

## 21. L'oscillatore armonico

Com'è noto, si chiama oscillatore armonico un sistema meccanico (in uno o più gradi di libertà) costituito da un punto materiale soggetto a una forza di richiamo proporzionale (e opposta) allo spostamento dalla posizione di equilibrio. In un grado di libertà, l'equazione del moto è stata già scritta, sotto forma di sistema del primo ordine, nel Cap. 20:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x \quad (\omega^2 = k/m),\end{aligned}\tag{21-1}$$

essendo  $k$  la costante della forza:  $F = -kx$ .

Prima di discutere il sistema (21-1), vogliamo esaminare, almeno in parte, le ragioni per cui l'oscillatore armonico ha una così grande e diffusa importanza in tante parti della fisica.

### Equilibrio e piccole oscillazioni

Supponiamo di aver a che fare con un sistema meccanico, anche complesso, che abbia una posizione di *equilibrio stabile*: ciò vuol dire che in quella posizione le forze agenti su ciascuno dei punti del sistema hanno risultante nulla (si fanno equilibrio), e inoltre che uno spostamento (una deformazione) del sistema dalla posizione di equilibrio, almeno se non è troppo grande, produce forze che tendono a riportare il sistema nella posizione di partenza (forze di *richiamo*).

Supponiamo inoltre che il sistema *non sia dissipativo*: ossia che non ci siano attriti, resistenze del mezzo, ecc.; in altre parole, che le forze presenti dipendano solo dagli spostamenti, ma non dalle velocità. Ciò non sarà mai esattamente vero, ma in molti casi sarà un'approssimazione sufficientemente buona della realtà.

L'ambito delle situazioni in cui tutto ciò accade è assai esteso:

- i corpi solidi elastici (in particolare molle e simili)
- un liquido in un recipiente non completamente pieno, sotto l'azione della gravità
- pendoli, bilance, e in generale sistemi di uno o più corpi rigidi, vincolati a ruotare attorno a un asse non verticale, per effetto del loro peso
- gas racchiusi in recipienti con qualche parete mobile.

Se anche il sistema ha più di un grado di libertà, si potranno spesso analizzare separatamente i diversi moti possibili (quanto meno, questo è vero nell'approssimazione lineare: v. dopo); perciò il caso di un solo grado di libertà è un utile punto di partenza per lo studio di sistemi più complicati. Vedremo in seguito, e lo si vedrà più a fondo in corsi successivi, che i sistemi diversi da un semplice punto materiale non presentano proprietà sostanzialmente diverse da questo, e ciò spiega perché sia importante conoscere bene il comportamento del sistema più semplice.

Ci siamo dunque ridotti a un semplice punto materiale, che possiamo supporre mobile lungo una retta, e soggetto a una legge di forza  $F(x)$  della quale sappiamo soltanto che si annulla in una certa posizione (che possiamo sempre prendere come origine delle  $x$ ), e che ha segno contrario a  $x$ , almeno in un certo intervallo intorno a quel punto (fig. 21-1). Basterà allora fare l'ipotesi che la  $F(x)$  sia derivabile, per poter scrivere

$$F(x) = -kx + o(x),$$

dove  $k$  è una costante *positiva*:  $k = -F'(0)$ .

Una forza che soddisfi esattamente la legge

$$F(x) = -kx$$

si chiama *elastica*; siamo quindi arrivati a concludere che *per spostamenti abbastanza piccoli* da una posizione di equilibrio stabile, ogni legge di forza può essere approssimata con una *forza elastica*, e quindi il corrispondente sistema meccanico è *approssimato da un oscillatore armonico*.

Una seconda ragione per cui l'oscillatore armonico è tanto importante, sta nella semplicità della sua equazione del moto: più esattamente, nel fatto che si tratta di un'equazione *lineare*. Vedremo nel seguito le conseguenze di questa proprietà matematica; per ora osserviamo soltanto che è proprio la linearità a consentire quell'analisi separata dei diversi moti possibili per un sistema con più gradi di libertà, di cui dicevamo all'inizio. Quando l'approssimazione lineare non sia lecita, il problema diventa immediatamente più complicato (a parte casi fortunati).

### Determinazione delle soluzioni

Nella discussione del sistema (21-1) conviene usare, in luogo di  $v$ , la grandezza  $u$  definita da  $u = v/\omega$  (si noti che  $u$  ha la dimensione di una lunghezza). Allora le (21-1) si scrivono

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega u \\ \dot{u} &= -\omega x. \end{aligned} \tag{21-2}$$

Nel piano delle fasi  $(x, u)$  introduciamo l'ordinaria metrica euclidea; allora il campo  $\mathbf{w}$  ha modulo  $\omega r$ , è ortogonale alla direzione OP ed è diretto in senso orario (fig. 21-2). È quindi chiaro che le traiettorie:

- sono cerchi con centro in O
- sono percorse con velocità angolare  $\omega$ .

In formule:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t - \varphi) \\ u &= -A \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \tag{21-3}$$

e le costanti  $A$ ,  $\varphi$  sono determinate dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos(\omega t_0 - \varphi) \\ u_0 &= -A \sin(\omega t_0 - \varphi) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + u_0^2} \\ \varphi &= \omega t_0 + \arg(x_0, u_0). \end{aligned} \quad (21-4)$$

La costante  $A$  si chiama *ampiezza* del moto; da essa si ottiene un'altra costante importante:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + u^2) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

che ha un significato fisico ben noto: si tratta infatti dell'*energia*. L'esistenza di questa costante del moto non è una particolarità dell'oscillatore armonico, come vedremo più avanti.

Il significato fisico di  $\varphi$  è il seguente: rappresenta la *fase* dell'oscillazione. All'istante  $t = \varphi/\omega$  si ha  $x = A$ ,  $\dot{x} = 0$ , ossia il punto si trova fermo alla massima *elongazione* positiva. Dunque moti con la stessa ampiezza (con la stessa energia) e fasi diverse differiscono tra loro solo per un ritardo costante, dato da  $\Delta\varphi/\omega$ , dove  $\Delta\varphi$  è la differenza delle fasi (che si chiama di solito *sfasamento*).

### Esame qualitativo

Vogliamo ora mostrare che alcune proprietà dell'oscillatore armonico si possono ricavare dalla semplice osservazione della fig. 21-3, che mostra le traiettorie di fase. Tutte le traiettorie sono chiuse (sono *cicli*): questo basta ad assicurarci che il moto è sempre *periodico*. Se infatti il moto inizia nel punto  $P_0$  all'istante  $t_0$ , esso tornerà in  $P_0$  a un istante successivo  $t_0 + T$ ; dato che si tratta di un sistema autonomo, il moto seguente riprodurrà in tutti i particolari quello nell'intervallo  $[t_0, t_0 + T]$ , e lo stesso accadrà nei successivi passaggi. Possiamo quindi affermare che il grafico della funzione  $x(t)$  consisterà di tanti archi tutti uguali, corrispondenti a intervalli temporali di lunghezza  $T$ . Questo  $T$  si chiama, com'è noto, *periodo* del moto.

Si potrebbe ritenere che questo non sia un gran risultato, visto che è già contenuto nelle (21-3) (le funzioni circolari sono periodiche); ma il punto importante è ci si può arrivare senza bisogno di risolvere il sistema (21-2). Basta sapere che esiste una costante del moto, e che le sue curve di livello sono chiuse. Infatti le traiettorie debbono coincidere con queste curve di livello, quindi sono chiuse, quindi il moto è periodico. . .

Ne segue che possiamo applicare lo stesso argomento anche per una forza non elastica (per la quale potremmo non essere capaci di risolvere le equazioni del moto) purché resti vero che c'è una costante del moto con curve di livello chiuse.

Nel caso dell'oscillatore armonico abbiamo qualcosa di più: il periodo è sempre lo stesso, qualunque sia l'ampiezza (*isocronismo*). Questa proprietà non

varrebbe per un'altra legge di forza, ed è una caratteristica fondamentale dell'oscillatore armonico. Come possiamo spiegarla? Si vede subito che è una delle conseguenze della linearità delle equazioni (21-2): se si moltiplicano  $x$  e  $u$  per una stessa costante, le equazioni restano inalterate; ne segue che se abbiamo trovato una certa soluzione (con una certa ampiezza e un certo periodo) ne abbiamo subito infinite altre, con ampiezza qualsiasi ma sempre con lo stesso periodo. Inoltre il periodo non può dipendere dalla fase (sistema autonomo) e quindi è vero che il periodo è lo stesso per tutti i moti possibili.

Un altro risultato di carattere qualitativo è il seguente: il campo  $\mathbf{w}$  ha un solo *punto fisso* (un punto dove  $\mathbf{w} = 0$ ). Se si parte da quel punto, si ottiene una traiettoria che consiste solo di quel punto, ossia un equilibrio. Il punto fisso è unico, perché l'energia ha un solo minimo; vedremo poi che in altri sistemi le cose possono andare diversamente.

### Integrale generale e condizioni iniziali

Dovrebbe essere evidente che le (21-3) ci danno l'*integrale generale* dell'oscillatore armonico: infatti contengono due costanti arbitrarie, che possiamo scegliere, come mostrano le (21-4), in modo da soddisfare tutte le possibili condizioni iniziali. È utile rivedere le stesse cose dal punto di vista dell'equazione differenziale di partenza (quella di secondo ordine):

$$\ddot{x} = -\omega^2 x.$$

Ne abbiamo trovato l'integrale generale nella forma

$$x = A \cos(\omega t - \varphi)$$

che si può anche scrivere:

$$x = A \cos \omega(t - t_1) \tag{21-5}$$

oppure

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \tag{21-6}$$

dove abbiamo posto

$$\varphi = \omega t_1, \quad a = A \cos \varphi, \quad b = A \sin \varphi.$$

In qualunque forma, ci sono *due* costanti arbitrarie, che vanno determinate con le *condizioni iniziali*; ma fin qui abbiamo solo una verifica, in un caso particolare, del teorema enunciato nel Cap. 20.

Le due forme (21-5) e (21-6) sono però interessanti per i seguenti motivi: nella (21-5) accanto all'ampiezza, che già conosciamo, compare la costante  $t_1$ , che misura in termini di tempo la fase del moto. Diventa così evidente

*l'invarianza per traslazioni temporali*: se  $x = h(t)$  è una soluzione, lo è anche  $x = h(t - \tau)$ ,  $\forall \tau$ .

Dalla forma (21-6) appare un risultato nuovo: tutte le soluzioni si ottengono come *combinazione lineare* dei due *integrali particolari*

$$f = \cos \omega t, \quad g = \sin \omega t.$$

Dunque: *le soluzioni dell'equazione differenziale  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  formano uno spazio vettoriale di dimensione 2*. Questa è una caratteristica generale delle equazioni differenziali *lineari omogenee*.

### Uso dei numeri complessi

Esiste un altro metodo per risolvere il sistema (21-2): introduciamo la variabile complessa  $z = x + iu$  e sommiamo le due equazioni, dopo aver moltiplicato la seconda per  $i$ . Otteniamo

$$\dot{z} = -i\omega z, \quad (21-7)$$

che è un'equazione differenziale di primo ordine per l'unica funzione incognita (a valori complessi)  $z(t)$ .

Con questo espediente siamo dunque passati da un sistema di due equazioni a un'equazione sola; il che può sembrare banale, dato che in realtà la (21-7) equivale ancora a due equazioni: una per la parte reale e una per la parte immaginaria di  $z$ . Così doveva essere, perché altrimenti la nuova equazione non potrebbe essere equivalente al sistema originario; ma resta un grande vantaggio, perché risolvere la (21-7) è molto più immediato. Infatti, ricordando le proprietà della funzione esponenziale, si verifica subito che tutte le soluzioni della (21-7) hanno la forma

$$z = z_0 e^{-i\omega t}. \quad (21-8)$$

Questo è l'integrale generale della (21-7), perché contiene una costante arbitraria (complessa)  $z_0$ : una sola basta, dato che l'equazione è del primo ordine. Anzi si vede che  $z(0) = z_0$  e perciò sappiamo come trovare l'integrale particolare che soddisfa una data condizione iniziale al tempo  $t = 0$ .

*Osservazione*: In luogo di  $z = x + iu$  avremmo potuto porre  $z = x - iu$ : la differenza sarebbe stata che nella (21-8), e in tutte le formule che seguiranno, avremmo dovuto scambiare  $i$  con  $-i$ . Come abbiamo visto nel Cap. 20a, questo succede perché la coniugazione complessa è un automorfismo, per cui scambiare  $i$  con  $-i$  non cambia la struttura matematica. Di conseguenza la doppia possibilità non ha nessun significato fisico, ma crea il problema di dover fare una scelta convenzionale — e come tale arbitraria — che però va rispettata con coerenza. Purtroppo l'uso non è uniforme: la scelta qui adottata è quella corrente in fisica, nello studio delle onde come nella meccanica quantistica; viceversa la teoria dei circuiti elettrici in corrente alternata adotta tradizionalmente la convenzione opposta. Perciò attenzione!

Il piano complesso di  $z$  coincide col piano delle fasi; perciò la (21-8) mostra subito quello che già sapevamo, ossia che il punto  $z = (x, u)$  si muove di moto circolare uniforme attorno all'origine, con velocità angolare  $\omega$  in senso orario. Se poniamo  $z_0 = A e^{i\varphi}$  (rappresentazione polare) la (21-8) diventa

$$z = A e^{i(\varphi - \omega t)},$$

e da questa si ottengono da capo le (21-4), prendendone le parti reale e immaginaria.

Dunque la costante arbitraria complessa  $z_0$  riassume tanto l'informazione sull'ampiezza del moto (che è  $|z_0|$ ) quanto quella sulla fase (che è  $\arg z_0$ ).

### “Significato fisico” dei numeri complessi

L'uso che abbiamo fatto dei numeri complessi porta con sé di solito una domanda: è possibile attribuire a questi enti matematici un significato fisico? Non di rado si dà una risposta perentoriamente negativa, nella forma: “solo i numeri reali hanno significato fisico, perché il risultato di una misura può essere solo un numero reale.” Vogliamo ora discutere brevemente questo punto.

Si deve anzitutto osservare che se soltanto i possibili risultati di misure avessero significato fisico, allora neppure i numeri reali potrebbero averne, perché in realtà il risultato di una misura non sarà mai un generico numero reale: che si tratti di una lettura fatta a occhio su di una scala analogica, o di uno strumento digitale, o meglio ancora di un'acquisizione automatica di dati, avremo sempre a che fare con un numero finito di cifre, ossia con numeri razionali (addirittura con un sottoinsieme di questi).

Dunque l'impiego dei reali in fisica non ha motivazioni sperimentali, ma si fonda nella struttura della teoria. Non a caso nei *Discorsi* Galileo spende un notevole sforzo a giustificare l'idea che grandezze fisiche come il tempo o la velocità debbano essere descritte da numeri reali: si tratta di un assioma che sta a base della fisica galileiana e poi newtoniana, e senza del quale non si potrebbe sviluppare la teoria nella forma matematica che conosciamo.

Tornando al caso concreto, come dobbiamo allora considerare l'impiego che abbiamo fatto dei numeri complessi per studiare l'oscillatore armonico? A prima vista non si tratta di un fatto molto importante: dopo tutto avevamo già risolto il problema senza tirarli in ballo! Però vedremo tra non molto che in situazioni più complicate l'aiuto fornito dai numeri complessi è molto apprezzabile e non banale...

Si possono dunque tentare varie risposte:

- a) I numeri complessi sono un puro artificio, un “trucco matematico,” per ridurre due equazioni a una sola e semplificare i passaggi.

Questo punto di vista è legittimo, ma scopriremo in seguito che non va abbastanza a fondo nella questione.

- b) Esiste una ragione “seria” per usare i numeri complessi, legata alle proprietà matematiche dell’oscillatore armonico. Lo stesso vale anche per i circuiti elettrici, e in molte altre parti della fisica.

Non possiamo per ora giustificare la verità di questa asserzione, ma ci torneremo sopra. Le proprietà cui abbiamo alluso sono: linearità e invarianza per traslazioni temporali.

- c) Grandezze complesse possono avere un vero e proprio significato fisico.

Questo non è vero nel nostro caso, ma diventa vero in altri: l’esempio più tipico è la meccanica quantistica. Anche se il tema è troppo fuori del nostro campo, non è male farlo presente. Si sente dire talvolta che anche in meccanica quantistica “ha significato fisico solo il modulo della funzione d’onda, perché soltanto i numeri reali . . .” In realtà anche le fasi delle funzioni d’onda hanno significato: differenze di fase producono effetti perfettamente osservabili.

Concludendo, e tutto considerato, sembra corretto affermare che *nessun ente matematico ha significato fisico di per sé*: ne acquista una volta che venga usato in una ben determinata teoria fisica (la meccanica newtoniana, oppure la meccanica quantistica, o altre). Il fisico ha il diritto di usare sullo stesso piano tutti gli enti e le strutture matematiche che risultino utili e valide per la descrizione della realtà.

## 22. L'energia

Abbiamo visto nel cap. prec. che un oscillatore armonico possiede una costante del moto della forma:

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (22-1)$$

e abbiamo ricordato che si tratta dell'energia, e che la stessa costante del moto esiste anche per altri sistemi. Vogliamo ora approfondire il discorso.

### Esistenza della costante del moto

Dimostriamo che per un sistema con un solo grado di libertà l'energia esiste (nel senso che esiste una costante del moto che s'interpreta come energia) *tutte le volte che la legge di forza non dipende dalla velocità*, ma soltanto dalla posizione:  $F = F(x)$ .

In queste ipotesi il sistema (20-4) si scrive

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= f(x). \end{aligned} \quad (22-2)$$

dove  $f = F/m$ , come sappiamo. Se moltiplichiamo la seconda delle (22-2) per  $v$  otteniamo

$$v \dot{v} = f(x) v = f(x) \dot{x}. \quad (22-3)$$

A primo membro c'è la derivata rispetto al tempo di  $\frac{1}{2}v^2$ ; vogliamo mostrare che anche il secondo membro è una derivata rispetto a  $t$ . Si arriva a questo osservando che la  $F$  sarà la derivata (rispetto a  $x$ ) di qualche altra funzione (che si chiama una *primitiva* di  $F$ ): se chiamiamo tale primitiva  $-V$ , abbiamo

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = -F \dot{x} = -m f(x) \dot{x},$$

e perciò dalla (22-3) si ricava

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m v^2 + V \right) = 0.$$

Dunque

$$E = \frac{1}{2}m v^2 + V(x) \quad (22-4)$$

è una costante del moto, che generalizza la (22-1). Infatti nel caso dell'oscillatore armonico una primitiva di  $F = -kx$  è data da  $-V = -\frac{1}{2}kx^2$ .

## Energia cinetica e potenziale

Il primo termine a secondo membro della (22-4) prende il nome di energia *cinetica*, perché ha a che fare con la velocità ( $\kappa\iota\nu\eta\sigma\iota\varsigma$  = “movimento”) e viene indicato solitamente con  $T$ ; il secondo si chiama energia *potenziale*, per ragioni che vedremo subito.

La (22-4) ci dice che  $E = T + V$  è una costante del moto, ossia che per qualunque possibile moto del sistema mantiene lo stesso valore a ogni istante. (S'intende che tale valore è costante *durante il moto*, ma può benissimo cambiare *a seconda delle condizioni iniziali*: ad es. per l'oscillatore armonico sappiamo che  $E$  è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione.) Né  $T$  né  $V$  sono separatamente costanti, mentre lo è la somma: ciò vuol dire che di quanto aumenta l'energia cinetica, di tanto deve diminuire l'energia potenziale, e viceversa. Possiamo dunque dire che una stessa grandezza (l'energia) può assumere due forme, e passare dall'una all'altra *conservandosi* in totale. Ecco il motivo del termine “potenziale”:  $V$  può “trasformarsi” in “movimento,” ossia è movimento “in potenza.” Sebbene ormai questa concezione aristotelica sia del tutto estranea al nostro modo di pensare, vediamo che sopravvive nel linguaggio.

È assai utile avere sempre presente il gioco di scambio tra  $V$  e  $T$  durante il moto. A titolo di esempio, illustriamolo per l'oscillatore armonico. Dalle (21-3) si ottiene subito

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t - \varphi) \\T &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t - \varphi)\end{aligned}$$

e i corrispondenti grafici in funzione di  $t$  sono tracciati in fig. 22-1.

Un'altra utile applicazione della conservazione dell'energia si ottiene trasformando la (22-4) in una disuguaglianza: poiché è certamente  $T \geq 0$ , sarà necessariamente

$$V(x) \leq E; \tag{22-5}$$

ne segue che il moto può svolgersi soltanto in quelle regioni dell'asse  $x$  in cui l'energia potenziale non supera l'energia totale (fig. 22-2).

## Ruolo della costante arbitraria

Abbiamo sempre scritto che  $-V$  è *una* primitiva di  $F$ , e non *la* primitiva, perché dalla definizione si capisce che questa non può essere unica: se aggiungiamo a  $V$  una costante qualsiasi, la sua derivata non cambia. Ne segue che *l'energia potenziale  $V$  è definita a meno di una costante arbitraria, e lo stesso accade di conseguenza per l'energia totale  $E$ .*

Questa costante arbitraria può essere facilmente motivo di equivoco, specie se la si confonde con l'arbitrarietà del valore di  $E$  in dipendenza delle condizioni iniziali. Vediamo dunque come si deve ragionare.

Data una legge di forza, questa determina  $V$  a meno di una costante: ciò vuol dire che sta a noi scegliere il valore della costante, ad es. assegnando convenzionalmente il valore di  $V$  in un punto (cioè per una certa  $x$ ).

*Esempio 1:* Nel caso dell'oscillatore armonico potremo decidere che  $V(0) = 0$ : questa è una scelta naturale, perché  $x = 0$  è la posizione di equilibrio, in cui  $V$  assume il valore minimo; ma non è affatto obbligata. Una volta fatta questa scelta, non c'è più nessuna arbitrarietà, né in  $V$  né in  $E$ : saranno possibili moti con diversi (infiniti) valori di  $E$  (naturalmente  $\geq 0$ ), a ciascuno dei quali corrisponderà una diversa ampiezza.

*Esempio 2:* Se la forza non dipende da  $x$  (come per il campo gravitazionale in prossimità della superficie terrestre) abbiamo  $V = mgx + c$ , avendo orientato l'asse  $x$  verso l'alto. Possiamo fare anche qui  $V(0) = 0$ , e risulterà  $c = 0$ ; ma non è l'unica scelta possibile, e in qualche caso potrebbe convenire scegliere diversamente.

*Esempio 3:* Per il campo gravitazionale prodotto da una massa a simmetria sferica (oppure per il campo elettrico di una carica) si trova che  $V \propto 1/r$ , se  $r$  è la distanza dal centro di simmetria, e se si decide di avere  $V \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ : per quanto questa sia quasi sempre la scelta più comoda, non è obbligatoria. Però quando diciamo che l'energia dei livelli dell'atomo d'idrogeno è data dalla formula di Bohr

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (\text{unità CGS}) \quad (22-6)$$

sottintendiamo proprio quella scelta: se decidessimo di cambiarla, dovremmo modificare anche la (22-6).

Possiamo esprimere in un altro modo il fatto che durante il moto  $E = T + V$  resta costante: se usiamo gli indici  $_1$  e  $_2$  per designare i valori a due istanti diversi, avremo

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = V_1 - V_2,$$

che possiamo scrivere così:

$$\Delta T = -\Delta V.$$

In parole: la variazione dell'energia cinetica è sempre uguale e opposta a quella dell'energia potenziale. Il fatto importante è che in questa espressione la costante arbitraria insita in  $V$  si cancella, perché è la stessa nei due istanti. Si vede dunque che tale costante non ha influenza sul calcolo di  $T$ , quindi della velocità, ecc.

### Conservazione dell'energia e reversibilità

Un sistema nel quale esista la costante del moto dell'energia si chiama *conservativo*. Possiamo dunque asserire che *ogni sistema con un solo grado di libertà, in cui le forze non dipendano dalla velocità, è conservativo*.

È importante avvertire che questo risultato *non si estende a più gradi di libertà*: in tal caso la condizione perché il sistema sia conservativo è più restrittiva, e la vedremo nel seguito.

Chiediamoci ora com'è fatto il campo di velocità  $\mathbf{w}$  per un sistema conservativo (sottinteso: a un solo grado di libertà). Ragionando sulle (22-2), si vede che in due punti del piano delle fasi che abbiano la stessa  $x$  e  $v$  opposte, si avrà la stessa  $\dot{v}$ , mentre  $\dot{x}$  sarà contraria; dunque il campo ha l'aspetto della fig. 22-3. Ne segue che a ogni arco di traiettoria nel semipiano superiore ne corrisponde uno simmetrico nel semipiano inferiore (che non farà parte necessariamente della stessa traiettoria) e i due archi sono percorsi in senso opposto (fig. 22-4). Allo stesso risultato si poteva arrivare anche dalla (22-4), che per una data  $x$  fornisce due valori opposti di  $v$ :

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}. \quad (22-7)$$

A quali moti corrispondono i due archi di traiettorie simmetrici che abbiamo trovato? Se indichiamo per brevità con A e con B i due moti, abbiamo che in ogni punto  $x$  il moto B passa con velocità opposta al moto A: dunque se A impiega un certo tempo  $\Delta t$  per andare da una certa  $x_1$  a una certa  $x_2$ , invece B nello stesso tempo  $\Delta t$  andrà da  $x_2$  a  $x_1$ . Se facessimo una registrazione video del moto A, e poi la guardassimo all'indietro, avremmo proprio il moto B.

Conclusione: se per un sistema conservativo è possibile un certo moto, è anche possibile quello che si ottiene *invertendo il senso del tempo*. Un tale sistema si dice *reversibile*. Abbiamo dunque dimostrato il

*Teorema: I sistemi conservativi sono reversibili.*

Per comprendere come questo risultato sia tutt'altro che banale, basta osservare che *esistono sistemi non reversibili* (anzi, nel mondo reale sono la regola!)

*Esempio:* Se registriamo il moto di un pendolo reale, avremo un'oscillazione che si smorza: più o meno velocemente, ma senza via di scampo. La registrazione vista all'indietro apparirà inverosimile, perché mostrerà un pendolo inizialmente fermo che pian piano si mette in oscillazione da solo, con ampiezza sempre crescente. L'esperienza c'insegna che questo è un moto impossibile, il che vuol dire che il pendolo reale è *irreversibile*.

### Traiettorie chiuse

Una situazione particolarmente importante si presenta quando esiste un solo punto  $\bar{x}$  in cui  $V'(\bar{x}) = 0$ , e questo punto è di minimo per l'energia potenziale, mentre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty.$$

In tal caso *tutte le traiettorie di fase sono chiuse* (e perciò tutti i moti sono periodici).

Osserviamo in primo luogo che il campo  $\mathbf{w}$  ha un solo punto fisso: infatti  $\dot{x} = 0$  richiede che il punto fisso abbia  $v = 0$ , mentre  $\dot{v} = 0$  impone  $f(x) = 0$ , cioè  $V'(x) = 0$ . Le coordinate del punto fisso sono dunque  $(\bar{x}, 0)$ . Su ogni altra traiettoria,  $\mathbf{w}$  non si annulla mai.

Mostriamo poi che le traiettorie sono tutte limitate, ossia che per ogni traiettoria esiste un rettangolo che la contiene interamente. Per quanto riguarda la  $x$  la cosa discende dalla disuguaglianza (22-5): infatti per ogni  $E > V_{\min}$  esistono due soli punti, uno  $x_1$  a sinistra di  $\bar{x}$ , e uno  $x_2$  a destra, nei quali  $V = E$ ; e soltanto nell'intervallo  $[x_1, x_2]$  la (22-5) è soddisfatta. Quanto a  $v$ , basta usare la (22-7), che implica

$$|v| \leq \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\min})}.$$

Se ora la traiettoria non fosse chiusa, dovrebbe terminare in qualche punto del rettangolo, dove avremmo  $\mathbf{w} = 0$ . Ma una traiettoria con  $E > V_{\min}$  non può avvicinarsi al punto fisso, se  $V$  è una funzione continua.

### L'energia attribuito dei sistemi fisici

Il riconoscimento del ruolo dell'energia nella meccanica, e poi in tutta la fisica, è stato lento e graduale: lo sviluppo occupa tutto il '600 e il '700, e solo alla fine di quel secolo i risultati di cui abbiamo parlato sono acquisiti. Nell'800 si arriverà a estendere il concetto di energia ai fenomeni elettrici e termici, e a concepire la legge generale di conservazione.

Nei discorsi precedenti abbiamo gradualmente spostato il punto di vista sull'energia: mentre l'abbiamo introdotta come una pura proprietà matematica (un integrale primo delle equazioni del moto) abbiamo poi parlato di grandezza conservata, anzi di trasformazione fra due diverse forme: cinetica e potenziale. A questo punto possiamo parlare di energia "posseduta" da un corpo (o da un sistema di corpi) nelle due forme:

- cinetica, dipendente esclusivamente dal moto del corpo (e proporzionale al quadrato della velocità)
- potenziale, dipendente dalla forza che agisce sul corpo.

A proposito di quest'ultima, osserviamo che la forza rappresenta un'*interazione* fra corpi (3° principio); perciò è più corretto attribuire l'energia potenziale *all'insieme* dei due corpi, che non a uno solo. Ad es. si dice correntemente che un grave possiede un'energia potenziale gravitazionale proporzionale alla sua quota, ma non si dovrebbe dimenticare che in realtà si tratta di un'*energia d'interazione* fra il grave e la Terra. In pratica, poiché siamo interessati agli spostamenti del grave, non ci sono inconvenienti ad attribuire l'energia potenziale al grave; ma il discorso sarebbe diverso se stessimo parlando del sistema Terra-Luna, dove non avrebbe senso pensare che l'energia sia posseduta dalla Luna, e neppure che sia in qualche modo ripartita fra i due corpi: si può solo dire che esiste un'energia potenziale *dell'intero sistema*.

## 23. Un'applicazione: la molecola di azoto

Vogliamo mostrare come possono applicarsi le cose trattate nei due capitoli precedenti a un caso fisico interessante: la molecola di un gas biatomico. Scegliamo come esempio l'azoto ( $N_2$ ). Non è del tutto evidente che abbia senso usare la meccanica newtoniana per un sistema di questo genere, e naturalmente ciò non è vero se si vuole andare abbastanza a fondo; ma per un primo approccio, che faccia capire come giocano i parametri fondamentali, e come li si possa collegare ad alcuni dati di osservazione, anche la meccanica newtoniana (e perfino quel poco che ne abbiamo discusso fin qui) può essere sufficiente.

I dati sui quali ci baseremo sono i seguenti:

massa dell'atomo di azoto:	$m = 2.32 \cdot 10^{-26}$ kg
distanza di equilibrio:	$x_0 = 1.09 \cdot 10^{-10}$ m
frequenza di vibrazione:	$\nu = 7.08 \cdot 10^{13}$ Hz
energia di legame:	$E_1 = 1.18 \cdot 10^{-18}$ J.

Vogliamo arrivare a farci un'idea dell'energia potenziale dell'interazione fra gli atomi.

### Andamento dell'energia potenziale

Faremo anzitutto una schematizzazione: che la molecola possa essere trattata come un sistema di due punti materiali che si muovono lungo una retta; anzi ci occuperemo soltanto del moto relativo, che descriveremo mediante una coordinata  $x$ , che misura la distanza fra gli atomi. Nella realtà gli atomi consistono ciascuno di un nucleo e di 7 elettroni, ma noi supporremo che i gradi di libertà "interni" di ciascun atomo non abbiano importanza, e che perciò basti occuparsi della distanza fra i nuclei. Inoltre la molecola può ruotare, e quindi il suo moto non può essere descritto completamente con un solo grado di libertà; ma fortunatamente la rotazione non rende del tutto inutile il modello. Tutt'al più s'intuisce che occorrerà mettersi in un riferimento rotante, e tener conto della forza centrifuga, ma gli aspetti di base dei fenomeni non vengono alterati radicalmente.

L'interazione fra gli atomi (attrattiva se sono lontani, come vedremo, e repulsiva se sono vicini) è causata dalle cariche elettriche presenti; ma noi non vogliamo né possiamo entrare nel dettaglio di tutte queste forze tra le cariche: tra l'altro perché qui la meccanica quantistica sarebbe veramente essenziale. Vedremo che una prima idea di come funziona la molecola si può ottenere anche restando allo schema semplice che abbiamo descritto.

Dai dati (in realtà dal fatto stesso che le molecole di azoto esistono) vediamo che esiste una posizione di equilibrio del sistema (una sola): dunque l'energia potenziale avrà un minimo (e uno solo). È poi evidente che a grande distanza le forze saranno trascurabili, e anzi i chimici ci dicono di più: per *dissociare* la

molecola, ossia per separare i due atomi, basta una quantità finita d'energia, quella che abbiamo chiamato *energia di legame* nella tabella iniziale. Questo ci assicura che l'energia potenziale dovrà avere un limite finito per  $x \rightarrow \infty$ . Inoltre ci aspettiamo che avvicinando molto i nuclei si faccia sentire fortemente la repulsione fra le loro cariche positive, e perciò  $V(x)$  dovrà crescere come  $1/x$  quando  $x \rightarrow 0$ .

In questo tipo di problemi è tradizionale prendere nullo il valore limite dell'energia potenziale a grande distanza, e ne segue il grafico qualitativo di fig. 23-1, dove abbiamo già indicato le coordinate del punto di minimo, che sono note. Ciò è ovvio per  $x_0$ ; quanto a  $V(x_0)$ , bisogna riflettere sul significato dell'energia di legame.

Questa è l'energia che occorre cedere alla molecola per staccare i due atomi, portandoli *fermi a grandissima distanza* tra loro. Se la molecola a riposo sta alla minima energia possibile, si vede dalla figura che ciò accade quando gli atomi si trovano fermi a distanza  $x_0$ : allora l'energia cinetica è nulla, quella potenziale vale  $V(x_0)$ , e questa è anche l'energia totale. Nello stato in cui gli atomi sono fermi a grande distanza l'energia totale è nulla, e perciò è cresciuta di  $E_1 = 0 - V(x_0) = -V(x_0)$ .

### La frequenza di vibrazione

Dobbiamo ora occuparci delle vibrazioni. Per ora non sappiamo niente (o quasi) della funzione  $V(x)$ , ma sappiamo che il grafico non è una parabola: dunque il nostro sistema non è un oscillatore armonico. Ma abbiamo visto nel Cap. 21 che possiamo sempre usare l'oscillatore armonico come approssimazione, tutte le volte che esiste una posizione di equilibrio stabile, se ci limitiamo alle piccole oscillazioni. Per mettere in oscillazione la molecola non dobbiamo far altro che scaldare il gas: penseranno gli urti fra le diverse molecole a provocare le vibrazioni.

Se  $x$  differisce poco da  $x_0$ , potremo scrivere:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Ma  $x_0$  è un punto di minimo (posizione di equilibrio) e perciò  $V'(x_0)$  si annulla: dunque una buona approssimazione sarà

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2. \quad (23-1)$$

A parte la costante  $V(x_0) = -E_1$ , questa è l'energia potenziale di un oscillatore armonico, come ci aspettavamo; e vediamo che il tradizionale  $k$  dell'oscillatore coincide con  $V''(x_0)$ . Possiamo dunque scrivere

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (23-2)$$

(col solito significato dei simboli)? No, perché se si scrive così si dimentica un fatto essenziale: qui ci sono *due* atomi, e quando la molecola vibra, si muovono entrambi.

Per capire quello che succede, introduciamo un'ascissa  $x$  con origine in un punto fisso e orientata dall'atomo 1 all'atomo 2 (fig. 23-2); dette  $x_1, x_2$  le ascisse dei due atomi sarà  $x = x_2 - x_1$ , e per ciascun atomo potremo scrivere la seconda legge della dinamica:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1 \\ m\ddot{x}_2 &= F_2. \end{aligned} \quad (23-3)$$

Le due forze sono legate tra loro dal 3° principio:  $F_1 = -F_2$ , e perciò, sottraendo la prima delle (23-3) dalla seconda troviamo

$$m\ddot{x} = m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = F_2 - F_1 = 2F_2 = -2V'(x)$$

o anche

$$\frac{1}{2}m\ddot{x} = -V'(x). \quad (23-4)$$

La (23-4) mostra che per tener conto del moto dei due atomi dobbiamo soltanto usare una massa metà (massa ridotta). Ne segue che la (23-2) va modificata così:

$$\omega = \sqrt{2k/m}. \quad (23-5)$$

Possiamo servirci di questa per calcolare  $k$ , visto che  $\omega = 2\pi\nu$  e  $m$  sono note; si trova

$$k = 2\pi^2 m \nu^2 = 2.30 \cdot 10^3 \text{ J/m}^2.$$

Se usiamo la (23-1), che approssima  $V(x)$  con una parabola, scritta così:

$$V(x) = -E_1 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

possiamo tracciare un grafico di prima approssimazione. Si vede che la parabola incontra l'asse  $x$  nei punti di coordinate  $x_0 \pm b$ , con

$$b = \sqrt{\frac{2E_1}{k}} = 3.2 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

Poiché  $b$  è circa 1/3 di  $x_0$ , il grafico è molto stretto, il che indica che per spostare la molecola dalla posizione di equilibrio occorre una forza notevole. In realtà dobbiamo aspettarci che la curva reale sia ancora più ripida nel ramo di sinistra, e sia invece più dolce in quello di destra, che deve avere addirittura un flesso (fig. 23-3).

### Formazione della molecola

Esaminiamo ora un problema che nasce dalla nostra schematizzazione. Supponiamo di partire con due atomi distanti, e dotati di una certa energia cinetica

(anche se piccola): l'energia totale  $E$  del sistema in queste condizioni è positiva. Se le velocità dei due atomi sono tali da farli avvicinare, la forza attrattiva esistente a distanza maggiore di  $x_0$  farà aumentare l'energia cinetica mentre la distanza diminuisce, e questo processo continuerà fino alla distanza  $x_0$ . A quel punto il moto relativo degli atomi prosegue, e la distanza diminuisce ancora, ma la forza è divenuta repulsiva: dunque la velocità decresce, e si annulla quando la distanza assume il valore  $x_{\min}$  nel quale  $V(x_{\min}) = E$  (fig. 23-4). La forza repulsiva agisce ancora, e causa un'inversione del moto: la conservazione dell'energia ci assicura che gli atomi si allontaneranno indefinitamente, perché la velocità non si annulla mai (si ricordi che  $E > 0$ ).

Ecco ora il problema: se le cose stanno così, com'è possibile che da due atomi separati si formi una molecola? Due atomi potranno sì avvicinarsi, ma poi dovranno separarsi di nuovo, con la stessa velocità con cui si sono avvicinati!

La risposta è che abbiamo trascurato effetti dissipativi, ossia interazioni che fanno diminuire l'energia del sistema. La più ovvia è l'emissione di radiazione elettromagnetica: durante l'urto si può avere irraggiamento, per cui l'energia meccanica *non si conserva* (urto *anelastico*). Se l'energia perduta è maggiore di  $E$ , il sistema rimane con energia negativa, e non può più separarsi: gli atomi sono costretti a oscillare intorno alla posizione di equilibrio (fig. 23-5). Nel corso di queste oscillazioni si avrà un'ulteriore emissione di radiazione, e per questa via la molecola si porterà alla minima energia possibile, che vale  $-E_1$ .

## Effetti quantistici

Anche se in tutto il nostro ragionamento non abbiamo tenuto conto di effetti quantistici, essi esistono e sono anche essenziali per la validità del modello che abbiamo fatto, per quanto ciò possa sembrare paradossale.

Un atomo di azoto in quiete ha un insieme di possibili valori della sua energia (i cosiddetti "livelli energetici"): dal più basso al successivo la differenza è di oltre 2 eV, ossia più di  $3 \cdot 10^{-19}$  J. Ne segue che se non è disponibile un'energia maggiore di questa, non è possibile cambiare l'energia dell'atomo, che perciò si comporta proprio come "atomo," ossia come se non avesse gradi di libertà interni. È questo che giustifica il nostro modello, in cui abbiamo trattato gli atomi come punti materiali.

Invece le distanze fra i livelli di energia dovuti alle vibrazioni della molecola valgono  $h\nu \simeq 0.5 \cdot 10^{-19}$  J, cioè sono nettamente più piccole (anche se non molto): ne segue che ci sono situazioni in cui vengono eccitate le vibrazioni, senza disturbare gli atomi come tali.

*Nota:* In realtà le cose sono più complicate di così; ma qui vogliamo soltanto dare un'idea di quello che succede, anche al prezzo di qualche imprecisione.

Il fatto che  $V(x)$  non sia esattamente una funzione quadratica di  $x - x_0$  ha una conseguenza: non si tratta di un oscillatore armonico, quindi le oscillazioni non sono isocrone. Dovrà esserci una dipendenza della frequenza dall'ampiezza.

Dal punto di vista sperimentale, le oscillazioni della molecola si vedono attraverso l'emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica (infrarossa, come risulta dalla frequenza). Se si trattasse di un vero oscillatore armonico, si dovrebbe vedere una sola frequenza, mentre in realtà se ne trovano parecchie vicine tra loro. In termini quantistici, l'isocronismo dell'oscillatore armonico si traduce nell'equidistanza dei livelli (fig. 23-6); l'anarmonicità significa che i livelli non sono più equidistanti, e di conseguenza i salti di energia in emissione e in assorbimento non sono tutti uguali (fig. 23-7). La relazione di Bohr  $\Delta E = h\nu$  implica allora che si dovranno vedere diverse frequenze vicine, anziché una sola.

Un ultimo effetto quantistico è il seguente: l'energia minima di oscillazione non è zero (un oscillatore quantistico non sta mai fermo!) ma vale  $\frac{1}{2}h\nu$ . Ne segue che l'energia di legame non è  $|V(x_0)|$ , ma  $|V(x_0)| - \frac{1}{2}h\nu$ : perciò  $|V(x_0)|$  è un po' maggiore di  $E_1$ . Coi nostri dati avremmo 1.23 invece di 1.18: una differenza del 4%.