

17. Forze apparenti nel “laboratorio Terra”

Come già detto, un campo di applicazione pratica delle idee sviluppate nel cap. prec. è il riferimento solidale alla Terra, che non è certamente inerziale, e nel quale si possono mettere in evidenza tutti gli effetti di cui abbiamo parlato. Cominciamo perciò col definire la situazione, introducendo anche le necessarie schematizzazioni.

Il riferimento “Terra”

Agli scopi della presente discussione faremo le seguenti semplificazioni:

- a) La Terra è una sfera rigida, di raggio $R = 6.38 \cdot 10^6$ m. In realtà più avanti potremo ridiscutere quest'ipotesi, e distingueremo R_e (raggio equatoriale) da R_p (raggio polare): il dato numerico citato sopra si riferisce a R_e .
- b) Il suo centro T si muove attorno al Sole di moto circolare uniforme; la corrispondente accelerazione si calcola a partire dal raggio dell'orbita e dal periodo, e vale $a_{\text{riv}} = 5.9 \cdot 10^{-3}$ m/s².
- c) Il moto di rotazione è uniforme con asse fisso; l'asse forma angolo $\varepsilon \simeq 23^\circ$ con la normale al piano dell'orbita; il periodo è un giorno *siderale*, pari a circa $8.62 \cdot 10^4$ s. Ne segue che all'equatore l'accelerazione dovuta alla rotazione vale $a_{\text{rot}} = 3.4 \cdot 10^{-2}$ m/s².
- d) La massa della Terra è trascurabile rispetto a quella del Sole (il rapporto M_S/M_T vale circa $3 \cdot 10^5$) ed è pure trascurabile l'azione degli altri pianeti.
- e) Sebbene sia molto più importante, trascuriamo anche l'azione della Luna.

Indichiamo con K un riferimento (inerziale) solidale al centro del Sole e orientato verso le “stelle fisse”; con K_1 il riferimento solidale a T, ma in moto puramente traslatorio rispetto a K; con K' quello solidale con la Terra (e quindi in rotazione rispetto a K_1).

Nel riferimento K_1 la sola forza apparente è $-m\vec{a}_{\text{riv}}$; visto che a_{riv}/g è dell'ordine di 10^{-3} , ne segue che tale forza è $\sim 10^{-3}$ volte il peso di un corpo. Essa è diretta in verso opposto al Sole; però su ogni corpo agisce anche la forza (reale) \vec{F}_S di attrazione del Sole, che ha modulo $GM_S m/D^2$ ed è diretta verso il Sole. Qui D è la distanza \overline{PS} (fig. 17-1), che è pressoché uguale a $D_0 = \overline{TS}$ (entro $\sim 4 \cdot 10^{-5}$); anche la direzione di \vec{F}_S è circa la stessa di TS, cioè quella di \vec{a}_{riv} . Inoltre $a_{\text{riv}} = GM_S/D_0^2$.

L'accelerazione \vec{a}_S prodotta da \vec{F}_S è dunque praticamente uguale ad \vec{a}_{riv} (la Terra e tutti gli oggetti vicini “cadono” con la stessa accelerazione verso il Sole!) per cui la forza risultante $\vec{F}_S - m\vec{a}_{\text{riv}}$ è nulla, con ottima approssimazione. Discuteremo più avanti l'effetto dell'essere questa cancellazione soltanto approssimata.

Abbiamo dunque scoperto che il riferimento K_1 (che possiamo chiamare “riferimento in caduta libera” nel campo gravitazionale del Sole) può essere

trattato come inerziale, se allo stesso tempo dimentichiamo l'attrazione solare. Questo nella meccanica terrestre si fa sempre, senza pensarci: nessuno tiene conto dell'attrazione solare sulla caduta di un grave, e neanche sul moto di un aereo. Eppure non si tratta di un effetto tanto piccolo: lasciando cadere un sasso dalla Torre Pendente, se l'attrazione solare entrasse in gioco, devierebbe il sasso verso Est al mattino e verso Ovest la sera, di oltre 3 cm! In effetti la relatività generale basa proprio su quest'osservazione una ridefinizione del concetto di riferimento inerziale. Ma anche da un punto di vista pratico, è molto comodo che ci si possa dimenticare dell'attrazione solare nella meccanica terrestre.

Passiamo ora a K' , che ruota rispetto a K_1 . Qui dobbiamo aspettarci due effetti:

- forza centrifuga, in misura di qualche millesimo dell'attrazione gravitazionale della Terra
- forza di Coriolis, che dipende dalla velocità del corpo.

La forza centrifuga

L'espressione della forza centrifuga è

$$\vec{F}_c = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m \omega^2 \vec{r} - m (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} = m \omega^2 \vec{r}_\perp.$$

Si vede che $|\vec{F}_c| = m \omega^2 R \cos \varphi_0$, e la direzione è ortogonale all'asse di rotazione (fig. 17-2).

Le forze agenti su di un grave sono dunque due: l'attrazione della Terra, che indicheremo con $m\vec{g}_0$, e la forza centrifuga \vec{F}_c . L'accelerazione risultante sarà $\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{F}_c/m$, e si vede dalla figura che è sempre $|\vec{g}| < |\vec{g}_0|$ (la differenza è del 3.4 per mille all'equatore); inoltre la direzione di \vec{g} non è più radiale.

Chiaramente \vec{g} dà la direzione osservata della verticale (filo a piombo); la superficie libera dei liquidi è ortogonale a \vec{g} . L'angolo della verticale locale col piano dell'equatore definisce la *latitudine geografica* φ : dunque $\varphi > \varphi_0$ (φ_0 si chiama *latitudine geocentrica*). Lasciamo per esercizio di verificare che il massimo della differenza $\varphi - \varphi_0$ si ha per $\varphi_0 \simeq 45^\circ$, e vale quasi esattamente 0.1° .

La conseguenza fisica più importante della forza centrifuga è però lo schiacciamento della forma della Terra, come vide lo stesso Newton. Se la Terra non è esattamente solida, ma fluida (come certamente è, sulla scala dei tempi geologici) allora la sua superficie di equilibrio deve in ogni punto essere perpendicolare a \vec{g} (fig. 17-3). Naturalmente la deformazione ha per effetto che anche il campo gravitazionale \vec{g}_0 non è più quello di una massa a simmetria sferica, e perciò il calcolo si complica. La forma della Terra è con buona approssimazione un ellissoide di rotazione schiacciato, per cui occorre distinguere il *raggio equatoriale* R_e dal *raggio polare* R_p : la differenza misurata è $R_e - R_p = 21$ km. Questo

schacciamento è presente in tutti i pianeti, ma è particolarmente marcato per Giove e Saturno; per quest'ultimo la differenza fra R_e e R_p è quasi il 10%.

Tanto la forza centrifuga quanto lo schacciamento cospirano a rendere l'accelerazione di gravità osservata maggiore al Polo e minore all'Equatore: i valori misurati sono:

$$g_p = 9.832 \text{ m/s}^2, \quad g_e = 9.780 \text{ m/s}^2$$

$$g = 9.806 \text{ m/s}^2 \quad \text{per } \varphi = 45^\circ.$$

Va ricordato che mentre Newton fu in grado, in base alla sua teoria, di prevedere tanto lo schacciamento quanto le variazioni di g , anche in termini quantitativi, la situazione sperimentale ai suoi tempi era meno chiara, specie per lo schacciamento. La variazione di g si riconduceva facilmente a quella del periodo di un pendolo, e dati attendibili erano già stati raccolti alla fine del '600. Invece lo schacciamento è più difficile da mettere in evidenza: essendo fuori questione la misura diretta di R_e e di R_p , si ricorreva alla "lunghezza del grado di meridiano": l'arco di meridiano corrispondente a una differenza di latitudine di 1° deve variare con la latitudine se la Terra non è sferica, risultando tanto maggiore quanto più ci si avvicina al Polo, se la Terra è schacciata. (Perché?) Dato che la differenza è piccola, le misure del tempo non fornivano risultati univoci: vi era anche chi sosteneva che la Terra fosse allungata (a forma di uovo). Solo anni dopo la morte di Newton la controversia fu definitivamente chiusa.

La forza di Coriolis

La forza di Coriolis si manifesta soltanto su corpi in moto rispetto a K' . Illustreremo ora due esempi classici.

La deviazione dei gravi verso Est: Nella caduta dei gravi la forza è orizzontale, e perciò provoca una piccola deviazione dalla traiettoria verticale; verificando la direzione della forza, si vede che la deviazione è verso Est. Non faremo il calcolo; il risultato è proporzionale al coseno della latitudine e alla potenza $3/2$ dell'altezza di caduta: per la Torre Pendente sarebbe di 6 mm, quindi difficilmente osservabile.

Il pendolo di Foucault: Nel moto di un pendolo la forza di Coriolis provoca una *rotazione del piano di oscillazione*. Almeno nel caso di un pendolo posto al Polo, il fenomeno si comprende molto meglio mettendosi nel riferimento K_1 : in questo riferimento il piano è invariabile, e perciò nel riferimento K' esso ruota in senso opposto alla rotazione terrestre, facendo un giro in un giorno. È meno semplice dimostrare che a una latitudine intermedia l'effetto c'è ancora, ma la rotazione è più lenta, in proporzione a $\sin \varphi$.

Questo esperimento è universalmente noto come "pendolo di Foucault," dal nome del fisico che per primo lo realizzò nel 1851. La sua importanza storica

e concettuale sta nell'aver dato una prova della rotazione terrestre del tutto indipendente da osservazioni esterne (astronomiche).

La forza di Coriolis nell'atmosfera

Ma l'effetto di gran lunga più importante della forza di Coriolis è nei fenomeni meteorologici. Per cominciare, consideriamo una massa d'aria che si muove lungo un parallelo, verso Est, con velocità \vec{v} (fig. 17-4). Allora la forza di Coriolis $\vec{F}_{cc} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ è diretta verso l'esterno, ortogonale all'asse polare, e ha modulo $2m\omega v$. A noi interessa il moto dell'aria lungo la superficie terrestre, e perciò useremo la componente \vec{F}'_{cc} tangente alla superficie: questa è diretta verso Sud, e ha modulo $2m\omega v \sin \varphi$.

Esercizio: Dimostrare che anche se \vec{v} ha direzione diversa, purché tangente alla superficie terrestre, \vec{F}'_{cc} ha sempre lo stesso modulo, ed è sempre diretta verso destra rispetto a \vec{v} .

Dunque l'aria verrà spinta verso Sud (o in generale verso destra), a meno che non esista un'altra forza che compensa la forza di Coriolis. Nell'atmosfera tale forza proviene di solito da differenze di pressione: vediamo perché.

In fig. 17-5 sono rappresentate due *isobare* (curve di livello della pressione al suolo) corrispondenti a due valori p_1 e p_2 molto vicini; sia h la distanza delle isobare in P. Sull'aria contenuta nel cubetto di lato h agiscono, per effetto dell'aria circostante, due forze diverse in direzione x (per la scelta degli assi v. la figura): $p_1 h^2$ nel verso positivo, e $p_2 h^2$ nel verso negativo (le forze sulle facce perpendicolari a y si cancellano, e quelle lungo z non c'interessano). La risultante è

$$F_p = (p_1 - p_2) h^2 = -\frac{dp}{dx} h^3;$$

il segno di F_p sarà positivo se $p_1 > p_2$, ossia se la pressione decresce nel verso positivo di x .

Se ρ è la densità dell'aria, la massa contenuta nel volumetto è $m = h^3 \rho$, per cui

$$F_p = -\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dx},$$

o meglio, in forma vettoriale:

$$\vec{F}_p = -\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dx} \vec{e}_x.$$

Il vettore $(dp/dx) \vec{e}_x$ si chiama il *gradiente* di p .

Se vogliamo equilibrio delle forze, occorrerà $\vec{F}_p + \vec{F}'_{cc} = 0$, da cui:

- a) la velocità \vec{v} dev'essere ortogonale al gradiente di pressione: più esattamente l'alta pressione deve stare *alla destra* di \vec{v}
- b) il modulo del gradiente di pressione deve valere

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| = 2 \omega v \varrho |\sin \varphi|. \quad (17-1)$$

Nota: la regola della destra vale finché $\sin \varphi > 0$, ossia nell'emisfero settentrionale; nell'emisfero australe vale la regola della sinistra!

Mettiamo qualche numero: $\omega = 7.3 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $\varrho = 1.3$ kg/m³ (varia con la pressione e la temperatura, ma solo di qualche %). Se pensiamo a un vento moderato, $v = 10$ m/s, alle nostre latitudini ($\varphi = 45^\circ$), risulta $|dp/dx| = 1.3 \cdot 10^{-3}$ Pa/m, che è un gradiente di pressione del tutto consueto nell'atmosfera. (Si ricordi che 1 Pa = 1 N/m².)

Quanto abbiamo visto spiega perché in un'area di bassa pressione i venti abbiano andamento antiorario (al Nord): per questo si parla di *aree cicloniche*, ossia con circolazione concorde con la rotazione terrestre (fig. 17-6). Nelle aree di alta pressione invece la circolazione è opposta (aree *anticicloniche*, fig. 17-7). Nelle figure sono indicate le isobare e i valori della pressione in mbar (unità usata dai meteorologi: 1 mbar = 10² Pa).

A rigore non può essere vero che la circolazione dell'aria segua le isobare con la velocità indicata dalla (17-1), per due ragioni:

- 1) Se queste sono curve, esiste un'accelerazione centripeta: quindi \vec{F}'_{cc} e \vec{F}_p non si equilibrano esattamente:

$$\vec{F}'_{cc} + \vec{F}_p = m \vec{a}.$$

A conti fatti però, se la curvatura non è troppo forte, l'accelerazione centripeta è abbastanza piccola, per cui la (17-1) vale almeno come prima approssimazione.

- 2) Esiste un'altra forza, importante in vicinanza del suolo: l'attrito. Poiché la forza di attrito è opposta a \vec{v} , si vede che la condizione

$$\vec{F}'_{cc} + \vec{F}_p + \vec{F}_a = 0$$

è soddisfatta solo se \vec{v} ha una componente radiale (verso l'interno in area ciclonica (fig. 17-8), verso l'esterno in area anticiclonica). Perciò l'aria converge al centro in un'area ciclonica, e qui si solleva; viceversa in area anticiclonica l'aria si allontana dal centro, ed è rimpiazzata da aria proveniente da strati superiori.

Conseguenza di quanto osservato in 2) è che in un'area ciclonica l'aria ascendente si raffredda (espansione adiabatica), il vapore d'acqua condensa, e ne seguono nuvole e pioggia; viceversa in un'area anticiclonica l'aria che discende si riscalda, le nubi si dissolvono e il cielo è sereno. Questo in una schematizzazione molto semplificata; in realtà i fenomeni meteorologici sono assai più complessi, se non altro perché coinvolgono effetti termodinamici.

Resta il fatto che in tutta la circolazione atmosferica la forza di Coriolis gioca un ruolo determinante: oltre che nei fenomeni a scala relativamente piccola, come quelli visti sopra, entra anche nella cosiddetta "circolazione generale": i grandi movimenti provocati dalle differenze d'insolazione fra le regioni equatoriali e quelle polari. Se non ci fosse la forza di Coriolis, questi moti convettivi si svolgerebbero prevalentemente lungo i meridiani; invece è noto che la circolazione alle latitudini temperate è da Ovest verso Est, mentre quella verso la zona equatoriale (alisei) è da Nord-Est verso Sud-Ovest nell'emisfero settentrionale, da Sud-Est verso Nord-Ovest in quello meridionale.

Le maree

Abbiamo visto all'inizio di questo capitolo che nel riferimento K_1 si può dimenticare l'attrazione solare, perché è compensata dalla forza apparente. Però questa compensazione è soltanto approssimata, e vogliamo ora discutere le conseguenze di ciò.

Nella fig. 17-9 è rappresentata la Terra, e il Sole è indicato dalla freccia (alla scala della figura starebbe a circa 500 m!) Nel punto A della superficie terrestre più vicino al Sole, la forza di attrazione solare è maggiore di quella che si avrebbe nel punto T: dunque la risultante delle due è diretta verso il Sole. Invece nel punto B l'attrazione è minore, e la risultante è diretta in verso opposto. Infine, in punti come C (e D) la distanza è praticamente la stessa, e quindi il modulo della forza di attrazione è lo stesso di quello della forza apparente, ma le direzioni sono diverse: la forza apparente ha sempre la direzione di $-\vec{a}_{riv}$, ossia quella opposta a TS, mentre l'attrazione è diretta come CS. Le due forze quindi non si cancellano, ma rimane una risultante diretta verso il centro della Terra.

Riassumendo: nel riferimento K_1 l'attrazione solare non viene esattamente cancellata dalla forza apparente, ma sopravvive un campo di forze con l'andamento della fig. 17-10. L'effetto di questa forza è di provocare uno spostamento dell'acqua degli oceani, che si solleva in corrispondenza dei punti A e B, mentre si abbassa in C e D: per questo motivo la forza in questione prende il nome di *forza di marea*. Poiché la Terra gira, il punto A non è fisso rispetto alla Terra solida: ne segue che in dato luogo della Terra l'alta marea si presenta *due volte al giorno*.

Vogliamo ora calcolare l'entità dell'effetto di marea, e per questo è necessario studiare la forza di marea per un punto P generico della superficie terrestre.

Avremo (fig. 17-9)

$$\overline{SP}^2 = D^2 = D_0^2 + R^2 - 2D_0R \cos \alpha = D_0^2 \left(1 - \frac{2R}{D_0} \cos \alpha \right),$$

avendo trascurato un termine di secondo ordine in $R/D_0 \simeq 4 \cdot 10^{-5}$. La forza di attrazione del Sole ha modulo

$$\begin{aligned} F_S &= \frac{GM_S m}{D^2} = \frac{GM_S m}{D_0^2} \left(1 - \frac{2R}{D_0} \cos \alpha \right)^{-1} \\ &= \frac{GM_S m}{D_0^2} \left(1 + \frac{2R}{D_0} \cos \alpha \right) = ma_{\text{riv}} \left(1 + \frac{2R}{D_0} \cos \alpha \right), \end{aligned} \quad (17-2)$$

dove abbiamo fatto uso della relazione

$$\frac{1}{1 - \varepsilon} = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Dunque la (17-2) è corretta a meno di termini di secondo ordine in R/D_0 . Assumendo gli assi come in figura, avremo

$$F_{Sx} = F_S, \quad F_{Sy} = -ma_{\text{riv}} \frac{R}{D_0} \sin \alpha,$$

sempre a meno di termini di secondo ordine.

Quanto alla forza apparente, il suo modulo è esattamente ma_{riv} ; perciò la forza di marea ha componenti

$$F_{mx} = ma_{\text{riv}} \frac{2R}{D_0} \cos \alpha, \quad F_{my} = -ma_{\text{riv}} \frac{R}{D_0} \sin \alpha.$$

Per capire l'azione di marea, supponiamo che i punti A e C della fig. 17-9 siano collegati da un tubo a L, che arriva al centro della Terra (fig. 17-11). Se l'acqua in A e in C avesse la superficie libera alla stessa distanza R da T, la pressione nel punto T del tubo dovuta alla gravità terrestre sarebbe la stessa nei due rami del tubo, ma a questa si sommerebbe la forza di marea nel ramo TC, mentre si sottrarrebbe nel ramo TA. Calcoliamo questi "differenziali di pressione": nel ramo TC la forza passa linearmente da zero (in T) a un massimo (in C); potremo dunque usare la forza media che si ha alla distanza $R/2$ dal centro. La massa della colonna di liquido è $\varrho R \sigma$, se σ è la sezione del tubo, e quindi la forza vale

$$\varrho R \sigma a_{\text{riv}} \frac{R}{2D_0}.$$

La forza nel ramo TA è doppia di questa, e complessivamente si ha uno sbilanciamento di pressione

$$\frac{3}{2} \varrho a_{\text{riv}} \frac{R^2}{D_0},$$

che dev'essere compensato dal dislivello h che stiamo cercando. Il cilindretto di altezza h nel punto A avrà un peso $\rho g h \sigma$ e produrrà una pressione $\rho g h$: uguagliando otteniamo

$$h = \frac{3}{2} \frac{a_{\text{riv}}}{g} \frac{R^2}{D_0} = 0.25 \text{ m};$$

questa è dunque l'escursione di marea prevista.

In realtà le maree sono un fenomeno molto più complicato, per diverse ragioni:

- Accanto alla *marea solare*, che è quella che abbiamo appena discusso, esiste anche una *marea lunare*, che ha la stessa origine ma è un po' più difficile da spiegare. Dato che la forza di marea dipende da M/D_0^3 , a conti fatti si vede che quella lunare ha intensità più che doppia, e perciò prevale nel determinare le maree osservate.
- Le due maree hanno andamenti temporali diversi, perché le posizioni della Luna e del Sole cambiano nel tempo. Nelle fasi di luna piena e luna nuova (sizigie) gli effetti si sommano, mentre ai quarti si sottraggono.
- Gli attriti dovuti al moto dell'acqua sul fondo alterano le maree, soprattutto sfasandole in ritardo.
- Le oscillazioni dell'acqua dovute alle maree vengono modificate, e talvolta grandemente amplificate, da effetti di risonanza: questo spiega perché esistono luoghi dove le maree possono essere anche 20 volte più ampie di quello che il nostro calcolo darebbe.

17a. Il principio di equivalenza

In questo capitolo vogliamo riprendere alcuni fili lasciati sospesi in diversi capitoli precedenti, e che ci porteranno alle soglie di una delle più grandi conquiste della fisica di questo secolo: la teoria relativistica della gravitazione.

Proprietà della gravitazione

Cominciamo richiamando i “fili” di cui si diceva:

- a) Cap. 4: tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione (Galileo).
- b) Cap. 5: gli effetti inerziali della massa sono proporzionali agli effetti gravitazionali.
- c) Cap. 17: in un riferimento in caduta libera in campo gravitazionale, la forza di gravità viene cancellata dalla forza apparente.

L’asserzione *a)* si generalizza — come vedremo meglio più avanti — nella seguente: *il moto in campo gravitazionale è lo stesso per tutti i corpi*, ossia non dipende né dalla massa né dalla natura fisica del corpo che si muove. Poiché la forza agente è una manifestazione *gravitazionale* della massa, mentre l’accelerazione è determinata dall’effetto *inerziale*, quanto appena detto equivale all’asserzione *b)*.

Più esattamente, a riguardo di *b)* occorre distinguere due aspetti, perché ci sono due tipi di effetti gravitazionali di una massa: quelli *attivi* e quelli *passivi*. Parliamo di effetto attivo quando diciamo che la forza prodotta (ad es. dalla Terra) è proporzionale alla massa *che la produce*; parliamo invece di effetto passivo quando diciamo che la forza è proporzionale alla massa *su cui agisce*. Che le due cose debbano coincidere discende dal 3° principio: se infatti consideriamo l’interazione gravitazionale tra due corpi (ad es. la Terra e la Luna) e se ammettiamo che la forza sulla Luna sia proporzionale alla massa della Terra (effetto attivo) avremo per conseguenza che anche la forza sulla Terra, che ha la stessa grandezza, è proporzionale alla massa di questa: ma ora la massa della Terra interviene per il suo effetto passivo.

Dato che *a)* e *b)* sono equivalenti, per essere sicuri della validità di entrambe le proposizioni basterebbe studiare sperimentalmente la caduta dei gravi. Questo è ciò che fece Newton usando dei pendoli: egli provò che il periodo dipendeva solo dalla lunghezza del pendolo; ma misure di questo genere non sono molto precise.

Quanto a *c)*, se rivediamo la dimostrazione data nel Cap. 17 troviamo che la cancellazione si basa sul fatto che entrambe le forze sono proporzionali alla massa, ossia di nuovo su *b)*. In sostanza, *a)*, *b)* e *c)* dicono esattamente la stessa cosa: perciò ciascuno dei tre fatti può essere usato per provare gli altri.

Questo era già chiaro a Newton, il quale ricorse ai satelliti di Giove (scoperti da Galileo 70 anni prima): il discorso è il seguente. Si vede dalle osservazioni

astronomiche che i satelliti di Giove girano intorno al pianeta come se il Sole non ci fosse. Eppure quei satelliti oltre che da Giove sono attratti anche dal Sole: ma è un fatto che nel sistema di riferimento di Giove l'attrazione gravitazionale del Sole non ha effetto. Newton ne conclude che la forza di gravità del Sole è proporzionale alla massa del corpo attratto. Infatti solo in tal caso l'accelerazione dovuta al Sole sarà la stessa sia per Giove, sia per i satelliti: condizione necessaria e sufficiente perché l'attrazione solare si cancelli nel riferimento di Giove, che è in caduta libera verso il Sole.

Sullo stesso principio si basano anche gli esperimenti successivi, dagli inizi di questo secolo (Eötvös) fino a tempi più recenti (Dicke, Braginskij). Ad esempio, questi ultimi verificano con grandissima precisione quello che abbiamo detto nel cap. precedente: confrontando l'attrazione solare su corpi diversi, situati in un laboratorio terrestre, non si trova nessuna differenza osservabile. Gli ultimi risultati danno per queste misure errori inferiori a 10^{-12} .

Il principio di equivalenza

Le proprietà della gravitazione che abbiamo appena discusse non hanno una connessione logica con le leggi della meccanica newtoniana: si potrebbe concepire benissimo un universo in cui valgono le tre leggi di Newton, ma la forza di gravità segue leggi diverse da quelle che conosciamo. Tuttavia le cose nel nostro universo stanno come abbiamo visto, e le conferme sperimentali hanno un elevatissimo grado di precisione. S'intende che tutto questo era ben noto già dopo Newton: le verifiche sperimentali di questo secolo sono soltanto servite a rafforzare le nostre convinzioni in proposito.

A questo punto interviene Einstein. La sua prima idea consiste nel capovolgere la relazione fra *a*), *b*) e *c*): anziché vedere *c*) come una conseguenza (come abbiamo fatto noi finora) egli assume che l'esatta cancellazione, e quindi la stretta somiglianza tra la forza di gravità e le forze apparenti in un riferimento accelerato, esprima la natura fondamentale della gravitazione.

Einstein descrive la situazione con uno dei suoi classici *esperimenti ideali*: quello dell'ascensore (oggi a tutti noto come "ascensore di Einstein"). Si tratta di un ascensore che a causa della rottura delle corde di sostegno, e in mancanza di freni e attriti di qualsiasi genere, si trova in caduta libera verticale. La descrizione che la meccanica newtoniana dà di un tale ascensore è la seguente: esso non è un riferimento inerziale, dal momento che si muove di moto uniformemente accelerato. Quindi su di un oggetto nell'ascensore oltre alla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$, rivolta verso il basso, agisce la forza apparente $\vec{F} = -m\vec{a}$, dove \vec{a} è l'accelerazione del riferimento (fig. 17a-1). Essendo $\vec{a} = \vec{g}$ ne segue che le due forze sono uguali e opposte, e la loro risultante è nulla: in un ascensore in caduta libera le cose sono *senza peso*, nel senso che se si va a misurare con un dinamometro la forza applicata a un qualsiasi oggetto, si trova zero. Ne segue poi che se a questo

oggetto diamo una spinta, esso si muoverà di moto uniforme, come vorrebbe il principio d'inerzia.

Occorre notare che fin qui non abbiamo detto niente di nuovo: non c'è ancora nessuna scoperta. Però Einstein, come abbiamo detto, parte dall'idea che questa non sia una coincidenza, ma un fatto fondamentale: sia ciò che caratterizza la fisica della gravità. Afferma perciò che *di fatto* l'ascensore è un riferimento inerziale, a patto di dimenticare la forza di gravità. In altre parole, l'ascensore in caduta libera è indistinguibile da una navicella spaziale che sia lontana dalla Terra, dal Sole, o da qualsiasi altro corpo; che si trovi insomma al di fuori di ogni campo gravitazionale e si muova di moto uniforme.

Per di più, Einstein fa anche in questo caso la stessa operazione che ha fatto sul principio di relatività. Afferma che non solo ciò è vero per quanto riguarda la misura delle forze, ossia i fatti meccanici, ma è vero per tutta la fisica. Se dentro a quest'ascensore che sta precipitando verso il basso eseguiamo un qualsiasi esperimento di fisica, non potremo distinguerlo da un esperimento fatto in un riferimento inerziale lontanissimo da qualsiasi sorgente di forze gravitazionali.

In questo contesto, come nella formulazione del principio di relatività, "qualsiasi esperimento di fisica" vuol dire proprio un esperimento relativo a qualsiasi campo della fisica. Potremo fare ad es. un esperimento sulla propagazione della luce; oppure potremo studiare come si comporta un nucleo radioattivo: troveremo che questi esperimenti, fatti nell'ascensore che cade, ci daranno esattamente gli stessi risultati che darebbero nel riferimento inerziale consistente in un'astronave che viaggia a motori spenti nello spazio interstellare (principio del taccuino).

Naturalmente l'ascensore è solo un esempio, ma il principio ha portata assolutamente generale:

"Tutti i riferimenti in caduta libera sono, per qualsiasi effetto fisico, equivalenti a riferimenti inerziali."

È questo l'enunciato del *principio di equivalenza*.

Principio di equivalenza "forte" e "debole"

Per distinguere tra il principio di equivalenza com'era noto a Newton, e quello enunciato da Einstein, si usa talvolta chiamare il primo "debole" e il secondo "forte." Il principio di equivalenza "debole" dice semplicemente che in un riferimento in caduta libera la gravità si cancella, e questo non aggiunge niente di nuovo alla fisica newtoniana. La novità sta nel principio di equivalenza "forte," secondo cui l'equivalenza tra la fisica in un riferimento in caduta libera e la fisica in un riferimento inerziale si estende a qualsiasi fenomeno: le leggi della fisica sono identiche.

È chiaro il parallelismo col principio di relatività. Questo dice che riferimenti in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro sono fisicamente equivalenti,

cioè indistinguibili: nel senso che gli esperimenti fatti nell'uno e nell'altro danno gli stessi risultati. Il principio di equivalenza fa la stessa affermazione, però stavolta relativamente a riferimenti di tipo diverso, cioè a un riferimento in caduta libera — ad es. nel campo gravitazionale della Terra — confrontato con un riferimento inerziale.

Abbiamo già osservato che il principio di equivalenza si applica a qualsiasi campo gravitazionale, e qualsiasi tipo di caduta libera: per esempio a un'astronave in caduta libera verso il Sole. Non solo: non è necessario, per parlare di caduta libera, che si tratti di un moto verticale; è solo necessario che il corpo cui è associato il nostro riferimento non sia sottoposto ad altre forze esterne oltre alla forza di gravità. Così ad es. una navetta che gira intorno alla Terra, fuori dell'atmosfera, è un riferimento in caduta libera, poiché la sola forza agente è quella di gravità: non ci sono motori accesi, né la resistenza dell'aria (trascuriamo la pressione di radiazione del Sole).

Nel seguito useremo spesso questa espressione; tutte le volte che parleremo di “riferimento in caduta libera” intenderemo un riferimento che si muova sotto l'azione della sola gravità: della Terra, del Sole, della Luna, magari di tutti questi corpi insieme. Un'astronave che si muove nel sistema solare sentirà l'azione del Sole e quella dei pianeti; seguirà una traiettoria complicata, che potrà anche farla passare vicino a qualche pianeta, dove verrà deviata e magari accelerata; ma finché si muoverà sotto la sola azione della gravità combinata di tutti gli oggetti presenti, sarà sempre un riferimento in caduta libera.

Nota: La distinzione fra equivalenza “forte” e “debole” non è unanimemente condivisa: vi è chi sostiene — con un certo fondamento — che anche la semplice equivalenza debole non potrebbe sussistere se l'equivalenza non valesse per tutti i fenomeni fisici, anche a livello microscopico. Pertanto le verifiche di tale identità, che sono estremamente accurate, sarebbero prove dell'equivalenza in senso forte.

Carattere locale del principio di equivalenza

Dobbiamo ora precisare un punto. Un enunciato rigoroso del principio di equivalenza fa uso del termine “locale”: i riferimenti in caduta libera sono *localmente* inerziali. L'equivalenza tra un riferimento in caduta libera e uno inerziale non può essere esatta: in realtà tra l'ascensore in caduta libera e l'astronave che viaggia nello spazio completamente vuoto qualche differenza ci deve essere.

Se infatti consideriamo due palline A e B dentro l'ascensore, come nella fig. 17a-2, la forza di gravità cui sono soggette non è esattamente la stessa, perché sono a distanza diversa dal centro della Terra. La pallina A sarà attratta con una forza un po' maggiore che se stesse al centro C della cabina, B con una forza un po' minore.

Di conseguenza mentre l'ascensore cade con la sua accelerazione g , A cade con un'accelerazione leggermente più grande e B con una leggermente più piccola.

Dopo un po' di tempo non vedremo più A dove stava all'inizio, ma un poco più in basso; invece B rimarrà indietro, e quindi la vedremo salire. Se invece vogliamo tenerle ferme dobbiamo applicare una forza. Ecco che il principio di equivalenza non è più vero: l'ascensore in caduta non è equivalente a un riferimento inerziale, perché nell'ascensore si manifestano effetti che in un riferimento inerziale non si vedrebbero.

È però chiaro che se le dimensioni della cabina sono piccole, l'effetto che abbiamo scoperto è piccolo. Esso dipende dalla differenza tra le accelerazioni di gravità in A e in B; quindi, quanto più sono vicini questi due punti, tanto più è piccola la differenza.

In termini rigorosi, ciò equivale a dire che si può ridurre l'effetto quanto si vuole pur di prendere la cabina abbastanza piccola; cioè, in generale, pur di rendere piccole le dimensioni spaziali del laboratorio. Non solo, ma il discorso vale anche in termini di tempo. Dato che l'effetto è il moto relativo tra due oggetti, è chiaro che esso sarà sensibile solo se ci sarà abbastanza tempo per vedere lo spostamento. Riassumendo: se il laboratorio è molto limitato in estensione spaziale e temporale, questi effetti secondari sono piccoli, al di sotto dello sperimentabile; e possono essere resi piccoli quanto si vuole riducendo le dimensioni del laboratorio e l'intervallo di tempo.

Dunque il principio di equivalenza vale solo al limite, nel senso di regioni spaziali e temporali la cui estensione tende a zero. In pratica i limiti spazio-temporali sono fissati dalla precisione delle misure che si possono fare. Per descrivere questa situazione in una sola parola, si dice che l'equivalenza ha carattere "locale."

Principio di equivalenza e forze di marea

Non sarà sfuggita l'analogia tra il ragionamento fatto a proposito delle due palline nell'ascensore di Einstein e quello che ci ha portato alle forze di marea nel cap. precedente.

Si tratta in effetti proprio della stessa cosa: la Terra è un riferimento in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, della Luna, ecc.; l'equivalenza con un riferimento inerziale non è perfetta, perché restano delle forze residue osservabili, che causano le maree. Per questo motivo si usa il termine "forze di marea" in un contesto più generale: tutte le volte che si ha a che fare con un laboratorio di estensione spazio-temporale finita, per cui il principio di equivalenza non vale esattamente. Si manifestano allora degli effetti, che nella descrizione della meccanica newtoniana vengono attribuiti a queste forze residue, di entità proporzionale alla dimensioni del laboratorio.

Il principio di equivalenza da un altro punto di vista

Da tutta la nostra discussione si trae una conseguenza, che ci permette di formulare diversamente il principio di equivalenza:

“*Gli effetti fisici di un campo gravitazionale sono (localmente) indistinguibili da quelli di un’accelerazione del riferimento.*”

Supponiamo ad es. di avere due laboratori: uno sulla Terra, l’altro in un’astronave lontana, ma coi motori accesi in modo da avere un’accelerazione $\vec{a} = -\vec{g}$. Stiamo dicendo che nessun esperimento permette di distinguere i due riferimenti.

Per quanto riguarda le forze, ciò discende da quello che sappiamo circa i riferimenti accelerati nella meccanica newtoniana: nell’astronave si sentirà su ogni corpo una forza apparente $-m\vec{a} = m\vec{g}$, uguale a quella che si sente sulla Terra. Ma il principio di equivalenza (forte) ci dice di più: nell’ascensore di Einstein, che sta sulla Terra e per di più è accelerato, saranno presenti tanto gli effetti della forza di gravità quanto quelli dell’accelerazione, e sappiamo che essi si cancellano esattamente (in senso locale) per ogni esperimento. Dunque gli effetti della gravità sono *sempre* equivalenti a quelli dell’accelerazione, che è quanto avevamo affermato.

È proprio questa nuova forma che giustifica il nome dato al principio di equivalenza: la forza di gravità *equivale* all’accelerazione del riferimento, e viceversa. In questo modo di vedere le cose (che è quello di Einstein) la forza di gravità perde di significato, in quanto può sempre essere *simulata* oppure *eliminata* mettendosi in un riferimento accelerato.

Rimane a questo punto una domanda: ma allora l’azione gravitazionale del Sole, o della Terra, dove sono andate a finire? come si manifestano? La risposta ha due aspetti:

- Un primo passo sta nell’osservare che c’è qualcosa che non può essere eliminato né simulato: le forze di marea.
- Un secondo passo, che qui possiamo solo accennare (è sviluppato più ampiamente in *Rel*) è che l’effetto del Sole o della Terra è di *incurvare lo spazio-tempo*.

Un esercizio

Per vedere l’utilità del principio di equivalenza anche in situazioni della vita quotidiana, esaminiamo il seguente problema:

In uno scompartimento di un treno ci sono due bambini: il primo tiene in mano un pendolo, l’altro un palloncino.

- a) Se il treno percorre una discesa a velocità costante, come si dispone il pendolo? e il palloncino?
- b) Se invece il treno compie una lunga frenata con accelerazione costante, come si dispone il pendolo? e il palloncino?

Quello che si chiede è mostrare che si può rispondere alle domande *b*) senza ricorrere a forze apparenti, e senza sapere niente di statica dei fluidi, ma solo usando il principio di equivalenza.

La deflessione gravitazionale della luce

Una semplice applicazione del principio di equivalenza (forte) sta nella prova che deve esistere la deflessione gravitazionale della luce. Ammettiamo infatti che l'ascensore in caduta libera sia equivalente a un riferimento inerziale: allora se nell'ascensore si monta un proiettore (fig. 17a-3) che manda un fascio di luce orizzontale, la luce incontrerà la parete opposta alla stessa altezza. Questo se ammettiamo che la legge della propagazione rettilinea della luce sia una legge fisica valida nei riferimenti inerziali.

Ma se la luce va in linea retta in questo riferimento, allora un osservatore che stia con i piedi sulla Terra e osservi l'ascensore che cade, non vedrà più la luce propagarsi in linea retta. Al contrario, la luce si comporterà esattamente come si comporterebbe un proiettile di fucile. Se invece del proiettore montiamo un fucile, e spariamo un proiettile, nel riferimento dell'ascensore — che è inerziale nel senso di Einstein — esso non è soggetto a nessuna forza e viaggia in linea retta. Di conseguenza, come tutti sanno, se ci si mette nel riferimento solidale con la Terra, si vede il proiettile muoversi lungo una traiettoria parabolica.

Mentre il proiettile viaggia la cabina scende, e per di più non scende con velocità costante, ma con moto accelerato. La composizione del moto orizzontale del proiettile rispetto alla cabina e del moto verticale accelerato della cabina produce una traiettoria parabolica. In tutto ciò non c'è niente di strano: è pura e semplice fisica galileiana. Ma dal momento in cui usiamo il principio di equivalenza, quello che succede al proiettile ci porta a prevedere la deflessione della luce. Se in un riferimento solidale alla Terra si vedono cadere verso il basso i proiettili, allora per la stessa ragione *deve cadere verso il basso anche la luce*.

L'idea della luce che segue una parabola appare a prima vista contraria all'esperienza; ma teniamo presente che lo spostamento verticale è legato al tempo che impiega il proiettile ad attraversare la cabina. La luce ha una velocità molto più grande di quella di un proiettile; quindi lo spostamento della cabina in quel tempo sarà piccolo e anche la deflessione della luce sarà sicuramente molto piccola: a conti fatti, si trova che dentro un ascensore di dimensioni ragionevoli la si può trascurare completamente.

Però se la cabina fosse sufficientemente grande, la deflessione potrebbe diventare misurabile. Potremmo addirittura far partire un raggio da molto lontano e farlo passare vicino alla Terra, in modo da fargli fare un percorso il più lungo possibile nel campo gravitazionale della Terra. In questo caso il calcolo diventa più complicato, perché non abbiamo più un'accelerazione costante di caduta; non siamo più in grado di farlo con strumenti elementari. Del resto, anche in queste condizioni sarebbe impossibile vedere l'effetto, che è ancora troppo piccolo. Solo sfruttando il campo del Sole si riesce a ottenere una deflessione ancora assai piccola, ma misurabile.

Riflettiamo

Siamo partiti da un fenomeno che siamo abituati a considerare banale (ma che non lo era affatto ai tempi di Galileo): tutti i gravi cadono con una stessa accelerazione g . Semplici ragionamenti ci hanno portato direttamente a una delle rivoluzioni scientifiche del nostro secolo. Si coglie qui il fascino caratteristico della fisica di Einstein: parte da cose che sembrano alla portata di tutti, da osservazioni che ognuno potrebbe fare, e ne trae conseguenze profonde, che altri non avrebbero neppure saputo immaginare.

Ci si potrebbe limitare a concludere: non per nulla si trattava di Einstein! Ma c'è un insegnamento che può valere anche per noi: spesso le grandi scoperte nascono da una comprensione della fisica nella sua profonda unità, che è tutt'altra cosa dalla semplice addizione di tante conoscenze sconnesse tra loro.