanti dell'oscillatore armonico sono due, come abbiamo visto: si tratta di un sistema *autonomo* e *lineare*; cercheremo dunque di conservare queste proprietà.

Definizioni

Conviene anzitutto precisare la terminologia, che è stata introdotta nel Cap. 21 senza insistere sulle definizioni. Diremo che un sistema della forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(x, v, t)\\ \dot{v} &= f(x, v, t)\end{aligned}$$

è *lineare* se le funzioni f e g sono lineari *nelle incognite* x e v:

$$f(x, v, t) = a(t)\,x + b(t)\,v + c(t)$$

e analoga per g. Abbiamo volutamente esplicitato che i coefficienti a, b, c possono essere funzioni del tempo; naturalmente se il sistema è autonomo a, b, c si ridurranno a costanti. Se tanto in f quanto in g manca il *termine noto* c, il sistema si dice *omogeneo*. Nel seguito, per brevità, dicendo "lineare" sottintenderemo anche "omogeneo," salvo diverso avviso.

L'oscillatore armonico è dunque lineare, e cercheremo di mantenerlo tale aggiungendo però una forza che produca lo *smorzamento* del moto. È facile vedere che con queste condizioni l'espressione più generale possibile per la forza è

$$F = -kx - \chi v = -m\,(\omega_0^2 x + \gamma v),$$

dove accanto alla forza elastica $F_\mathrm{e} = -kx$ abbiamo aggiunto una *resistenza viscosa* $F_\mathrm{r} = -\chi v$, e abbiamo definito

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \qquad \gamma = \chi/m.$$

Il cambiamento di notazione da ω a ω_0 ha una motivazione che risulterà chiara nel seguito. Chiameremo il sistema fisico così definito *oscillatore armonico smorzato.*

Con la solita definizione $u = v/\omega_0$ si ottiene allora il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_0 u\\ \dot{u} &= -\omega_0 x - \gamma u.\end{aligned} \tag{24–1}$$

Discussione qualitativa

Nel piano delle fasi il campo **w** non è più ortogonale alla direzione OP, ma ha sempre una componente "centripeta" (fig. 24–1). Questo si vede anche calcolando

$$\frac{d}{dt}\,(x^2+u^2) = 2x\dot{x} + 2u\dot{u} = -2\gamma u^2 \le 0 \qquad (24\text{–}2)$$

ossia sulle traiettorie la distanza da O diminuisce sempre (con l'unica eccezione dei punti in cui $u = 0$): si tratta di *spirali* (fig. 24–2). Tutte le traiettorie tendono a O, che è perciò un *attrattore*, ma il tempo di avvicinamento *è infinito.* Questo si dimostra, senza bisogno di risolvere il sistema, al modo seguente.

Sia P_0 il punto di partenza, e P_1 il punto raggiunto dopo un giro, ossia la prima intersezione della traiettoria col segmento OP_0. Definiamo analogamente P_2, ecc. Indichiamo con α il rapporto fra i segmenti $\overline{\mathrm{OP}_0}$ e $\overline{\mathrm{OP}_1}$: sarà $\alpha > 1$. Dato che il sistema (24–1) è lineare e autonomo, l'arco di traiettoria che va da P_1 a P_2 si otterrà dall'arco $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ contraendo tutte le distanze da O del fattore α (omotetia) e sarà percorso nello stesso tempo T. Dunque i punti $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \ldots$ vengono raggiunti ai tempi $T, 2T, \ldots$ ∎

Nota 1: Abbiamo incidentalmente dimostrato un'altra proprietà dell'oscillatore armonico smorzato: le traiettorie di fase sono tutte *autosimili*, ossia esiste una similitudine (in realtà infinite) che trasforma ciascuna traiettoria in se stessa.

Nota 2: La dimostrazione che abbiamo data non vale se lo smorzamento è così grande che la traiettoria non completa un giro. Una volta scritto l'integrale generale del sistema, potremo vedere se e quando il risultato sul tempo infinito e quello sull'autosimilitudine delle traiettorie restino validi.

L'energia nei sistemi dissipativi

L'oscillatore armonico smorzato non soddisfa le ipotesi nelle quali, al cap. prec., abbiamo trovato l'integrale primo dell'energia. Se l'energia viene vista soltanto come un integrale primo, due soli casi sono possibili: o esso esiste (e allora è utile studiarlo) o non esiste, e il discorso è chiuso. Ma se l'energia è una grandezza fisica, possiamo provare a calcolarla anche quando il sistema è soggetto a forze non conservative, come accade nel nostro caso. Per un tale sistema potremo parlare di energia cinetica, e anche dell'energia potenziale della forza elastica; però la somma $T + V$ non resterà costante, a causa della presenza di un'altra forza, non conservativa.

La (24–2) si può scrivere

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}mv^2\right) = \tfrac{1}{2}k\,\frac{d}{dt}(x^2+u^2) = -k\gamma u^2 = -m\gamma v^2 = -\chi v^2.$$

Questa relazione può essere trasformata al modo seguente:

$$dE = -\chi v^2 dt = F_{\mathrm{r}} v\, dt = F_{\mathrm{r}}\, dx. \qquad (24\text{–}3)$$

Il prodotto $F_\mathrm{r}\,dx$ tra forza e spostamento si chiama, com'è noto, *lavoro* della forza; abbiamo quindi dimostrato che *la variazione dell'energia del sistema eguaglia il lavoro della forza dissipativa* (che è sempre negativo, perché la forza d'attrito è sempre opposta alla velocità, e quindi allo spostamento).

Possiamo interpretare la (24–3) in questo modo: il lavoro della forza esterna (in questo caso la forza di attrito) misura l'energia trasferita al sistema. Nel caso che stiamo esaminando, dato che il lavoro della forza di attrito è sempre negativo, il trasferimento è negativo, ossia l'energia viene trasferita in senso contrario: dal sistema verso l'esterno.

In realtà nelle condizioni attuali l'energia (meccanica) non si conserva: non esiste nessun altro oggetto che aumenti la sua energia potenziale o cinetica. In un certo senso perciò parlando di "energia trasferita" stiamo mettendo il carro avanti ai buoi: si può parlare di trasferimento solo per qualcosa che si conserva. È noto che per ripristinare la conservazione dell'energia in presenza di effetti dissipativi bisogna introdurre altre forme di energia, ossia entrare nella termodinamica.

Ricerca dell'integrale generale

Non è facile vedere quale possa essere la soluzione del sistema (24–1). Per i sistemi lineari esiste, come abbiamo già accennato, un algoritmo di risoluzione; ma piuttosto che presentarlo *ex abrupto*, preferiamo arrivarci per tentativi.

Osserviamo che sappiamo già risolvere il problema in due casi particolari:

– Se $\chi = 0$ abbiamo il semplice oscillatore armonico non smorzato, e le traiettorie sono cerchi col centro nell'origine.

– Se $\omega_0 = 0$ manca la forza elastica e ci si riduce al moto in mezzo viscoso. In questo secondo caso possiamo sempre scegliere l'origine delle x nel punto limite del moto, e allora la traiettoria è una semiretta, lungo la quale tanto x quanto v decrescono esponenzialmente nel tempo.

Sembra naturale aspettarsi che il caso generale prenda proprietà da entrambi i casi particolari, ossia che ci sia una rotazione intorno ad O, ma allo stesso tempo un avvicinamento a questo punto (del resto abbiamo già visto che le traiettorie sono spirali convergenti in O). Siamo dunque portati a congetturare una soluzione della forma

$$x = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi), \tag{24–4}$$

dove A e φ saranno le solite costanti arbitrarie, mentre α e ω sono da determinare in modo che la (24–4) sia soluzione del sistema (24–1).

Se calcoliamo $\dot{x}$ dalla (24–4) troviamo poi u dalla prima delle (24–1):

$$u = \frac{\dot{x}}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{\omega_0}A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) - \frac{\omega}{\omega_0}A\,e^{-\alpha t}\sin(\omega t - \varphi)$$

e da qui otteniamo $\dot{u}$:

$$\dot{u} = \frac{\alpha^2}{\omega_0} A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) + \frac{2\alpha\omega}{\omega_0}\,A\,e^{-\alpha t}\sin(\omega t - \varphi) - \frac{\omega^2}{\omega_0}\,A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi).$$

Sostituendo nella seconda delle (24–1) le espressioni per $\dot{u}$, x e u si arriva alla seguente relazione:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\omega_0}\,A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) + \frac{2\alpha\omega}{\omega_0}\,A\,e^{-\alpha t}\sin(\omega t - \varphi) - \frac{\omega^2}{\omega_0}\,A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) = \\ -\,\omega_0 A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) + \frac{\gamma\alpha}{\omega_0}\,A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi) + \frac{\gamma\omega}{\omega_0}\,A\,e^{-\alpha t}\sin(\omega t - \varphi).\end{aligned}$$

Dividendo per $A\,e^{-\alpha t}$ e raccogliendo i termini simili:

$$\left(\frac{\alpha^2}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0} + \omega_0 - \gamma\frac{\alpha}{\omega_0}\right)\cos(\omega t - \varphi) + \left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0} - \frac{\gamma\omega}{\omega_0}\right)\sin(\omega t - \varphi) = 0.$$

Questa può essere un'identità soltanto se i coefficienti del seno e del coseno sono entrambi nulli:

$$\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \gamma\alpha = 0, \qquad 2\alpha - \gamma = 0$$

dalle quali si ottengono

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \tfrac{1}{4}\gamma^2}. \tag{24–5}$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\begin{aligned} x &= \quad A\,e^{-\gamma t/2}\cos(\omega t - \varphi) \\ u &= -A\,e^{-\gamma t/2}\left[\frac{\omega}{\omega_0}\,\sin(\omega t - \varphi) + \frac{\gamma}{2\omega_0}\,\cos(\omega t - \varphi)\right]\end{aligned} \tag{24–6}$$

dove ω è dato dalla (24–5), è una soluzione del sistema (24–1), comunque si scelgano A, φ. Si verifica senza difficoltà che le (24–6) danno l'integrale generale, in quanto è possibile soddisfare tutte le condizioni iniziali.

Come per l'oscillatore armonico puro, possiamo scrivere le (24–6) in altre forme, ad es.

$$x = a\,e^{-\gamma t/2}\cos\omega t + b\,e^{-\gamma t/2}\sin\omega t \tag{24–7}$$

(è inutile scrivere l'espressione per u, che si ottiene derivando). La (24–7) mostra di nuovo che l'integrale generale si ottiene per combinazione lineare di due integrali particolari; abbiamo già detto che ciò accade sempre, con le equazioni differenziali lineari (omogenee).

Interpretazione del risultato

L'interpretazione delle (24–6) (o della (24–7)) è abbastanza semplice: si tratta di oscillazioni sinusoidali *smorzate*, il che vuol dire che l'ampiezza delle oscillazioni, anziché restare costante, decresce esponenzialmente al passare del tempo (fig. 24–3). La costante di tempo per il decremento dell'ampiezza è $2/\gamma$.

Il moto non è periodico, ma si usa parlare anche in questo caso di periodo, riferendosi ovviamente alla parte sinusoidale. Si vede dalla (24–5) che sarà sempre $\omega < \omega_0$: il periodo dell'oscillatore smorzato è maggiore di quello che si avrebbe in assenza di smorzamento. La differenza però è di secondo ordine nel rapporto γ/ω_0, e perciò spesso può essere trascurata se lo smorzamento è piccolo.

Nota: Non abbiamo mai usato fin qui il termine *frequenza*, ma è necessario accennare alla terminologia in uso. A stretto rigore la frequenza è l'inverso del periodo: $\nu = 1/T$; ha dimensioni $[\nu] = [t]^{-1}$, e unità di misura $\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}$. Spesso si usa però la stessa parola per indicare $\omega = 2\pi\nu$; qualcuno distingue tra "frequenza ciclica" per ν e "frequenza angolare" per ω. Il problema delle dimensioni e dell'unità di misura per ω è naturalmente legato a quello degli angoli (v. Cap. 19): l'uso più corrente è di misurare ω in rad/s.

Abbiamo già visto che l'energia non si conserva, ma decresce; ora possiamo vedere più in dettaglio come. Dalle (24–6) si ottiene

$$\begin{aligned}
E &= \tfrac{1}{2}k\,(x^2+u^2) \\
&= \tfrac{1}{2}kA^2\,e^{-\gamma t}\left[\left(1+\frac{\gamma^2}{4\,\omega_0^2}\right)\cos^2(\omega t-\varphi)+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\,\sin^2(\omega t-\varphi)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\,\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2}\,\sin(\omega t-\varphi)\cos(\omega t-\varphi)\right]\\
&= \tfrac{1}{2}kA^2\,e^{-\gamma t}\left[1+\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\,\cos 2(\omega t-\varphi)+\frac{\gamma\omega}{2\omega_0^2}\,\sin 2(\omega t-\varphi)\right].
\end{aligned}$$

Il secondo e il terzo termine in parentesi quadra oscillano intorno a zero, e i loro coefficienti sono piccoli se $\gamma \ll \omega_0$ (un caso di grande interesse pratico). Possiamo dunque trascurarli, e scrivere

$$E \simeq \tfrac{1}{2}kA^2\,e^{-\gamma t} \simeq E_0\,e^{-\gamma t}, \tag{24–8}$$

da cui si vede che *l'energia decresce* anch'essa *esponenzialmente nel tempo*, con costante di tempo $1/\gamma$.

Esercizio: Verificare che la grandezza $x^2 + u^2 + \gamma x u/\omega_0$ decresce *esattamente* secondo una legge esponenziale, con costante di tempo $1/\gamma$.

Si definisce *fattore di merito* il rapporto $Q = \omega_0/\gamma$, che è tanto più grande quanto più lo smorzamento è piccolo. Un'interpretazione di Q è la seguente: l'energia dell'oscillatore decresce di un fattore $1/e$ nel tempo $1/\gamma = Q/\omega_0 \simeq$

$QT/2\pi$. Dunque $Q/2\pi$ è il numero di periodi necessari per tale decremento dell'energia. Oppure: derivando la (24–8) abbiamo

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma E \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{E} = -\gamma\, dt.$$

Ne segue che in un periodo la variazione relativa dell'energia è

$$\frac{\Delta E}{E} = -\gamma T = -\frac{2\pi}{Q}.$$

Alcune indicazioni di ordine di grandezza per Q: per un pendolo si va da 10^3 a 10^4; per i cristalli di quarzo usati negli orologi $Q \sim 10^5$. Uscendo dall'ambito meccanico, si può sempre definire un fattore di merito ogni volta che si ha un sistema oscillante. Esempi: nei circuiti risonanti elettrici (LC) il fattore di merito arriva intorno a 300; le cavità per microonde vanno fino a 10^6; oscillatori atomici o molecolari arrivano a 10^9; oscillazioni nucleari a 10^{12}.

Smorzamento critico e oltre

Si sarà notato che l'espressione di ω data nella (24–5) è reale solo se $\gamma \le 2\omega_0$; quando questa condizione non è soddisfatta dovremmo dunque ricominciare da capo nella ricerca delle soluzione? In realtà no, come vedremo fra poco; inoltre sono più frequenti e importanti le situazioni in cui la condizione è soddisfatta.

Il caso $\gamma = 2\omega_0$ si chiama di smorzamento *critico*; in tal caso $\omega = 0$, ma nasce un'altra difficoltà: le (24–6) non danno più l'integrale generale. Infatti esse diventano

$$\begin{aligned} x &= A\cos\varphi\, e^{-\omega_0 t} \\ u &= -A\cos\varphi\, e^{-\omega_0 t} \end{aligned}$$

e si vede che le due costanti arbitrarie A e φ compaiono soltanto nella combinazione $A\cos\varphi$. Perciò cambiare φ equivale a cambiare A, e non abbiamo più realmente *due* costanti arbitrarie, ma soltanto *una*. La stessa cosa si vede anche dalla (24–7), dove il secondo termine sparisce e resta solo la costante arbitraria a. Lasciamo al lettore di verificare che in queste condizioni l'integrale generale è

$$x = (a + b\,t)\, e^{-\omega_0 t}.$$

Soluzioni complesse

Vogliamo ora mostrare come si possa arrivare, in modo più semplice e sistematico, all'integrale generale del nostro problema con una tecnica che generalizza quella usata per l'oscillatore armonico "puro," e che fa intervenire i numeri complessi.

Ripartiamo dal sistema (24–1), che differisce da quello dell'oscillatore armonico puro per il termine addizionale γu. Nel caso puro siamo riusciti a trasformare il sistema in un'unica equazione per la variabile complessa $z = x+iu$; possiamo fare ancora lo stesso? Certamente non funziona sommare le due equazioni dopo aver moltiplicato la seconda per i, a causa del termine γu; proviamo allora una posizione più generale: $z = x + \lambda u$, dove λ sarà un coefficiente (probabilmente complesso) da determinare. Troviamo:

$$\dot{x} + \lambda\dot{u} = \omega_0 u - \lambda\omega_0 x - \lambda\gamma u = -\lambda\omega_0 \left(x + \frac{\lambda\gamma - \omega_0}{\lambda\omega_0}\, u \right).$$

Tutto funzionerà bene se nella parentesi a secondo membro avremo $x+\lambda u$, perché allora l'equazione diventerà

$$\dot{z} = -\lambda\omega_0 z, \tag{24–9}$$

che sappiamo risolvere. Dobbiamo dunque richiedere

$$\frac{\lambda\gamma - \omega_0}{\lambda\omega_0} = \lambda,$$

ossia

$$\omega_0\lambda^2 - \gamma\lambda + \omega_0 = 0.$$

Questa per λ è un'equazione di secondo grado, le cui radici sono

$$\lambda = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\,\omega_0^2}}{2\omega_0} = \frac{\gamma}{2\omega_0} \pm \frac{i}{2\omega_0}\sqrt{4\,\omega_0^2 - \gamma^2} = \frac{\gamma}{2\omega_0} \pm i\,\frac{\omega}{\omega_0},$$

dove ω è di nuovo quello definito dalla (24–5). La prima forma è più utile se $\gamma > 2\omega_0$, la seconda nel caso opposto; infatti nel primo caso λ è reale, mentre nel secondo è complesso (le due radici sono fra loro coniugate).

Discussione

Conviene dunque distinguere tre casi, a seconda che sia

1) $\gamma > 2\omega_0$: chiameremo questo il caso *aperiodico*
2) $\gamma = 2\omega_0$: abbiamo già detto che questo prende il nome di caso *critico*
3) $\gamma < 2\omega_0$: questo è il caso *oscillante*.

Nel caso aperiodico le due radici sono reali, positive e distinte; di conseguenza anche z sarà reale. Se indichiamo le radici con λ_1 e λ_2, avremo in corrispondenza due soluzioni per z:

$$z_1 = z_{10}\, e^{-\lambda_1\omega_0 t}, \qquad z_2 = z_{20}\, e^{-\lambda_2\omega_0 t}.$$

Poiché deve essere

$$z_1 = x + \lambda_1 u$$
$$z_2 = x + \lambda_2 u$$

eliminando u si trova l'integrale generale

$$x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\lambda_1 z_{20} \, e^{-\lambda_2 \omega_0 t} - \lambda_2 z_{10} \, e^{-\lambda_1 \omega_0 t} \right) \tag{24–10}$$

dove z_{10}, z_{20} sono due costanti arbitrarie *reali.*

La ragione del nome "aperiodico" è che in questo caso non ci sono oscillazioni: infatti entrambi i termini della (24–10) decadono nel tempo con legge esponenziale.

Il caso critico è stato già brevemente trattato, e non occorre aggiungere altro.

Nel caso oscillante invece l'integrale generale dalla (24–9) è

$$z = z_0 \, e^{-\lambda \omega_0 t}$$

che conviene riscrivere

$$z = z_0 \, e^{-\gamma t/2} \, e^{\mp i \omega t}.$$

Il doppio segno ricorda che esistono due radici, e corrisponde alle due scelte possibili (i oppure $-i$) che avevamo per l'oscillatore armonico puro. Le due radici sono tra loro coniugate, e come si vede dall'equazione, il loro prodotto vale 1: ne segue $|\lambda| = 1$.

Dato che la soluzione è complessa, lo stesso è vero per la condizione iniziale z_0, che dunque contiene sufficienti informazioni per fornire anche l'integrale generale del sistema di partenza. Per coerenza con quello che abbiamo fatto allora, terremo anche qui il segno meno:

$$z = z_0 \, e^{-\gamma t/2} \, e^{-i \omega t}. \tag{24–11}$$

È interessante osservare che nel piano complesso z la (24–11) rappresenta una *spirale logaritmica*, che si avvolge in senso orario attorno all'origine (fig. 24–4). Solo in questo caso, e non negli altri, si può parlare di autosimilitudine: infatti

$$z(t + T) = z(t) \, e^{-\gamma T/2}$$

perché il termine $e^{-i\omega t}$ ha periodo $2\pi/\omega = T$. Dunque dopo il tempo T posizione e velocità si riproducono con una riduzione in scala, ecc.

Come si ricava x dalla (24–11)? Sarebbe sbagliato prendere semplicemente la parte reale, perché λ non è immaginario puro. Se scriviamo le due relazioni

$$\begin{aligned} z \; &= x + \lambda \; u \\ z^* &= x + \lambda^* u \end{aligned}$$

ed eliminiamo u, troviamo

$$x = \frac{\lambda z^* - \lambda^* z}{\lambda - \lambda^*}. \tag{24–12}$$

Si noti che in realtà nella (24–12) entrano tutt'e due le soluzioni, esattamente come nella (24–10), attraverso z e z^*.

Possiamo semplificare la (24–12) se scriviamo in modo diverso la relazione fra z, x e u. Invece di $z = x + \lambda u$ poniamo

$$z = i\,\frac{\omega_0}{\omega}\left(\frac{x}{\lambda} + u\right)$$

(questa non è che la vecchia z moltiplicata per $i\omega_0/\lambda\omega$): allora si verifica, giocando un po' con i numeri complessi, che in luogo della (24–12) vale

$$x = \Re z \tag{24–13}$$

(qui $\Re$ sta per "parte reale") e che perciò le (24–6) si ottengono prendendo

$$z_0 = Ae^{i\varphi}.$$

È chiaro che anche con la nuova definizione di z resta valida l'equazione differenziale (24–9), e perciò la sua soluzione (24–11).

Osserviamo che dalla (24–11) si ricava immediatamente

$$|z|^2 = |z_0|^2\,e^{-\gamma t},$$

che fa pensare all'andamento nel tempo dell'energia, dato dalla (24–8). La cosa non è casuale: infatti

$$|z|^2 = zz^* = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{x}{\lambda} + u\right)\left(\frac{x}{\lambda^*} + u\right) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,(x^2 + u^2 + \frac{\gamma}{\omega_0}\,xu).$$

Già sappiamo che $x^2 + u^2$ è proporzionale all'energia; il terzo termine è poco importante per due ragioni:
– è sempre piccolo se $\gamma \ll \omega_0$
– è un termine oscillante, il cui valor medio è di secondo ordine in γ/ω_0.

Possiamo dunque dire che in sostanza $|z|^2$ misura l'energia dell'oscillatore (a parte un fattore costante).

Riflessione finale

Abbiamo visto che in questo problema è molto utile usare numeri complessi, grazie ai quali abbiamo ridotto il sistema di equazioni differenziali a una sola equazione di primo ordine; abbiamo anche visto che si finisce sempre per cadere in una soluzione di tipo esponenziale. È naturale chiedersi il perché di questi fatti.

Si potrebbe credere che la riduzione di due equazioni a una sola, ma con incognita complessa, dipenda dal fatto che un numero complesso equivale a due reali, ma non è così; lo stesso risultato vale per sistemi di equazioni differenziali di qualsiasi ordine e in qualunque numero, purché lineari: *è la linearità il fattore decisivo.*

Osserviamo che nel piano delle fasi (x, u) il campo $\mathbf{w}$ delle velocità dipende linearmente dal vettore posizione $\mathbf{r}$: possiamo vedere questa dipendenza lineare come una matrice:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

o in forma più astratta:

$$\mathbf{w} = U\mathbf{r}.$$

Il calcolo che abbiamo fatto è stato semplicemente la ricerca degli *autovettori* di U. Sia infatti $\mathbf{r}_1$ un autovettore: abbiamo chiamato $-\lambda\omega_0$ il corrispondente autovalore, avendo così

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = U\mathbf{r}_1 = -\lambda\omega_0\mathbf{r}_1, \tag{24–11}$$

e da qui segue tutto il resto. C'è solo un problema: non è affatto detto che una matrice reale abbia sempre autovettori e autovalori; l'equazione che determina gli autovalori può avere radici complesse. Ecco dove entrano in modo determinante i numeri complessi: ci assicurano la possibilità di trovare gli autovalori (almeno uno). Se due o più radici coincidono — caso critico — nascono altri problemi, come abbiamo visto: problemi che si risolvono, ma non possiamo qui entrare in dettagli.

Lo scalare $z = x + \lambda u$ è una componente del vettore $\mathbf{r} = (x, u)$ del piano delle fasi nella base formata dagli autovettori di U. Sfortunatamente il prezzo per questa semplificazione è che bisogna lavorare in uno spazio vettoriale sul corpo complesso, altrimenti gli autovettori in generale non esistono.

Dalla (24–11) già si vede che la soluzione sarà un'esponenziale, ma anche per questo c'è un motivo più profondo. La (24–11) è un'equazione di primo ordine, per cui lo spazio vettoriale delle sue soluzioni è unidimensionale: trovato un integrale particolare, tutti gli altri sono multipli di quello, con un fattore costante. D'altra parte il sistema è autonomo, il che vuol dire che se $\mathbf{r}(t)$ è una soluzione, anche $\mathbf{r}(t - \tau)$ lo è, per ogni τ: dunque $\mathbf{r}(t - \tau)$ si ottiene da $\mathbf{r}(t)$ moltiplicandolo per una costante. Ora la sola funzione che goda di questa proprietà è proprio l'esponenziale!

Riassumendo: l'intervento dei numeri complessi è motivato dalla necessità di trovare autovettori della matrice U che compare a secondo membro di un sistema differenziale *lineare*; la comparsa dell'esponenziale deriva dalla sua proprietà caratteristica, di moltiplicarsi per un fattore costante per effetto di una traslazione. Dobbiamo perciò aspettarci la stessa situazione tutte le volte che incontreremo un sistema autonomo lineare, anche al di fuori della meccanica.

24a. Simmetrie e invarianze

Abbiamo già avuto occasione nei cap. precedenti di mettere in evidenza alcune proprietà di simmetria dei sistemi in esame. Vogliamo dedicare questo capitolo a una discussione dell'argomento da un punto di vista un po' più generale.

Simmetria e invarianza

È bene cominciare precisando i termini che adotteremo; infatti in questo argomento, che pure riveste grandissima importanza nella fisica moderna, non c'è sempre accordo sull'esatto significato delle parole che si usano.

Chiameremo *trasformazione di simmetria* (o brevemente *simmetria*) una qualsiasi trasformazione alla quale verranno assoggettate le grandezze fisiche del sistema. Esempi di simmetrie che abbiamo già incontrato sono le traslazioni temporali, le rotazioni, le riflessioni (destra–sinistra), il passaggio da un riferimento inerziale a un altro, ecc.

Diremo invece *invarianza* un particolare comportamento del sistema per effetto di una trasformazione di simmetria: abbiamo visto ad es. che un sistema autonomo è invariante per traslazioni temporali, che molti sistemi sono invarianti per riflessioni, che il principio di relatività esprime l'invarianza per la trasformazione fra riferimenti inerziali... Dobbiamo ora precisare questi concetti.

Riprendiamo in considerazione il primo esempio: le traslazioni temporali. Possiamo esprimerlo così: eseguo un esperimento oggi, e lo ripeto domani; in questo caso l'unico cambiamento sta nella grandezza *tempo*. Mi chiedo: i risultati dei due esperimenti saranno gli stessi? In termini formali, ciò equivale a sostituire nelle equazioni del fenomeno la variabile t con $t - \tau$ (*simmetria*) e vedere se le equazioni restano inalterate (*invarianza*). Nei casi che abbiamo visto finora questo accade sempre, ma attenzione: ciò non significa che siano invarianti le soluzioni, cioè che sia $x(t) = x(t - \tau)$!

Ci aspettiamo solo che se $x(t)$ è una soluzione, lo sia anche $x(t - \tau)$, ossia che *l'insieme delle soluzioni sia invariante*. Se l'esperimento è la caduta di un sasso, $x(t) \neq x(t - \tau)$, perché il sasso cade, e la sua x cambia nel tempo; ma se $x = \frac{1}{2}gt^2$ è una soluzione, lo è anche $x = \frac{1}{2}g(t - \tau)^2$: il sasso cadrà allo stesso modo domani.

Questo appare così ovvio che non si vede come potrebbe essere diverso; eppure, a stretto rigore, se ad es. tengo conto della forza di marea prodotta dalla Luna, l'accelerazione di gravità cambia nel tempo e l'invarianza non c'è più! Un esempio più banale: se sto facendo oscillare un pendolo, e la sua lunghezza dipende dalla temperatura, non potrò aspettarmi invarianza se la temperatura cambia nel tempo, ecc.

Abbiamo visto che nei diagrammi di fase l'invarianza per traslazioni temporali si esprime nel fatto che non occorre introdurre il tempo come coordinata, e che le curve integrali sono parametrizzate *a meno di una costante additiva arbitraria.*

Invarianze dell'oscillatore armonico

L'oscillatore armonico (ideale o smorzato) possiede l'invarianza per traslazioni temporali, ma non è la sola. Il modo più semplice per scoprirne altre è di esaminare il campo delle velocità nel piano delle fasi. Dalla fig. 24–1, e dalle corrispondenti equazioni (24–1), si vede che una rotazione di 180° attorno all'origine, che equivale a cambiare segno tanto a x quanto ad u, lascia inalterato il campo di velocità, ossia le citate equazioni. In poche parole, la simmetria

$$x \mapsto -x, \quad u \mapsto -u$$

è un'invarianza dell'oscillatore armonico (anche smorzato).

Ciò significa che se $x(t)$ è un moto possibile, lo è anche $-x(t)$ (ovviamente con altre condizioni iniziali). Ma cambiare x in $-x$ significa invertire l'orientamento dell'asse x: l'invarianza che abbiamo trovata si esprime perciò brevemente dicendo che per l'oscillatore armonico *destra e sinistra sono equivalenti.*

Ora ci possiamo chiedere: anche restando nei sistemi con un solo grado di libertà, sarà solo l'oscillatore armonico ad avere questa invarianza? Si vede facilmente che la risposta è no: tutto quello che occorre è che la forza che agisce sia una funzione *dispari* della posizione e della velocità.

Per chiarezza, ripetiamo in altra forma la conclusione cui siamo arrivati: tutte le volte che il punto materiale è soggetto a una forza *dispari* (nel senso detto sopra) accade questo: se a partire da certe condizioni iniziali x_0, v_0 risulta un certo moto $x(t)$, siamo certi che partendo dalle condizioni iniziali opposte $-x_0$, $-v_0$, avremo il moto descritto da $-x(t)$, che rimane a ogni istante simmetrico del primo. Possiamo dunque dire anche che l'invarianza consiste nel fatto che una data simmetria *si conserva nel tempo.* È per questo motivo che nel gergo dei fisici di oggi si parla spesso di *simmetrie conservate.*

In particolare, se le condizioni iniziali sono esse stesse *simmetriche* (ossia invarianti rispetto alla trasformazione di simmetria considerata) la simmetria si deve mantenere. Nel caso dell'oscillatore armonico questa osservazione dà un risultato interessante, perché c'è una sola condizione iniziale simmetrica: quella in cui il punto si trova nell'origine con velocità nulla. Ne ricaviamo che lì deve restare, cioè che si tratta di una posizione di equilibrio. La cosa appare ovvia, ma è utile scoprire che ci si può arrivare con sole considerazioni di simmetria, e soprattutto vedere qual è il modo esatto di condurre il ragionamento.

L'inversione del tempo

Esiste un'importante invarianza che è posseduta dall'oscillatore armonico ideale, ma non da quello smorzato: l'invarianza per *inversione del tempo.* Si tratta di una proprietà che abbiamo già discussa al Cap. 22, ma che ora inquadreremo nel discorso generale delle invarianze.

La trasformazione di simmetria in questione è

$$t \mapsto -t, \quad x \mapsto x, \quad u \mapsto -u. \tag{24a–1}$$

Se dimentichiamo per un momento la trasformazione di t, nel piano delle fasi stiamo portando ciascun punto nel suo simmetrico rispetto all'asse x, ma si vede dalla fig. 21–2 che il campo $\mathbf{w}$ non resta invariato: la velocità nel punto $(x, -u)$ non è la simmetrica di quella nel punto (x, u). Ricordiamo però che abbiamo invertito anche t: ciò ha per effetto di cambiare segno a entrambe le componenti di $\mathbf{w}$, e il risultato finale è quello desiderato: *sotto la simmetria* (24a–1) *il campo delle velocità è invariante*. La stessa cosa si vede anche direttamente guardando le equazioni (21–2).

L'interpretazione fisica di questa invarianza è quella che nel Cap. 22 abbiamo chiamata "reversibilità": è naturale quindi che valga per l'oscillatore armonico ideale, che è un sistema conservativo, e non per quello smorzato. Se infatti applichiamo l'inversione del tempo all'oscillatore smorzato, troviamo che le traiettorie originarie, che sono spirali che si chiudono, si trasformano in spirali che si aprono: passiamo dunque da oscillazioni la cui ampiezza decresce nel tempo, a oscillazioni di ampiezza *crescente*. Si noti che il punto essenziale non è che che negli oscillatori reali l'ampiezza sia sempre decrescente, ma solo che la simmetria in questione ci porta da un certo sistema (l'oscillatore smorzato) a uno diverso: dunque *non si tratta di un'invarianza*.

Esercizio 1: Quali delle invarianze fin qui discusse valgono per il pendolo (anche al di là delle piccole oscillazioni)?

Esercizio 2: È possibile trovare simmetrie che sono invarianze dell'oscillatore armonico, ma non del pendolo? (La risposta può essere intuita per via geometrica, ma la sua discussione completa richiede la meccanica analitica, che esce dal nostro programma).

L'invarianza per traslazioni spaziali

Esistono ovviamente altre simmetrie che non sono invarianze per l'oscillatore armonico, ma lo sono per altri sistemi: vediamo un esempio.

Consideriamo la *traslazione spaziale* (sempre limitandoci a una sola dimensione):

$$x \mapsto x + a.$$

È chiaro che questa non è un'invarianza per l'oscillatore armonico: infatti il campo delle velocità ha un punto fisso, che non resta lo stesso se si esegue la traslazione.

Più in generale ciò accade tutte le volte che esiste una forza, con una sola eccezione: se questa *non dipende dalla posizione* del punto materiale. Tutti gli esempi visti al Cap. 20, escluso l'oscillatore armonico, rientrano in questa classe, come mostrano le figure 20–4, 20–6, 20–8, 20–10, dalle quali si vede che il campo delle velocità resta invariato per una traslazione della x. Le figure 20–5, 20–7, 20–9, 20–11 mostrano la stessa cosa per le traiettorie di fase.

Per maggior chiarezza, ripetiamo in parole il significato dell'invarianza per traslazioni spaziali, considerando ad es. il caso della caduta dei gravi. Possiamo usare il solito principio del taccuino: se due fisici eseguono un esperimento di caduta dei gravi, in due laboratori posti a diversa altezza, i loro appunti sono indistinguibili. Si capisce anche che abbiamo dovuto trascurare la variazione della forza di gravità con la quota: a stretto rigore i due esperimenti daranno risultati leggermente diversi, il che vuol dire che l'invarianza è solo approssimata.