

20. Secondo principio, equazioni differenziali

Questo capitolo è dedicato al secondo principio della dinamica: ne discuteremo il significato matematico (equazioni differenziali), le conseguenze fisiche della sua forma matematica (determinismo, condizioni iniziali, costanti del moto) e alcuni esempi tipici.

Il determinismo meccanico

Il secondo principio della dinamica *determina il moto* di un punto materiale: occorre chiarire bene che cosa s'intende dire con ciò. Supponiamo nota la *legge della forza*, ossia l'espressione di \vec{F} in funzione di \vec{r} , \vec{v} ed eventualmente t . Ci proponiamo di trovare la curva oraria $\vec{r}(t)$, che è quindi l'incognita del nostro problema. Si noti che si tratta di una *funzione* incognita: noi vogliamo sapere quale sarà la posizione del nostro punto *a ogni istante*. Allora il secondo principio, scritto

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (20-1)$$

è un'*equazione differenziale* (del secondo ordine) nella funzione incognita $\vec{r}(t)$: "differenziale" perché nell'equazione compaiono tanto la funzione incognita quanto le sue derivate (fino alla seconda).

Se si preferisce, si può leggere la (20-1) come un sistema di tre equazioni differenziali nelle tre funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned}$$

ma la notazione (20-1) è assai più breve e sintetica. Si potrebbe anche usare qualunque altro SC, invece di quelle cartesiane: si otterrebbero sempre tre equazioni nella terna di funzioni del tempo che rappresentano le coordinate del punto materiale nel SC scelto.

Tutti i possibili moti saranno descritti da una $\vec{r}(t)$ che soddisfa la (20-1); ma ciò non vuol dire che la (20-1) sia da sola sufficiente a determinare il moto. A questo fine, occorre ancora specificare le *condizioni iniziali*, ossia posizione e velocità del punto a un certo istante. Anzi, esiste *una sola* curva oraria che soddisfa la (20-1) e certe date condizioni iniziali. Questo è il significato del *determinismo* della meccanica newtoniana:

il moto del corpo è completamente determinato, a tutti i tempi, una volta che sia nota la legge della forza e siano date le condizioni iniziali.

È bene ricordare qui il contenuto fisico di quanto abbiamo appena detto. Da un lato vi è l'asserzione che gli agenti esterni (le forze) causano l'accelerazione, non già la velocità del corpo. Questa è la scoperta della fisica galileiana: la velocità non richiede "causa motrice," come è dimostrato

- a) dalla validità sperimentale del principio d'inerzia
- b) dal principio di relatività, ossia dall'inesistenza di un riferimento privilegiato.

È poi implicito nel secondo principio, dal momento che la forza determina l'accelerazione, che a sua volta la forza possa dipendere dalla posizione del corpo, dalla sua velocità, dal tempo, *ma non dalle derivate superiori*: dunque la determinazione (anche sperimentale) di una legge di forza consisterà nello scoprire come la forza dipenda da \vec{r} , da $\dot{\vec{r}}$ e da t .

L'esperienza insegna, a parte ogni considerazione matematica, che la legge di forza non basta a determinare il moto. Anche a partire da una stessa posizione iniziale, e pur essendo soggetto sempre alla stessa forza (la gravità), un proiettile può descrivere traiettorie assai diverse a seconda di come viene lanciato: ossia a seconda della direzione e della grandezza della velocità iniziale. Dunque le condizioni iniziali consistono nella completa specificazione tanto della posizione iniziale, quanto della velocità.

Viceversa, una volta che queste condizioni siano soddisfatte, il moto è completamente (verrebbe fatto di dire “inesorabilmente”) determinato: non c'è spazio per incertezze o arbitrarietà di nessun genere.

S'intende che ciò è vero solo in linea di principio, in quanto nella realtà pratica — anche in quella del più raffinato laboratorio — le leggi di forza saranno sempre note solo con qualche approssimazione, e le condizioni iniziali saranno soggette a errori di misura: perciò il moto sarà più o meno incerto in conseguenza. Un grande problema, del quale qui non possiamo occuparci, è quello della “stabilità” del moto: piccoli errori, ad es. nelle condizioni iniziali, influenzano il moto successivo in una misura che rimane piccola, oppure l'incertezza iniziale può crescere — e come — al passare del tempo? È recente la scoperta (ma sarebbe meglio dire la “riscoperta”) di quanto siano comuni le situazioni *instabili*, nelle quali di fatto il moto diventa imprevedibile dopo un tempo relativamente breve, anche se gli errori nelle condizioni iniziali sono molto piccoli. Stiamo alludendo al “caos deterministico,” che è oggi da un lato un attivissimo campo di ricerca, e dall'altro un purtroppo fecondissimo campo di speculazioni pseudofilosofiche...

Solo per collocare il problema nella giusta prospettiva, ricordiamo che le equazioni della meccanica celeste permettono di calcolare la posizione dei pianeti con qualcosa come 8 cifre significative; che pochi anni fa è stato possibile ricostruire, dai dati odierni, le posizioni dei pianeti ai tempi di Galileo, e dimostrare ad es. che egli aveva visto (e accuratamente registrato) il pianeta Nettuno, sfortunatamente senza riconoscere che di un pianeta si trattava (sarebbe stato scoperto oltre due secoli dopo), ecc. Le ricerche sull'eventuale instabilità del sistema solare non hanno ancora dato una risposta certa, ma si suppone che effetti significativi siano visibili solo su una scala di tempo dell'ordine dei 10^8

anni! Dunque parlare di determinismo non è una pura astrazione, o peggio una rozza falsificazione della realtà, come qualcuno mostra di credere.

Incidentalmente l'esempio che ora abbiamo portato mostra un'altra caratteristica essenziale del determinismo meccanico: esso *non fa distinzione fra passato e futuro*. Date le condizioni iniziali a $t = t_0$, è altrettanto bene determinato il moto per $t > t_0$ quanto quello per $t < t_0$. A scanso di equivoci, si noti che quest'osservazione non ha niente a che vedere col problema della reversibilità (o della "freccia del tempo"), sul quale potremo tornare solo alla fine di questo corso.

$\vec{F} = ma$ come equazione differenziale

Nel seguito di questo capitolo cercheremo di capire il significato concreto di una parte delle asserzioni fatte fin qui, studiando alcuni casi semplici. In primo luogo, ci riduciamo a una sola dimensione: moto su traiettoria prestabilita (a causa di un vincolo) o, più in particolare, moto su traiettoria rettilinea. Se s è l'ascissa curvilinea, e se f è la componente della forza lungo la traiettoria, divisa per m , abbiamo

$$\ddot{s} = f \quad (20-2)$$

e la f può dipendere solo dalla posizione del punto (cioè da s), dalla sua velocità (che è determinata da \dot{s}) e magari dal tempo.

Esempio: Per un pendolo semplice f dipende da s perché cambia con s l'angolo tra la forza di gravità e la tangente alla traiettoria (fig. 20-1); se teniamo conto della resistenza dell'aria avremo anche una dipendenza da \dot{s} ; se poi il pendolo è montato su di un treno, ci sarà anche la dipendenza dal tempo a causa della forza apparente, che cambia da istante a istante mentre il treno accelera o frena.

Data la forma della (20-2), non perdiamo di generalità supponendo la traiettoria rettilinea, e usando la coordinata x : avremo così l'equazione del moto

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t).$$

Questa è la forma più generale di equazione del moto per un corpo con un solo grado di libertà; tuttavia ci converrà, per cominciare, supporre che la forza non dipenda dal tempo (sistema *autonomo*). I sistemi autonomi sono una classe molto importante di sistemi meccanici, perché si presentano tutte le volte che la situazione fisica esterna *non cambia nel tempo*.

La forza di gravità, la resistenza dell'aria (in assenza di vento), la forza di richiamo di una molla, saranno le stesse domani come oggi. La forza che agisce sul corpo istante per istante potrà anche essere variabile, ma solo perché il corpo cambia la sua posizione e la sua velocità. In termini matematici, la forza dipenderà dal tempo *implicitamente*, attraverso x e \dot{x} , ma non *esplicitamente*: tutte le volte che x e \dot{x} riassumono gli stessi valori, la forza ritorna la stessa.

L'equazione del moto è dunque

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}); \quad (20-3)$$

questa è un'equazione *differenziale*, perché l'incognita è la *funzione* $x(t)$, e perché nell'equazione compaiono anche alcune derivate della funzione incognita; è di *secondo ordine*, perché la derivata di ordine più alto che figura nell'equazione è la \ddot{x} .

Il concetto di equazione differenziale pone un problema cognitivo, che certamente agli inizi è stato percepito come logico, o filosofico: il significato fisico della (20–3) è che la forza agente può dipendere in generale dalla posizione del corpo e dalla sua velocità; la forza *causa* il moto, in quanto determina l'accelerazione; la presenza di un'accelerazione ha per effetto una variazione di velocità, e in conseguenza anche di posizione; queste variazioni *causano* a loro volta un cambiamento della forza agente . . . e sembra di essere finiti in un circolo vizioso. Riconoscere la validità scientifica di un tale schema di ragionamento non è stato facile agli inizi, e non sarebbe stato possibile senza un'adeguata traduzione matematica (ricordiamo Galileo: “. . . senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola . . .”). Questa è stata opera di Newton, che non solo ha compreso a fondo e utilizzato l'idea, ma ha anche inventato un procedimento pratico per la risoluzione delle equazioni differenziali (la cosiddetta “integrazione per serie”) che è di grande importanza ancor oggi, anche se a noi non capiterà di farne uso.

Un'equazione differenziale differisce dalle più familiari equazioni algebriche per più versi:

- La prima e fondamentale differenza è che mentre in un'equazione algebrica l'incognita è un numero, qui l'incognita è una *funzione*.
- La seconda sta nel numero delle possibili soluzioni: per le equazioni algebriche queste sono in numero finito (al più uguale al grado), mentre un'equazione differenziale ha sempre *infinite soluzioni*.
- Di conseguenza, la verifica che abbiamo trovato una soluzione è diversa: occorre dimostrare che sostituendo al posto della funzione incognita la soluzione, l'equazione si trasforma in un'*identità*, ossia che primo e secondo membro diventano funzioni identiche di t , cioè assumono lo stesso valore per qualsiasi valore di t .
- Mentre per le equazioni algebriche (fino al quarto grado) esiste una formula risolutiva, e quindi un *algoritmo* di risoluzione, ciò non accade in generale per le equazioni differenziali; a parte casi speciali, il più importante dei quali è la classe delle equazioni *lineari a coefficienti costanti*.

Integrale generale, condizioni iniziali

Possiamo trasformare la (20–3) in un sistema di due equazioni differenziali di primo ordine, introducendo come incognita, accanto alla posizione x , anche la velocità $v = \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= f(x, v). \end{aligned} \tag{20–4}$$

Lo svantaggio di questo modo di scrivere è che si hanno due equazioni; il vantaggio è che un sistema di primo ordine, come vedremo, si presta meglio alla discussione.

È chiaro che ora abbiamo a che fare con *due* funzioni incognite (la x e la v): perciò trovare una soluzione significa determinare *una coppia* di funzioni $x(t)$, $v(t)$ tali che *entrambe* le (20-4) siano soddisfatte identicamente. Tale coppia $x(t)$, $v(t)$ si chiama anche un *integrale particolare* del sistema; l'insieme di tutti gli integrali particolari (che sono infiniti) si chiama l'*integrale generale*. Per chiarire bene la situazione, e soprattutto per precisare meglio il concetto d'integrale generale, conviene esaminare qualche esempio particolarmente semplice.

Esempio 1: La particella libera: in questo caso abbiamo $f = 0$, per cui il sistema (20-4) si riduce a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= 0.\end{aligned}\tag{20-5}$$

Sappiamo che la soluzione è un moto uniforme:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_0 t \\ v &= v_0.\end{aligned}\tag{20-6}$$

Per qualunque scelta di x_0 , v_0 le (20-6) danno un'integrale particolare del sistema (20-5); poiché non esistono altre soluzioni, questo è anche l'integrale generale, se si sottintende che x_0 , v_0 siano *costanti arbitrarie*. Inoltre x_0 , v_0 in questo caso sono proprio le condizioni iniziali al tempo $t = 0$:

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \\ v(0) &= v_0.\end{aligned}$$

Si vede che comunque si scelgano le condizioni iniziali, la soluzione *esiste ed è unica*.

Esempio 2: Caduta di un grave: il problema è poco più complesso del precedente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= g.\end{aligned}$$

La soluzione è un moto uniformemente accelerato:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ v &= v_0 + gt\end{aligned}\tag{20-7}$$

e si può ripetere tutto quanto detto nell'esempio 1 sull'integrale generale e sul significato di x_0 , v_0 , come pure sull'esistenza e unicità della soluzione.

Esempio 3: Riprendiamo il caso visto nel Cap. 11, cioè il moto in un mezzo viscoso. Le equazioni sono:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -kv\end{aligned}$$

e abbiamo già trovato l'integrale generale:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \\ v &= v_0 e^{-kt}\end{aligned}$$

(rispetto alla (11-6) abbiamo aggiunto x_0 , per tener conto che anche la posizione iniziale può essere arbitraria). Anche in questo caso valgono le stesse proprietà degli esempi precedenti.

Esempio 4: L'oscillatore armonico:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x \quad (\omega^2 = k/m).\end{aligned}$$

Allo studio di questo esempio è dedicato il Cap. 21; qui anticipiamo che anche per esso troveremo un integrale generale dipendente da *due* costanti arbitrarie, e che vale l'esistenza e l'unicità della soluzione date le condizioni iniziali.

Esempio 5: Supponiamo di nuovo che la sola forza agente sia la resistenza del mezzo, ma che questa sia proporzionale al quadrato della velocità, e non semplicemente alla velocità come nell'esempio 3. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -cv^2.\end{aligned}\tag{20-8}$$

A rigore questa va bene solo se $v > 0$, perché l'accelerazione è sempre negativa; per $v < 0$ dovremmo scrivere $\dot{v} = cv^2$, e per riassumere entrambi i casi in una sola formula: $\dot{v} = -cv|v|$. Eviteremo questa complicazione, e ne terremo conto alla fine dei calcoli.

Lasciamo al lettore di verificare che l'integrale generale delle (20-8) è

$$\begin{aligned}x &= x_0 \pm \frac{1}{c} \ln(1 \pm cv_0 t) \\ v &= \frac{v_0}{1 \pm cv_0 t},\end{aligned}\tag{20-9}$$

dove il segno superiore vale per $v_0 \geq 0$, quello inferiore per $v_0 \leq 0$ (per $v_0 = 0$ è indifferente quale si usa!) Si vede che l'espressione scritta per x ha senso solo se $t > -1/c|v_0|$, il che è giusto, perché per quel valore di t la velocità diventa infinita (in pratica non sarà mai possibile realizzare una condizione prossima a questo caso limite).

Si noti che nell'ultimo esempio, a differenza dei precedenti, abbiamo a che fare con un'equazione *non lineare*. Però abbiamo ancora l'integrale generale, e troviamo una e una sola soluzione per qualunque scelta delle condizioni iniziali.

Possiamo dunque congetturare il seguente

Teorema (di esistenza e unicità): *Un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine, della forma*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(x, v) \\ \dot{v} &= f(x, v)\end{aligned}\tag{20-10}$$

ammette un integrale generale dipendente da due costanti arbitrarie; inoltre, comunque scelte x_0 e v_0 , esiste uno e un solo integrale particolare che soddisfi le condizioni iniziali

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0 \\ v(t_0) &= v_0.\end{aligned}$$

In realtà il teorema così enunciato è troppo “ottimistico”: per la sua validità occorre fare ipotesi sulle due funzioni f e g che appaiono a secondo membro nelle (20-10). L'esatto enunciato del teorema (in una forma anche più generale) e la sua dimostrazione sono materia del corso di Analisi; noi qui lo daremo per valido nei casi d'interesse fisico, a meno di eccezioni che verranno discusse al momento opportuno.

Il piano delle fasi

Vogliamo ora discutere il problema da un punto di vista geometrico, il che — oltre a riuscire utile in molti casi — rende più intuitivo il significato del teorema di esistenza e unicità. Pensiamo al piano cartesiano (x, v) (*piano delle fasi*). Dato un punto del piano, ossia una coppia (x, v) , il sistema (20-10) permette di calcolare \dot{x} e \dot{v} , che possiamo rappresentare nel piano delle fasi come un *vettore* \mathbf{w} . Anzi, essendo dato un vettore per ogni punto, \mathbf{w} è un *campo vettoriale*, di componenti (\dot{x}, \dot{v}) .

Nota: Per mettere in evidenza che il piano delle fasi non è lo spazio fisico, useremo per i vettori una notazione diversa: \mathbf{w} anziché \vec{w} .

Una soluzione del sistema (20-10) è una *curva* γ nel piano, parametrizzata da t (a ogni t corrisponde un punto) (fig. 20-2). Presi due punti a istanti t e $t + dt$, le loro coordinate saranno (x, v) e $(x + \dot{x} dt, v + \dot{v} dt)$ e il vettore che li congiunge sarà $\mathbf{w} dt$ (fig. 20-3). In particolare, *la curva γ è tangente a \mathbf{w} in ogni suo punto*, e si chiama *curva integrale* del campo.

Dunque: *risolvere il sistema (20-10) (nel senso di determinare il suo integrale generale) equivale a trovare tutte le curve integrali del campo \mathbf{w} .*

Ricordiamo che una curva non è semplicemente l'insieme immagine, ma include anche la parametrizzazione: quando interessa riferirsi soltanto all'insieme (il *sostegno* della curva) si usa, come già sappiamo, il termine “traiettoria.” Perciò a ogni curva integrale corrisponde una traiettoria; ma il fatto che il sistema

sia autonomo ha una conseguenza: *una stessa traiettoria è comune a infinite curve integrali, che differiscono tra loro per una traslazione temporale*. Con ciò intendiamo che si prende lo stesso punto iniziale (x_0, v_0) , ma si cambia l'istante iniziale t_0 . È chiaro che così facendo si otterrà la stessa traiettoria, ma percorsa a tempi sfasati di una quantità costante.

Esempio: Se mettiamo in orbita un satellite artificiale in modo che all'istante t_0 abbia una data posizione e velocità, e a $t_0 + \Delta t_0$ ne mettiamo in orbita un altro, con la stessa posizione e velocità, il secondo rincorrerà il primo col ritardo fisso Δt_0 : ossia passerà per lo stesso punto P e con la stessa velocità \vec{v} un intervallo di tempo Δt_0 dopo il primo. Come si vede, la proprietà di cui stiamo parlando vale anche per sistemi a più di un grado di libertà, purché autonomi. In queste condizioni si dice che il sistema possiede “invarianza per traslazioni temporali,” che si esprime in modo semplice col “principio del taccuino”: dalle registrazioni di due esperimenti fatti a tempi diversi non è possibile accorgersi della differenza dei tempi, in quanto tutti i dettagli riescono identici (tutte le misure danno gli stessi risultati, ecc.) a parte uno sfasamento temporale costante.

Osservazione: Il concetto di traiettoria di un campo vettoriale coincide con quello di *linea di forza*, familiare per il campo elettrico o magnetico.

È intuitivo che per ogni punto del piano delle fasi *passa una e una sola traiettoria*: questo è il contenuto del teorema di esistenza e unicità per i sistemi autonomi. Vediamo così che

- le traiettorie sono infinite
- non hanno punti in comune
- riempiono il piano
- per individuarne una, occorre e basta assegnarne un punto.

Nota: Quando sia necessario, per distinguere fra traiettoria nello spazio fisico e traiettoria nel piano delle fasi, useremo per quest'ultima il termine *traiettoria di fase*.

Esempi

Illustriamo i concetti di piano delle fasi, di curve integrali e di traiettorie sugli esempi visti in precedenza.

Esempio 1: Il campo \mathbf{w} si ricava dalle (20–5), ed è indicato in fig. 20–4. Da questa figura, o anche dalle (20–6), si vede subito che le traiettorie sono rette parallele all'asse x (fig. 20–5). Occorre però osservare due cose:

- Da una retta all'altra cambia la parametrizzazione, com'è indicato dai trattini; in particolare per $v > 0$ le rette sono percorse da sinistra a destra, per $v < 0$ da destra a sinistra.
- Per $v = 0$ le traiettorie non sono rette, ma i singoli punti dell'asse x : infatti x resta costante durante il moto.

Esempio 2: Il campo \mathbf{w} è accennato in fig. 20–6, dalla quale non è facile vedere la forma delle traiettorie. Però l'equazione della generica traiettoria si ottiene facilmente dalle (20–7) eliminando t , e risulta

$$x = x_0 - \frac{v_0^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}.$$

Queste sono parabole aventi tutte per asse l'asse x , e che differiscono una dall'altra per una traslazione (fig. 20–7); al crescere di t vengono percorse dal basso verso l'alto se $g > 0$ (v cresce con t).

Esempio 3: In questo caso \dot{x}/\dot{v} è lo stesso in tutti i punti del campo, e perciò \mathbf{w} ha sempre la stessa direzione (ma non lo stesso verso: questo cambia a seconda del segno di v). Il modulo di \mathbf{w} è ovviamente proporzionale a $|v|$, e ne segue la fig. 20–8. Si vede chiaramente che le traiettorie sono rette, tutte tra loro parallele...

I puntini stanno a segnalare un dubbio... infatti la conclusione è sbagliata: se si guarda al verso di \mathbf{w} , si vede che un moto che inizia nel semipiano $v > 0$ si avvicina all'asse x , ma lo stesso accade se il punto di partenza è nell'altro semipiano. Se poi si parte con $v = 0$, il punto resta fermo. Dunque la soluzione corretta è che le traiettorie sono:

- *semirette aperte*, con origine sull'asse x , orientate verso tale asse
- oppure *i singoli punti* dell'asse x .

Dato che tutte le traiettorie terminano sull'asse x , questo si dice un *attrattore* per il sistema in esame (fig. 20–9). In altri casi un attrattore, se esiste, può essere un punto o una curva.

Esempio 4: Di questo ci occuperemo nel prossimo capitolo.

Esempio 5: Il campo \mathbf{w} si vede in fig. 20–10. Eliminando t dalle (20–9) otteniamo l'equazione delle traiettorie:

$$v = v_0 e^{\mp c(x-x_0)}$$

(valida per $v_0 \neq 0$: se $v = 0$ tutti i punti dell'asse x sono traiettorie, come nell'esempio 3). Si tratta di curve esponenziali, come in fig. 20–11.

Costanti del moto

Possiamo ora osservare una caratteristica comune a tutti gli esempi: eliminando t dalle espressioni di x e di v nell'integrale generale, si ottiene l'equazione della generica traiettoria, che ha necessariamente la forma

$$F(x, v) = \text{cost.} \tag{20-11}$$

In altre parole, *esiste una funzione di x e v che rimane costante durante il moto*. A tale funzione si dà il nome (ovvio!) di *costante del moto*, oppure quello più

matematico di *integrale primo* del sistema di equazioni differenziali. Il secondo nome sta a ricordare che si è effettuata una “prima integrazione” del sistema: infatti nella (20–11) sono scomparse le derivate, ma se si ricorda che $v = \dot{x}$ si vede che da una relazione contenente le derivate seconde siamo passati a una con le sole derivate prime. Abbiamo dunque “guadagnato” un ordine. Per questo motivo è sempre utile scoprire un integrale primo.

In termini matematici più accurati, la definizione d’integrale primo è la seguente. Sia Γ l’insieme delle curve integrali del sistema (20–10): diremo che una funzione $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ è un integrale primo se $\forall \gamma \in \Gamma$ la funzione composta $F \circ \gamma$ è costante. Ciò vuol dire che $F(x, v)$ si riduce identicamente a una costante ogni volta che in essa si sostituiscono a x e v le espressioni $x(t)$, $v(t)$ che danno una soluzione del sistema.

In termini fisici, la ricerca delle costanti del moto è uno dei primi obiettivi da porsi di fronte a un problema di meccanica. Nei nostri esempi la costante del moto è

- semplicemente v nell’esempio 1
- $x - v^2/2g$ nell’esempio 2
- $x + v/k$ nell’esempio 3.
- $v \exp(\pm cx)$ nell’esempio 5.

Vedremo in seguito che la prima ha a che fare con la conservazione della quantità di moto, la seconda con la conservazione dell’energia; la terza è la posizione finale raggiunta dal corpo (dopo un tempo infinito) quando la velocità si annulla. L’ultima non ha un significato fisico semplice.

Dato che le traiettorie riempiono il piano, e non hanno punti in comune, è chiaro che possiamo sempre vederle come *curve di livello* di qualche funzione $F(x, v)$. Poiché il moto si svolge sempre su di una stessa traiettoria, ne segue che questa F è una costante del moto: dunque *un sistema autonomo con un solo grado di libertà ammette sempre un integrale primo*. Purtroppo questo comodo risultato non si estende a sistemi più generali: l’esistenza d’integrali primi è assicurata solo in circostanze particolari, delle quali tratteremo più avanti.

Estensioni

Le considerazioni fatte per il caso semplice di sistemi autonomi con un solo grado di libertà si possono generalizzare, sia nel senso di più gradi di libertà, sia di sistemi non autonomi. Faremo ora un cenno a come procedano tali estensioni.

Moti in più dimensioni: Se abbiamo n dimensioni (> 1) avremo n coordinate $x_1 \dots x_n$ e n velocità $v_1 \dots v_n$; al posto del piano delle fasi avremo uno *spazio delle fasi* a $2n$ dimensioni; le condizioni iniziali richiederanno di assegnare per $t = t_0$ tutte le x e tutte le v . Vale ancora un teorema di esistenza e unicità, potremo parlare di integrali particolari e d’integrale generale, potremo cercare le costanti del moto (che saranno in generale funzioni di tutte le x e di tutte le v), ecc.

Sistemi non autonomi: Anche questa estensione è immediata, con un artificio: introduciamo una variabile ausiliaria u , con l'equazione $\dot{u} = 1$, che ha la soluzione ovvia $u = t + \text{cost.}$; aggiungiamo la condizione iniziale $u(t_0) = t_0$ e sarà $u = t$. Dopo di ciò, se a secondo membro nelle altre equazioni scriviamo u in luogo di t , dal punto di vista matematico abbiamo di nuovo un sistema autonomo (ma lo spazio delle fasi ha $2n + 1$ dimensioni). Però non è più vero, nello spazio delle fasi originario, che un punto determini da solo una traiettoria: questa potrà riuscire diversa a seconda dell'istante iniziale.

20a. Numeri complessi, ecc.

I numeri complessi sono un esempio di struttura matematica nata da un problema autonomo della matematica, e la cui grande utilità nella fisica è apparsa assai più tardi.

Cenno storico

È noto che le equazioni algebriche di 2° grado possono avere 2, 1 o nessuna radice (reale); la formula risolutiva era già nota ai matematici indiani del 6° secolo d.C. Il problema analogo per le equazioni di 3° e 4° grado fu risolto nel '500: per il 3° grado da Dal Ferro intorno al 1515, per il quarto da Ferrari verso il 1540. Essi ottennero formule risolutive più complicate di quella per l'equazione di secondo grado, ma sempre *algebriche*. Solo alla fine del '700 Ruffini dimostrava che invece non esiste un'espressione algebrica per le radici delle equazioni di grado superiore al quarto (a parte casi particolari).

Si può sempre ridurre la più generale equazione di 3° grado alla forma:

$$x^3 + ax + b = 0, \quad (20a-1)$$

e per essa la formula di Dal Ferro è:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad (20a-2)$$

Il lavoro di Dal Ferro portava però a una situazione paradossale: un'equazione di 3° grado può avere 1, 2 oppure 3 radici (reali); nell'ultimo caso, sebbene tutte le radici siano reali, nella formula risolutiva compare la radice quadrata di un numero negativo. Infatti la (20a-1) ha 3 radici reali se $4a^3 + 27b^2 < 0$.

Esempio: L'equazione

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

ha le radici -1 , -2 e 3 mentre la (20a-2) dà

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}.$$

Poco dopo Bombelli compie il grande passo di accettare la situazione, riconoscendo il carattere di numeri a questi nuovi enti (le radici quadrate di numeri negativi) e conia il nome di numeri "immaginari," cui venne poi, in modo naturale, contrapposto quello di "reali" per l'insieme più familiare dei numeri razionali e irrazionali. Bombelli scopre anche che si possono usare i numeri immaginari come i reali, e tratta la somma di un reale e di un immaginario come un nuovo

ente con caratteristiche sue proprie, che chiama un “complesso numerico.” Da qui il termine, poi entrato nell’uso corrente, di “numeri complessi.”

Definizioni

Si possono introdurre i numeri complessi in vari modi: dopo quanto abbiamo detto forse il modo più spontaneo è il seguente (non ci preoccuperemo troppo del rigore assiomatico).

Il *corpo complesso* \mathbf{C} è l’insieme \mathbf{R}^2 dotato di una legge di *addizione* nel modo naturale, e inoltre di una legge di *moltiplicazione*, della quale elencheremo fra poco le proprietà. I numeri della forma $(a, 0)$ si chiamano *reali* (non è difficile vedere che costituiscono un corpo, isomorfo a \mathbf{R}), mentre quelli della forma $(0, b)$ si chiamano *immaginari* (puri). In particolare, s’indica con i l’*unità immaginaria*, ossia l’elemento $(0, 1)$. Ogni numero complesso è la somma (in modo unico) di un reale e di un immaginario, e questo si esprime con la notazione di Gauss $c = a + ib$, dove a si chiama la *parte reale* di c , e b la *parte immaginaria*.

Ciò posto, la moltiplicazione si definisce in base alle proprietà seguenti:

1. $i \times i = -1$
2. $c \times (c' + c'') = c \times c' + c \times c''$ (proprietà distributiva rispetto alla somma)
3. $c \times c' = c' \times c$ (proprietà commutativa)
4. $c \times (c' \times c'') = (c \times c') \times c''$ (proprietà associativa).

Si usa sottintendere il segno \times quando il significato sia chiaro. Se si pone $c = a + ib$, $c' = a' + ib'$ si ha subito

$$c c' = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Il termine “corpo” sta a ricordare una proprietà che non dimostriamo: l’insieme $\mathbf{C} - \{0\}$ è un *gruppo rispetto alla moltiplicazione*. Ciò vuol dire che ogni numero complesso non nullo possiede un *inverso* unico:

$$c c^{-1} = c^{-1} c = 1$$

e perciò è possibile la divisione.

È importante osservare che l’applicazione che manda i in $-i$, lasciando inalterati i reali:

$$\gamma : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, \quad a + ib \mapsto a - ib$$

è un *automorfismo* di \mathbf{C} . Con ciò s’intende che valgono le seguenti proprietà:

- γ è bigettiva su \mathbf{C}
- $\gamma(c + c') = \gamma(c) + \gamma(c')$
- $\gamma(c \times c') = \gamma(c) \times \gamma(c')$.

Questo automorfismo prende il nome di *coniugazione*, e l'immagine di c si chiama il *complesso coniugato* e si denota con c^* (almeno questa è la notazione prevalente tra i fisici: i matematici preferiscono \bar{c}). Si vede subito che $(c^*)^* = c$.

Il fatto che la coniugazione complessa sia un automorfismo ha una conseguenza pratica che è bene ricordare: tutte le relazioni tra numeri complessi restano inalterate se si trasforma ogni numero nel suo coniugato, ossia se si sostituisce dovunque i con $-i$. Allora sarà sempre possibile avere due diverse convenzioni per l'uso dei numeri complessi, che differiscono per il segno di i .

Così ad es. nella teoria dei circuiti lineari in corrente alternata si definiscono le impedenze, e si dà per un'induttanza la formula $Z = i\omega L$: sarebbe ugualmente lecito scrivere $Z = -i\omega L$, a patto di essere coerenti in tutto il resto della teoria. Lo stesso accade in meccanica quantistica: è possibile scrivere in due modi l'equazione di Schrödinger, ecc. Per fortuna queste convenzioni sono ben consolidate, e tutti usano la stessa; ma ci sono dei punti cui fare attenzione: ne ripareremo in un prossimo capitolo.

Piano complesso, rappresentazione polare

È naturale la rappresentazione geometrica di \mathbf{C} in un piano cartesiano: al numero complesso $z = x + iy$ si associa il punto P di coordinate cartesiane (x, y) (fig. 20a-1). Allo stesso punto P possiamo anche associare coordinate polari ρ e ϑ , che si chiamano rispettivamente *modulo* e *argomento* di z :

$$|z| = \rho, \quad \arg(z) = \vartheta.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \vartheta, & y &= \rho \sin \vartheta \\ z &= \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta). \end{aligned} \tag{20a-3}$$

Dalla (20a-3) si vede facilmente che

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{20a-4}$$

(a rigore la somma nella seconda va intesa (mod 2π)). Ancora:

$$\begin{aligned} |z^{-1}| &= \frac{1}{|z|}, & \arg(z^{-1}) &= -\arg(z) \\ |z^*| &= |z|, & \arg(z^*) &= -\arg(z) \\ z z^* &= |z|^2, & z^* &= |z|^2 z^{-1} \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

Si chiama *cerchio unitario* l'insieme

$$U = \{ z \mid |z| = 1 \} = \{ z \mid z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta, \vartheta \in [0, 2\pi) \}.$$

Radici n -me di un numero complesso

Dato il numero complesso z , e l'intero positivo n , vogliamo trovare w tale che $w^n = z$. Dalle (20a-4) si vede che dovrà essere

$$|w|^n = |z|, \quad n \arg(w) = \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Mentre la prima determina univocamente $|w|$, la seconda consente per $\arg(w)$ la scelta di n valori diversi:

$$\arg(w) = \frac{1}{n} (\arg(z) + 2k\pi), \quad k = 0 \dots n - 1.$$

Esistono dunque n radici n -me di un numero complesso. La rappresentazione polare fa vedere la cosa in modo espressivo: se $z = \varrho e^{i\vartheta}$ si ha

$$w = \varrho^{1/n} e^{i\varphi_k}, \quad \text{dove} \quad \varphi_k = \frac{1}{n} (\vartheta + 2k\pi), \quad k = 0 \dots n - 1.$$

Abbiamo dimostrato che nel corpo complesso l'equazione $w^n = z$ (nell'incognita w) ha sempre esattamente n radici distinte. Questo c'introduce alla più importante proprietà di \mathbf{C} .

Il teorema fondamentale dell'algebra

Sappiamo che in \mathbf{R} un'equazione algebrica di grado $n > 1$ può avere un numero variabile di radici (da nessuna a n); questo rimane vero anche se si contano come multiple le eventuali radici coincidenti. Le cose vanno in modo del tutto diverso in \mathbf{C} : sussiste infatti il

Teorema: Un'equazione algebrica in \mathbf{C} ha sempre almeno una radice.

Ne segue facilmente il

Corollario: Le radici sono sempre esattamente in numero di n , se si contano come multiple le radici eventualmente coincidenti.

Purtroppo la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra non è possibile con mezzi elementari; in Arnol'd, *Teoria delle catastrofi*, Cap. 15 si trova accennata nelle idee fondamentali una dimostrazione assai elegante.

Funzioni a valori complessi

Le funzioni $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ hanno molte proprietà di quelle $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, come abbiamo già osservato nel Cap. 10: usando $|z|$ come norma, si può definire allo stesso modo la continuità, la derivabilità, ecc.

Ci serviremo di questo fatto per estendere al corpo complesso la definizione delle funzioni trascendenti elementari: cominciamo con l'esponenziale. Richiediamo alla funzione esponenziale, come funzione $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, le proprietà seguenti:

- 1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
- 2) $e^0 = 1$
- 3) $\frac{d}{dt} e^{zt} = z e^{zt} \quad (t \in \mathbf{R})$.

La 2) e la 3) implicano che per z reale la nuova definizione coincide con la vecchia: stiamo dunque veramente estendendo la già nota funzione esponenziale. Inoltre la 1) implica

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

e perciò basta studiare e^{iy} .

Poniamo $e^{iy} = u(y) + iv(y)$, con u, v funzioni reali per ora incognite; usando la 3):

$$u'(yt) + i v'(yt) = i(u + iv) = iu - v$$

da cui

$$u' = -v, \quad v' = u,$$

mentre dalla 2) si vede che $u(0) = 1, v(0) = 0$. Ricordando quanto visto al Cap. 11, ne segue subito

$$u(y) = \cos y, \quad v(y) = \sin y$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Dunque:

$$|e^z| = e^x, \quad \arg(e^z) = y \tag{20a-4}$$

e per il cerchio unitario U

$$U = \{ e^{iy} \mid y \in [0, 2\pi) \}.$$

Dalla (20a-4) segue subito

$$\cos y = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) \quad \sin y = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy})$$

e possiamo sfruttare queste per estendere anche le funzioni circolari al corpo complesso:

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Si verifica senza difficoltà che le estensioni così definite conservano tutte le proprietà note delle funzioni circolari: periodicità, formule di addizione, ecc.