15a. Vincoli, attrito e resistenza del mezzo

Questo capitolo è destinato a un insieme di argomenti che non hanno, per la maggior parte, importanza fondamentale per la fisica in sé; ma che tuttavia è opportuno discutere per ragioni storiche, per l'interesse pratico, e infine perché forniscono molti esempi concreti di applicazioni dei principi della meccanica newtoniana.

Vincoli e reazioni vincolari

È molto frequente il caso in cui un corpo risente interazioni a contatto da altri corpi, che *di fatto* ne limitano le possibilità di movimento:

- una palla da biliardo può muoversi liberamente sul piano del tavolo (e anche al disopra) ma non lo può attraversare; per di più, è trattenuta dalle sponde
- i carrelli di un otto volante sono obbligati a seguire le rotaie
- la ruota di una bicicletta può solo ruotare sui cuscinetti
- una pallina appesa a un filo non si può allontanare dal punto di sospensione più di quanto consenta la lunghezza del filo
- il pistone di un motore a scoppio può solo scorrere avanti e indietro nel cilindro.

In tutti questi casi, e negli altri analoghi, si dice che il corpo è *vincolato*, o soggetto a un *vincolo.*

Occorre in primo luogo osservare che a rigore ciò non è vero: il filo si può spezzare, i cuscinetti qualche volta si rompono, le rotaie si deformano e anche il piano del biliardo è cedevole (essendo ricoperto di panno). Tuttavia i casi di rottura sono eccezionali, e si preferisce considerarli a parte; le deformazioni sono spesso tanto piccole da poter essere trascurate. Ne segue che riesce utile la schematizzazione del *vincolo rigido*, che delimita in modo preciso il moto del corpo in esame.

Tra gli esempi che abbiamo ci sono però ancora diverse differenze, anche nello schema del vincolo rigido. In alcuni il moto può avvenire in una sola dimensione (la ruota, il pistone, l'otto volante); in altri è possibile un moto in due dimensioni (il biliardo, se la palla non salta via); in altri ancora dobbiamo considerare possibile il moto in tre dimensioni, ma c'è una superficie che non può essere attraversata (la pallina appesa al filo, e anche il biliardo se c'interessano i rimbalzi). Parleremo perciò, a seconda dei casi, di vincoli *unidimensionali* o *bidimensionali*; distingueremo poi tra vincoli *unilateri* e *bilateri.* Sono unilateri il filo (che può allentarsi, ma non allungarsi) e un piano d'appoggio (da cui il corpo si può staccare, ma non può attraversarlo); sono bilateri il cilindro per il pistone, i cuscinetti della ruota, le rotaie dell'otto volante).

Osservazione: Un vincolo unidimensionale bilatero determina completamente la traiettoria del corpo (assimilato a un punto materiale): siamo cioè nel caso semplice di moto *su traiettoria prestabilita.*

È importante aver chiaro che in linea di principio l'interazione che determina un vincolo è sempre una forza, e potrebbe perciò essere tenuta in conto in tutt'altro modo: non parlando affatto di vincolo, ma aggiungendo alle altre forze esistenti (ad es. al peso) questa forza, che dipenderà in genere dalla posizione del corpo.

Esempio: Il filo cui è appesa la pallina non sarà esattamente rigido, e potrebbe essere trattato come una molla (con costante elastica molto grande). In tal caso la pallina avrebbe tre gradi di libertà, e sarebbe soggetta al peso e a questa forza elastica.

Ci sono però due ragioni per cui di solito non conviene procedere così:

– gli spostamenti *di fatto* consentiti dal vincolo sono molto piccoli, e non interessa studiarli in dettaglio
– l'esatta legge della forza in genere non è nota, o è molto complicata.

In poche parole, il gioco non vale la candela.

Occorre però tener presente che lo schema del vincolo rigido non ci autorizza a trascurare la forza esercitata dal vincolo, ma solo le sue deformazioni. Ci troviamo anzi in una situazione a prima vista paradossale: se dimentichiamo la deformazione del vincolo non abbiamo più modo di calcolare la forza, che diventa perciò *un'incognita* addizionale del problema. Forze incognite di questo tipo prendono il nome di *reazioni vincolari*. Si tratta di vedere che lo schema del vincolo rigido in realtà semplifica il problema, e in molti casi permette anche la determinazione delle reazioni incognite.

Vincoli lisci

Il caso più semplice in cui ciò accade è quando si possa dare — se non la grandezza — almeno la direzione della reazione vincolare. Esempi:

– Nella ruota di bicicletta si può supporre che tutte le reazioni vincolari siano su rette che intersecano l'asse di rotazione. Vedremo più avanti nel corso che in tal caso esse non influiscono sulla rotazione (hanno momento nullo).
– Nel caso dell'otto volante potremo supporre che le reazioni vincolari siano perpendicolari alle rotaie (e perciò non possono influire sulla velocità scalare).
– Il filo teso produrrà sempre una forza diretta longitudinalmente, mentre quando è lento non produce nessuna forza.
– Il caso della palla da biliardo è più complicato, e verrà discusso in seguito.
– Per il pistone si può ammettere, come grossolana approssimazione, che le reazioni vincolari siano perpendicolari alla superficie del cilindro (anche a questo serve la lubrificazione).

In tutti questi casi si dice che il vincolo è *liscio* (o privo d'*attrito*). Più in generale la stessa cosa si dice tutte le volte che le reazioni vincolari per ogni possibile spostamento consentito dal vincolo sono nulle o sono perpendicolari allo spostamento. Ciò equivale a dire, come vedremo meglio in seguito, che in un vincolo liscio le reazioni vincolari *non fanno lavoro* (e quindi non influiscono sul bilancio dell'energia).

S'intende che i vincoli privi d'attrito sono un caso limite ideale: in realtà una componente della reazione vincolare nella direzione dello spostamento sarà sempre presente, e sarà sempre diretta *in senso opposto al moto del punto di contatto*; il che è quanto dire che le reazioni vincolari in realtà fanno *lavoro negativo*, ossia dissipano energia.

Un esempio: il piano inclinato

Il modo più semplice di mostrare come si lavora con i vincoli lisci è di discutere un esempio, e conviene sceglierlo il più elementare possibile. Un blocco è appoggiato su di un piano inclinato liscio ed è trattenuto con una corda parallela al piano (fig. 15a–1): si vuole conoscere la grandezza della forza che è necessario applicare alla corda.

Indichiamo con $\vec{P}$ il peso del blocco, con $\vec{R}$ la reazione del piano, e con $\vec{T}$ quella della corda (che è anche la forza richiesta). Il vettore $\vec{P}$ è completamente noto, in grandezza e direzione, mentre degli altri due conosciamo solo le direzioni. Sappiamo però che il blocco è fermo: quindi la risultante delle forze ad esso applicate è nulla:

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = 0. \tag{15a–1}$$

Quello che sappiamo è sufficiente a tracciare la fig. 15a–2, dalla quale si ricava

$$T = P \sin\alpha \qquad R = P \cos\alpha.$$

Dunque non solo abbiamo risolto il problema, ma abbiamo anche determinato la reazione vincolare del piano.

Possiamo risolvere allo stesso modo il problema del moto: se il blocco non è trattenuto, come si muove? In luogo della (15a–1) scriveremo ora il 2° principio, tenendo presente che le forze applicate sono soltanto $\vec{P}$ e $\vec{R}$:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}.$$

Poiché il blocco scivola sul piano, la sua accelerazione è diretta come in fig. 15a–3, e il diagramma di fig. 15a–2 è sostituito da quello di fig. 15a–4 (si faccia attenzione a come sono disposti i vettori!) Se ne conclude:

$$ma = P \sin\alpha \qquad R = P \cos\alpha.$$

Osserviamo che R è la stessa del caso statico.

L'attrito

Quando un vincolo non è liscio, la reazione vincolare ha una componente opposta ai possibili spostamenti permessi dal vincolo. Abbiamo detto "possibili" perché una tale componente può esistere anche se il corpo non si muove (attrito *statico*); se invece si ha un moto effettivo, si parla di attrito *dinamico*.

Abbiamo già detto che l'attrito dinamico ha carattere dissipativo, e per questo motivo nelle applicazioni tecniche si cerca in genere di ridurlo (mediante lubrificanti, usando cuscinetti a sfere, ecc.) Quanto all'attrito statico, è bene invece sottolineare che la sua presenza è addirittura vitale in innumerevoli situazioni della vita quotidiana: senza attrito non si può camminare (basta pensare a quello che capita sul ghiaccio); non si potrebbero tener fermi né i mobili né gli oggetti posati sui tavoli (che non sono mai perfettamente orizzontali); chiodi e viti sarebbero inutilizzabili; non solo non sarebbe possibile fermare un'automobile, ma neppure metterla in movimento, ecc. ecc.

Molti testi di fisica riportano le "leggi" dell'attrito statico e dell'attrito dinamico; tuttavia si tratta di leggi che nella migliore delle ipotesi costituiscono grossolane approssimazioni, e le cui condizioni di validità non sono affatto definite con precisione. Il loro valore pratico è dunque piuttosto scarso, e il valore concettuale pressoché nullo: si potrebbe dire che esistono solo per i problemi d'esame. Noi dunque non ce ne occuperemo se non in forma molto sommaria.

Riprendiamo il piano inclinato visto sopra, ma abbandoniamo la semplificazione che esso sia liscio. Nella realtà, se si parte con un'inclinazione molto piccola si vede che il blocco non scivola anche se non è trattenuto: dunque esiste una forza d'attrito di modulo $P \sin\alpha$. Al crescere di α, finché il blocco resta fermo la forza d'attrito aumenta, e l'esperienza mostra che si raggiunge prima o poi un valore $\alpha_{\max}$ di α al quale il blocco comincia a scivolare. Si suole dare il nome di "coefficiente d'attrito statico" a $\operatorname{tg}\alpha_{\max}$, che misura il rapporto fra la componente tangenziale e quella normale della reazione vincolare.

Sarebbe un risultato utile se questo coefficiente fosse costante; il fatto è che esso dipende certamente dai corpi a contatto, dallo stato delle superfici, dalla presenza anche minima d'impurità, liquidi, ecc. Insomma il coefficiente d'attrito statico può dare solo una grossolana indicazione dell'entità della forza d'attrito che ci si può aspettare in una determinata situazione.

Le cose non diventano più semplici in condizioni di moto. Si afferma di solito che il rapporto fra le due componenti della reazione vincolare (che si chiama ovviamente "coefficiente d'attrito dinamico") è costante, nel senso ad es. che non dipende dalla velocità. Di nuovo si tratta solo di una prima approssimazione: nel caso del piano inclinato, se ciò fosse vero il moto del blocco dovrebb'essere uniformemente accelerato, mentre di fatto lo si vedrà spesso procedere a sbalzi; oppure raggiungere una velocità massima e poi non accelerare più.

Problema: Ciò prova che la forza d'attrito aumenta con la velocità: dimostrare.

Riassumendo: è utile aver presente il quadro fenomenologico dell'attrito, ma è bene non usare in modo acritico le sue supposte "leggi."

La resistenza del mezzo

Poiché abbiamo parlato di attrito, è questo il luogo opportuno per trattare un altro argomento, che non ha a che fare coi vincoli, ma è strettamente connesso col carattere dissipativo delle forze d'attrito.

Se un corpo (non vincolato) si muove in un fluido (aria, acqua ...) è soggetto da parte del fluido a un insieme di forze a contatto, che agiscono su tutta la superficie del corpo. Molto spesso queste forze hanno per effetto di ostacolare il moto (ossia hanno una componente in verso opposto alla velocità): si parla allora di *resistenza del mezzo.*

Abbiamo detto "molto spesso," che non vuol dire "sempre"; ma soprattutto non bisogna dimenticare che in molti casi concreti la forza risultante *non è affatto* diretta in senso opposto alla velocità, come indicano i seguenti esempi:

- Un aereo si mantiene in volo perché l'aria produce una forza che ha una componente opposta al peso (*portanza*), oltre quella opposta alla velocità (*resistenza*); anzi l'obbiettivo dei progettisti è di avere la massima portanza con la minima resistenza.
- Il movimento di un boomerang mostra quanto può essere complicato l'effetto dell'aria, se il corpo ha una forma "strana."
- È ben noto che si può tirare un pallone in modo che devii verso destra o verso sinistra rispetto al piano verticale in cui dovrebbe restare la sua traiettoria: basta dargli il giusto "effetto" (un moto di rotazione attorno a un asse verticale).

Dipendenza dalla velocità

È noto dall'esperienza comune che la resistenza del mezzo, a parità di altre condizioni, e per corpi di forma semplice, è funzione crescente della velocità. Vogliamo ora studiare più da vicino questa dipendenza.

Nota: Si tenga però presente che quanto diremo è a rigore corretto solo per moti *a velocità costante*: a titolo di esempio, se si fa muovere una sfera in un fluido *accelerandola*, essa subisce dal fluido una forza opposta all'accelerazione, e pari al prodotto dell'accelerazione per la metà della massa del fluido spostato. In altre parole, è come se la massa della sfera aumentasse di metà della massa del fluido che essa sposta. Dimostrare ciò richiede uno studio della dinamica dei fluidi, che va molto al di là del nostro programma. Si noti che questo fenomeno non ha niente a che fare con la spinta d'Archimede, di cui riparleremo più avanti nel corso.

La dipendenza della resistenza del mezzo dalla velocità è assai complicata, e solo come grossolana approssimazione è possibile formulare leggi semplici. Una situazione limite, in cui la legge è semplice, è quella di *velocità molto piccola*: in tal caso la forza è proporzionale alla velocità (e naturalmente dipende dal fluido). Ma che cosa vuol dire "velocità molto piccola"? piccola rispetto a che cosa?

Ad esempio, si trova che per una sfera di diametro D nell'aria la condizione è

$$vD \lesssim 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}. \tag{15a–2}$$

Per una goccia di pioggia di 1 mm di diametro la resistenza sarà proporzionale alla velocità solo fino a 1 cm/s; poi aumenterà più rapidamente. Per un'automobile la (15a–2) non è praticamente mai soddisfatta.

Quando la (15a–2) non vale, non si può più scrivere una relazione semplice; ma in un certo intervallo di velocità:

$$10^{-3}\,\mathrm{m^2/s} \lesssim vD \lesssim 100\,\mathrm{m^2/s} \tag{15a–3}$$

si può supporre che la forza sia grossolanamente proporzionale *al quadrato* della velocità. La condizione (15a–3) si applica anche a corpi di forma tutt'altro che sferica, come le automobili; per questa ragione si scrive di solito la resistenza dell'aria nella forma

$$F = \tfrac{1}{2} C_\mathrm{x} \varrho S v^2, \tag{15a–4}$$

dove ϱ è la densità dell'aria, S la sezione trasversale del veicolo, e C_x è un numero puro che dipende dalla forma: un piccolo valore di C_x dice che l'auto è molto "aerodinamica," ossia che la resistenza è bassa.

Calcoliamo ad es. la resistenza per un'auto che viaggia a 144 km/h, se $C_\mathrm{x} = 0.3$, $S = 2\,\mathrm{m^2}$:

$$F = \tfrac{1}{2} \cdot 0.3 \cdot 1.3 \cdot 2 \cdot 40^2 \simeq 6 \cdot 10^2\,\mathrm{N}.$$

Distribuzione delle forze di contatto

In tutti i discorsi che abbiamo fatto fin qui abbiamo parlato di "reazione vincolare" o di "resistenza del mezzo" come di un'unica forza applicata al corpo, ma in realtà le cose sono più complicate.

Tanto le reazioni vincolari, quanto le forze d'interazione tra il corpo e il fluido circostante, sono *forze di contatto*, e perciò sono distribuite *su tutta la superficie* di contatto. Anche in casi semplici, come quello del piano inclinato, non è affatto facile dire con certezza come queste forze sono distribuite in realtà: se ad es. siano ugualmente intense su tutta la superficie, oppure ci sia qualche parte in cui le reazioni sono maggiori che in altre. (Nel caso del piano inclinato è quasi intuitivo che le forze saranno maggiori nei punti più bassi: ma quanto?) Questa è una delle ragioni per cui è problematico parlare di una "legge" per la forza risultante.

In generale un tale insieme di forze non potrà essere descritto, nei suoi effetti sul corpo, mediante la sola risultante. Un caso semplice in cui ciò si può fare (per quanto riguarda il moto del corpo) è se tale moto è puramente traslatorio; se il corpo è rigido, vedremo in seguito che è sufficiente conoscere anche il *momento risultante* delle forze.

Non bisogna però dimenticare che ci sono altri effetti di queste forze: ad es. per un aereo il grosso della resistenza del mezzo si esercita sulle ali, che perciò vengono fortemente sollecitate. Per inciso, è questo un motivo per cui oggi i motori sono montati di preferenza proprio sulle ali (che relazione c'è tra i due fatti?)

16. Cambiamenti di riferimento

Abbiamo già visto nel Cap. 6 che la possibilità di descrivere lo stesso fenomeno fisico da riferimenti diversi porta con sé la questione della legge di trasformazione delle grandezze. In questo capitolo discuteremo il problema, limitandoci ovviamente alle grandezze meccaniche che già conosciamo.

Per introdurre il discorso, cominciamo elencando qualche problema in cui intervengono due diversi riferimenti:

1. Mentre il treno entra in una stazione in cui non ferma, Pierino butta dal finestrino la lattina vuota di Coca-Cola. Un viaggiatore fermo sul marciapiede vede che la lattina ha la traiettoria in fig. 16–1. Che cosa vede Pierino?
2. Sto percorrendo in bicicletta, a velocità costante, una strada dritta e orizzontale. Qual'è la traiettoria, la velocità e l'accelerazione, rispetto alla strada, della valvola della ruota anteriore?
3. Qual'è la velocità minima con cui un missile deve lasciare la Terra, perché possa allontanarsi dal sistema solare?
4. Pierino sta sulla giostra, con una palla in mano, a 3 m dall'asse. Marco sta fermo a terra, a 6 m dall'asse (fig. 16–2). Come deve scegliere Pierino il momento in cui lasciare la palla (senza darle nessuna spinta) per colpire Marco?

Tutti questi problemi hanno appunto in comune la domanda: che relazione c'è fra il moto (e le grandezze fisiche relative) di un corpo descritto in un certo riferimento K e in un altro riferimento K′?

Occorre in primo luogo caratterizzare il moto di K′ rispetto a K (o viceversa). Si tratterà sempre di un moto rigido, perché un riferimento è un corpo rigido; prenderemo ora in considerazione i casi più interessanti, procedendo dal più semplice al più complesso.

Moto traslatorio

Se il moto relativo è traslatorio, K′ conserva orientamento costante rispetto a K (per semplicità, supporremo addirittura *lo stesso orientamento*), le traiettorie di tutti i suoi punti sono parallele e le velocità sono le stesse; come sappiamo, basta assegnare il moto di un solo punto.

Sia O′ l'origine di K′ e O quella di K: sia dato $\vec{\varrho}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ (fig. 16–3). Allora per un punto materiale in moto qualunque, se P è la posizione che esso occupa a un certo istante rispetto a K (*nello spazio di* K) e P′ è la posizione che occupa rispetto a K′ (*nello spazio di* K′) sarà

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P'}}, \quad \text{ossia} \quad \vec{r}(t) = \vec{\varrho}(t) + \vec{r}\,'(t). \tag{16–1}$$

Osservazione 1: Abbiamo fatto distinzione fra la posizione che un punto occupa *nello spazio di* K e in quello di K′, per due motivi:

– Il primo è che vogliamo abituarci a non fare ricorso all'idea di spazio assoluto: perciò a ogni riferimento associamo *il suo spazio*, e allo stesso oggetto corrispondono punti di spazi diversi nei due riferimenti. Naturalmente in questo caso la relazione geometrica fra i due spazi è molto semplice, come mostra la (16–1).
– Il secondo è più concreto, e lo si vedrà meglio negli esempi seguenti. Il fatto è che se i due riferimenti hanno orientamenti diversi, anche quando le origini coincidono, a punti corrispondenti *non potremo associare vettori uguali.*

Osservazione 2 (sul tempo assoluto ecc.): Per arrivare alla (16–1) è essenziale che il tempo sia assoluto. Infatti $\vec{r}(t)$ e $\vec{\varrho}(t)$ descrivono moti rispetto al riferimento K, mentre $\vec{r}\,'(t)$ concerne il riferimento K′: è possibile usare la stessa t *sse il tempo è assoluto.* La condizione di validità è $v \ll c$, dato che gli effetti che vogliamo trascurare sono $O(v^2/c^2)$.

Dalla (16–1), derivando rispetto a t, si ottiene

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\varrho}} + \dot{\vec{r}}\,' \tag{16–2}$$

che si scrive

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_{\rm rel} \tag{16–3}$$

avendo indicato con $\vec{v}$ la velocità del punto materiale rispetto a K, con $\vec{v}\,'$ quella rispetto a K′, e con $\vec{v}_{\rm rel}$ la *velocità relativa* dei due riferimenti.

Osservazione 3: La (16–3) è la ben nota *legge di composizione galileiana delle velocità*, di cui abbiamo già parlato nel Cap. 6. Come si vede, per la sua validità non è necessario che i riferimenti siano inerziali.

Osservazione 4: Talvolta si trova citata la (16–3) come prova che le velocità si sommano come vettori. Abbiamo già visto che il carattere vettoriale della velocità ha origine da quello degli spostamenti; d'altra parte, se la (16–3) fosse la prova che la velocità è un vettore, dato che essa non vale nella meccanica relativistica, ne dovremmo concludere che invece in relatività la velocità non è più un vettore!

Derivando di nuovo la (16–3) rispetto al tempo si ha

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{\rm rel}. \tag{16–4}$$

Questa ci dice come si trasforma l'accelerazione fra riferimenti in moto relativo traslatorio, anche accelerato. In particolare: se $\vec{a}_{\rm rel} = 0$ (moto relativo rettilineo uniforme)

$$\vec{a} = \vec{a}\,'.$$

Da qui si vede che *l'accelerazione è la stessa in tutti i riferimenti inerziali*; si dice anche che è *invariante.*

Come preparazione ai casi più complicati che seguono, ritroviamo gli stessi risultati per una diversa via. Fissiamo nei due riferimenti due SC cartesiani:

x, y, z in K; x', y', z' in K'; e scegliamoli con gli assi omonimi paralleli (fig. 16–4). Noi conosciamo il moto di O' rispetto a K, che descriviamo assegnando le tre funzioni $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$. A un dato istante t i due SC differiscono solo per una traslazione, per cui potremo scrivere

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t) + \xi(t) \\ y(t) &= y'(t) + \eta(t) \\ z(t) &= z'(t) + \zeta(t) \end{aligned} \tag{16–5}$$

che si riassumono nella (16–2). Volendo, si possono ancora ottenere le (16–3), (16–4) in termini di componenti, derivando le (16–5).

Moto rotatorio

Supponiamo ora che il moto di K' rispetto a K sia rotatorio e con asse fisso. Ci converrà prendere O e O' coincidenti, e sull'asse di rotazione. In questo caso la difficoltà principale sta nel fatto che i due riferimenti non potranno più essere ugualmente orientati, e perciò i vettori $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ che rappresentano lo stesso punto materiale *non sono più uguali*: potrà per esempio accadere che $\vec{r}\,'$ non dipenda dal tempo, mentre $\vec{r}$ cambia, a causa del moto relativo dei due riferimenti. Scriveremo in generale

$$\vec{r} = \mathcal{R}\vec{r}\,', \tag{16–6}$$

dove il simbolo $\mathcal{R}$ sta a ricordare la *rotazione* che bisogna applicare a $\vec{r}\,'$ per ottenere $\vec{r}$. Il punto importante è che questa rotazione *dipende dal tempo*.

Nota: In termini matematici, $\mathcal{R}$ non è che un particolare isomorfismo (un'isometria) fra i due spazi vettoriali di K e di K'; ma noi eviteremo gli aspetti "tecnici" dell'argomento.

Per passare alle velocità non avremo che da derivare la (16–6) rispetto al tempo: a primo membro avremo $\vec{v}$, ma a secondo membro non troveremo né $\vec{v}\,'$, né $\mathcal{R}\vec{v}\,'$, come si potrebbe credere. La ragione sta in quello che abbiamo già detto: anche la rotazione dipende dal tempo. Ne segue che anche se il nostro punto materiale è fermo rispetto a K', non lo è rispetto a K: dunque $\vec{v}\,' = 0$ non deve implicare $\vec{v} = 0$.

Il modo più semplice per risolvere il problema è di lavorare con le coordinate cartesiane: se prendiamo l'asse di rotazione come asse $z = z'$, tra le coordinate nei due riferimenti sussistono le relazioni

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \\ z &= z', \end{aligned} \tag{16–7}$$

dove $\varphi = \varphi(t)$ descrive il moto di K' rispetto a K (fig. 16–5). Le (16–7) non sono altro che la (16–6) scritta in termini delle componenti di $\vec{r}$ e di $\vec{r}\,'$. Di qui si vede bene che anche se $\vec{r}'$ (e quindi x', y', z') sono costanti nel tempo, non lo saranno $\vec{r}$, x, y, z.

Nota: Può riuscire utile un "trucco" mnemonico per ricordare le (16–7):

1: Nell'equazione per la x il coefficiente di x' è $\cos\varphi$, e lo stesso per il coefficiente di y' nell'equazione per la y.

2: I coefficienti "incrociati" sono uno $\sin\varphi$ e l'altro $-\sin\varphi$; per decidere i segni si ricorre alla figura con $0 < \varphi < \pi/2$, e si guarda un caso particolare, ad es. $y' = 0$ (P in fig. 16–6). Si vede che $y > 0$, dunque la seconda equazione ha il "+".

Deriviamo le (16–7) rispetto a t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\dot{x}' \cos\varphi - \dot{y}' \sin\varphi) - (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)\,\dot{\varphi} \\ \dot{y} &= (\dot{x}' \sin\varphi + \dot{y}' \cos\varphi) + (x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)\,\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= \dot{z}'. \end{aligned} \tag{16–8}$$

A primo membro abbiamo le componenti di $\vec{v}$, come previsto. A secondo membro $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, $\dot{z}'$ sono le componenti di $\vec{v}'$ nelle coordinate x', y', z'; allora le espressioni nelle prime parentesi sono le componenti di $\mathcal{R}\vec{v}'$ nelle coordinate x, y, z. Ecco un esempio che mostra molto bene perché occorre distinguere il SC dal riferimento. Osserviamo che nelle seconde parentesi troviamo ordinatamente y e x. Riassumendo:

$$\begin{aligned} v_x &= (v'_x \cos\varphi - v'_y \sin\varphi) - y\,\dot{\varphi} = (\mathcal{R}\vec{v}')_x - y\,\dot{\varphi} \\ v_y &= (v'_x \sin\varphi + v'_y \cos\varphi) + x\,\dot{\varphi} = (\mathcal{R}\vec{v}')_y + x\,\dot{\varphi} \\ v_z &= v'_z. \end{aligned}$$

Se introduciamo la velocità angolare $\vec{\omega} = (0, 0, \dot{\varphi})$ arriviamo infine all'espressione

$$\vec{v} = \mathcal{R}\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{16–9}$$

Interpretazione geometrica

Conviene dare un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto. Cominciamo riprendendo in esame il caso traslatorio. Il punto P si muove rispetto a K per due ragioni:

a) perché si muove K′: nel tempo dt si sposterà di $\vec{v}_{\text{rel}}\,dt$

b) perché P′ si muove rispetto a K′: nel tempo dt si sposterà di $\vec{v}'\,dt$.

Nell'ipotesi $\vec{v}' = 0$ si ha solo il primo spostamento, e $\vec{v} = \vec{v}_{\text{rel}}$; nell'ipotesi $\vec{v}_{\text{rel}} = 0$ si ha solo il secondo spostamento, e $\vec{v} = \vec{v}'$. In generale si hanno entrambi, e si sommano: lo stesso succede per le velocità (fig. 16–7). Ripetiamo che è possibile sommare semplicemente gli spostamenti fatti nello stesso tempo, perché il tempo è assoluto.

Nel caso rotatorio la situazione è più complicata, perché $\vec{v}_{\rm rel}$ non è la stessa dappertutto; ne segue che non è indifferente in che ordine si fanno i due spostamenti (il "parallelogramma degli spostamenti" non si chiude, perché in realtà non è un parallelogramma: fig. 16–8). Più esattamente, nel mentre P$'$ si muove rispetto a K$'$, questo si muove rispetto a K: perciò gli spostamenti sono *simultanei*, e non successivi. Però l'effetto è $O(dt^2)$, e non ha influenza per il calcolo della velocità.

Osserviamo ancora che nella (16–9) entra $\mathcal{R}\vec{v}'$, e non semplicemente $\vec{v}'$, per la stessa ragione per cui la posizione del punto materiale è rappresentata da $\vec{r}'$ rispetto a K$'$, e da $\vec{r} = \mathcal{R}\vec{r}'$ rispetto a K.

Dal ragionamento fatto possiamo anche dedurre la relazione che vale nel caso più generale:

$$\vec{v} = \mathcal{R}\vec{v}' + \vec{v}_{\rm rel} \tag{16–10}$$

dove $\vec{v}_{\rm rel}$ è la velocità relativa di K$'$ rispetto a K *nel punto* P$'$.

Relazione fra le derivate di un vettore rispetto a K e rispetto a K$'$

Riesce spesso utile applicare i risultati precedenti a un vettore qualsiasi, e non necessariamente alla posizione di un punto materiale (anzi, nell'applicazione che ne faremo fra poco, si tratterà della velocità; ma ne vedremo altri usi nel seguito).

In effetti nel ragionamento che ci ha portato dalla (16–6) alla (16–9) non c'è niente che ci obblighi a limitarlo al vettore posizione: in luogo di x, y, z possiamo intendere le componenti di un qualsiasi vettore. Se indichiamo il vettore in questione con $\vec{w}$, potremo scrivere:

$$\dot{\vec{w}} = \mathcal{R}\dot{\vec{w}}' + \vec{\omega} \times \vec{w} \tag{16–11}$$

dove con $\vec{w} = \mathcal{R}\vec{w}'$ abbiamo indicato il vettore nel riferimento K, e con $\dot{\vec{w}}$ la sua derivata temporale, anch'essa calcolata in K; con $\vec{w}'$ e con $\dot{\vec{w}}'$ i corrispondenti oggetti di K$'$.

Calcolo dell'accelerazione

Per ricavare la legge di trasformazione dell'accelerazione non c'è che derivare la (16–9), ma la cosa richiede una certa attenzione. La derivata del primo membro è chiaramente $\vec{a}$. La derivata del primo termine a secondo membro si fa usando la (16–11), e dà $\mathcal{R}\vec{a}' + \vec{\omega} \times \mathcal{R}\vec{v}'$. Il secondo termine fornisce

$$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\mathcal{R}\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}),$$

ancora per la (16–11). Mettendo tutto insieme si ha:

$$\vec{a} = \mathcal{R}\vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\,\vec{\omega} \times \mathcal{R}\vec{v}'. \tag{16–12}$$

Lasciamo al lettore di verificare che allo stesso risultato si arriva derivando meccanicamente le (16–8).

Cerchiamo ora di capire il risultato (16–12).

1. Supponiamo che P sia fermo rispetto a K′: $\vec{v}\,' = 0$, $\vec{a}\,' = 0$, e nella (16–12) sopravvivono solo il secondo e il terzo termine.
   - Se inoltre ω è costante ($\dot{\omega} = 0$) rimane $\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\, \vec{\omega} - \omega^2\, \vec{r}$. Se scriviamo $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$ troviamo $\vec{a} = -\omega^2\, \vec{r}_{\perp}$, e questa non è che l'accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme di P.
   - Se invece ω varia ($\dot{\omega} \neq 0$) il moto circolare di P non è uniforme, e c'è un'accelerazione tangenziale $\ddot{s} = \dot{\omega} r$; il vettore $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ dà il risultato giusto in grandezza e direzione.
2. Se P si muove rispetto a K′, ma K′ è fermo rispetto a K ($\omega = 0$), resta solo il primo termine, com'è ovvio.
3. Nel caso generale dovremmo aspettarci che siano presenti primo, secondo e terzo termine; ma da dove nasce il quarto? Vediamo due casi semplici:
   - Sia ω costante, e P′ si muova rispetto a K′ di moto circolare uniforme con velocità scalare v'. La velocità scalare di P rispetto a K è allora $v = v' + \omega r$; di conseguenza l'accelerazione (centripeta) ha modulo
   $$\frac{v^2}{r} = \frac{{v'}^2}{r} + \omega^2\, r + 2\, \omega v'.$$
   Il primo termine di questa è a'; il secondo corrisponde al secondo della (16–12), come già sappiamo; finalmente l'ultimo coincide col quarto, in grandezza e direzione.
   - Sia ancora ω costante, e il moto di P′ rispetto a K′ sia radiale e uniforme. La velocità $\vec{v}$ ha una componente radiale che non cambia e vale v'; e una trasversale, che vale ωr e dunque varia al variare di r. Usando le formule note delle coordinate polari, avremo
   $$a_r = -\omega^2 r, \qquad a_\varphi = 2\, \omega v'$$
   che corrispondono rispettivamente al secondo e al quarto termine della (16–12), mentre il primo e il terzo sono nulli.

Caso generale

Non discuteremo in dettaglio il caso in cui il moto di K′ rispetto a K sia del tutto generale, perché si presenta raramente nelle applicazioni. Quando sia necessario, lo si può sempre risolvere, caso per caso, scrivendo la trasformazione di coordinate e derivando rispetto al tempo una e due volte.

È anche possibile procedere in un altro modo: decomporre il moto relativo dei due riferimenti in più moti semplici. A titolo di esempio consideriamo il moto della Terra: se si trascura la precessione, l'asse terrestre è in moto traslatorio intorno al Sole, e la Terra ruota (pressoché) uniformemente intorno al suo asse. Se vogliamo passare dal riferimento solidale alla Terra a quello solidale al centro del Sole e orientato come le stelle fisse, arriviamo facilmente al risultato introducendo un riferimento ausiliario K_1 che trasla rispetto a K, mentre K′ ruota rispetto a K_1. Allora

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{v}_1 + \vec{v}_{\mathrm{rel}} \\
\vec{v}_1 &= \mathcal{R}\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 \\
\vec{v} &= \mathcal{R}\vec{v}\,' + \vec{v}_{\mathrm{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a}_1 + \vec{a}_{\mathrm{rel}} \\
\vec{a}_1 &= \mathcal{R}\vec{a}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + 2\,\vec{\omega} \times \mathcal{R}\vec{v}\,' \\
\vec{a} &= \mathcal{R}\vec{a}\,' + \vec{a}_{\mathrm{rel}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + 2\,\vec{\omega} \times \mathcal{R}\vec{v}\,'.
\end{aligned}$$

dove $\vec{v}_{\mathrm{rel}}$, $\vec{a}_{\mathrm{rel}}$ sono velocità e accelerazione di K_1 rispetto a K e $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{\varrho}_1$ è la posizione rispetto a K_1.

Il principio di relatività

Dimostriamo ora, come annunciato nel Cap. 6, il seguente

Teorema: *Il principio di relatività vale nella meccanica newtoniana sotto l'ipotesi che le forze dipendano solo dalle distanze e dalle velocità relative.*

Dim.: Dobbiamo far vedere che se le leggi di Newton valgono in un riferimento inerziale, valgono in qualsiasi altro.

La cosa è ovvia per il 1° principio: se un corpo è isolato in un riferimento, lo è in tutti; e dalla (16–3) si vede che se $\vec{v}$ è costante, lo è anche $\vec{v}\,'$, perché $\vec{v}_{\mathrm{rel}}$, velocità relativa di due riferimenti inerziali, è costante per definizione.

Quanto al 2° principio, nel cambiamento di riferimento le distanze dei punti non cambiano, e nemmeno le velocità relative (sempre per la (16–3)): dunque non cambiano le forze. D'altra parte l'accelerazione è invariante, come abbiamo già visto. Dunque $\vec{F} = m\vec{a}$ vale in tutti i riferimenti inerziali, con la stessa massa: *la massa è invariante.*

Rimane il 3° principio, che resta ovviamente valido, visto che le forze non cambiano. ∎

Dinamica nei riferimenti non inerziali

Un'applicazione importante della cinematica dei moti relativi sta nella deduzione delle equazioni del moto in un riferimento non inerziale. Il problema è il seguente: come si formulano i principi della dinamica in un riferimento non inerziale? A prima vista la richiesta sembra contraddittoria, dato che le leggi della meccanica newtoniana sono state formulate per i riferimenti inerziali: ma osserviamo che se K è inerziale, e K′ non lo è, avremo

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\,\mathcal{R}\vec{a}\,' + \cdots \qquad (16\text{–}13)$$

dove i puntini stanno per i termini che risultano usando la (16–12), o l'espressione analoga che si applichi al caso in esame.

Vogliamo vedere se è possibile trovare una $\vec{F}'$ tale che nel riferimento K$'$ valga ancora il 2° principio, nella forma

$$\vec{F}' = m\vec{a}'.$$

Il punto essenziale è che $\vec{F}'$ non è legata a $\vec{F}$ nel modo semplice che si potrebbe credere: $\vec{F} = \mathcal{R}\vec{F}'$, a causa dei termini $\cdots$ nella (16–13).

Proviamo allora a introdurre una forza *apparente* $\vec{F}_{\rm app}$ che tenga conto dei termini $\cdots$

$$\mathcal{R}\vec{F}' = \vec{F} + \mathcal{R}\vec{F}_{\rm app}.$$

Sostituendo $\vec{F}$ dalla (16–13):

$$\mathcal{R}\vec{F}' = m\,\mathcal{R}\vec{a}' + \cdots + \mathcal{R}\vec{F}_{\rm app}$$

e otterremo $\vec{F}' = m\vec{a}'$ sse

$$\mathcal{R}\vec{F}_{\rm app} + \cdots = 0.$$

Questa relazione determina la forza apparente.

Riassumendo: possiamo salvare il secondo principio anche in un riferimento *non inerziale* se aggiungiamo alle *forze reali* agenti sul corpo le *forze apparenti.* La distinzione tra forze reali e apparenti nella fisica newtoniana è tutt'altro che formale: le prime sono prodotte da *corpi reali*, e perciò si presentano sempre a coppie (terzo principio); le seconde non hanno origine in altri corpi, vicini o lontani (ricordiamo però che Mach la vedeva diversamente...)

Quanto agli altri due principi: il principio d'inerzia non vale *per definizione* in un riferimento non inerziale (ma questo non è un problema: lo si spiega dicendo che "le forze apparenti non possono essere eliminate"); il terzo principio vale per le forze reali, non per quelle apparenti, che non sono causate da altri corpi.

Rimane ora, caso per caso, da determinare quale sia la forza apparente. Tornando ai casi particolari discussi in precedenza, per un riferimento in moto traslatorio abbiamo:

$$\vec{F}_{\rm app} = -m\vec{a}_{\rm rel}.$$

(in assenza di rotazioni non occorre la $\mathcal{R}$). In parole: in un riferimento in moto *traslatorio accelerato* tutti i corpi sono soggetti a una forza apparente $-m\vec{a}_{\rm rel}$ (proporzionale alla massa). Questa si chiama a volte (purtroppo!) "forza d'inerzia."

Nel caso di moto rotatorio, limitandoci alla rotazione uniforme ($\dot{\vec{\omega}} = 0$) si ha dalla (16–12):

$$\mathcal{R}\vec{F}_{\rm app} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathcal{R}\vec{r}\,') - 2m\,\vec{\omega} \times \mathcal{R}\vec{v}\,'.$$

da cui subito

$$\vec{F}_{\mathrm{app}} = \vec{F}_{\mathrm{c}} + \vec{F}_{\mathrm{cc}} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') - 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'. \tag{16–14}$$

perché $\vec{\omega}$ non è modificato dalla rotazione. Il primo termine si chiama "forza centrifuga," il secondo "forza di Coriolis." Di solito è chiaro dal contesto che siamo nel riferimento K$'$, e si possono lasciar cadere i $'$ nella (16–14).

In particolare, se il corpo è fermo in K$'$, ne segue

$$\vec{F}_{\mathrm{r}} + \vec{F}_{\mathrm{c}} = 0, \tag{16–15}$$

dove $\vec{F}_{\mathrm{r}}$ è la forza reale, e $\vec{F}_{\mathrm{c}}$ è la forza centrifuga: *se un corpo è fermo in un riferimento rotante, la forza reale e la forza centrifuga si fanno equilibrio.*

È indispensabile ricordare, per evitare ogni sorta di errori, che *di forza centrifuga si può parlare solo nel riferimento* K$'$, che ruota rispetto a un riferimento inerziale. Perciò non ha alcun senso dire che "nel moto della Terra attorno al Sole l'attrazione del Sole è equilibrata dalla forza centrifuga": se diciamo che la Terra si muove, non siamo nel riferimento K$'$ e la forza centrifuga non c'è: infatti il moto della Terra è accelerato, e l'accelerazione è quella prodotta dall'unica forza presente, l'attrazione gravitazionale del Sole.

Se il corpo si muove rispetto a K$'$, in luogo della (16–15) scriveremo

$$\vec{F}_{\mathrm{r}} + \vec{F}_{\mathrm{c}} + \vec{F}_{\mathrm{cc}} = m\vec{a}\,', \tag{16–16}$$

dove interviene la forza di Coriolis, che è proporzionale alla velocità. La forza di Coriolis è molto meno familiare di quella centrifuga, sebbene non sia meno importante: ne vedremo esempi nel prossimo capitolo.

Ci si può chiedere: perché occuparsi dei riferimenti non inerziali, che complicano le cose? Il fatto è che un riferimento è la schematizzazione di un laboratorio, ossia di un ambiente reale nel quale si svolgono fenomeni. Anche se in linea di principio ci si potrebbe sempre ridurre a descrivere i fenomeni da un riferimento inerziale, ciò può essere difficile o innaturale: si pensi a un treno che frena, a un aereo che descrive una curva, ecc. Ma l'esempio più decisivo è proprio la Terra: sebbene a prima vista la lentezza del suo moto faccia sembrare trascurabili le forze apparenti, non è affatto così.

È importante notare che *le forze apparenti sono sempre proporzionali alla massa del corpo, come la forza di gravità*. Quest'osservazione, per banale che possa sembrare, è il punto di partenza della formulazione einsteiniana della gravitazione: la cosiddetta *teoria generale della relatività* (espressione che di solito si abbrevia in "relatività generale").

Nota finale

La cinematica dei moti relativi è un argomento delicato, in cui occorre fare molta attenzione al significato delle grandezze e dei simboli. Generalmente lo si tratta senza fare troppa attenzione alla distinzione fra riferimento e SC, e assumendo implicitamente il punto di vista dello spazio assoluto. Allora non c'è motivo di distinguere $\vec{r}$ da $\vec{r}\,'$, non occorre introdurre il simbolo $\mathcal{R}$, e tutto sembra più semplice. Così ad es. la (16–12) si scrive

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'. \tag{16–17}$$

In realtà le difficoltà messe fuori dalla porta rientrano dalla finestra, perché giustificare correttamente la (16–17) non è comunque semplice, e ancor meno semplice è interpretarla correttamente. La strada che abbiamo seguito appesantisce la notazione, ma dovrebbe aiutare a capire meglio quello che stiamo facendo.

Un'altra osservazione riguarda la terminologia. Spesso i due riferimenti K e K$'$ vengono chiamati *assoluto* e *relativo*: ciò può facilitare mnemonicamente, ma sembra metterli in due ruoli diversi, che invece non hanno ragione di essere. Ancora: quella che qui abbiamo chiamata velocità *relativa* di un riferimento rispetto all'altro, viene chiamata talvolta velocità *di trascinamento* (e lo stesso per le accelerazioni). Allora la nostra (16–3) si esprime in parole così: "la velocità assoluta è uguale alla velocità relativa più la velocità di trascinamento." Qui abbiamo preferito riservare il termine "relativo" al moto di un riferimento rispetto all'altro; è solo questione di parole, ma se non si fa attenzione ci si può confondere.

Spendiamo infine qualche parola sull'espressione "composizione delle velocità." Si tratta di un termine di origine antica, risalendo almeno a Galileo. Sappiamo già che in senso moderno "composizione" vuol dire soltanto "modo di trasformarsi della velocità di un corpo al cambiare del riferimento"; ma sopravvive purtroppo un altro significato, che può sembrare equivalente, e invece conduce facilmente in equivoci. S'interpreta "composizione" come somma, ragionando press'a poco così: il corpo ha una velocità per il fatto di muoversi rispetto a K$'$, e un'altra perché K$'$ si muove rispetto a K; queste due velocità (che si pensano entrambe possedute dal corpo, ed è questo l'errore!) si sommano a dare la velocità risultante." Dopo di ciò, essendo "composizione" sinonimo di "somma," riesce impossibile comprendere come tale principio possa cadere in difetto; questo malinteso è una delle tante ragioni per cui ancora oggi c'è qualcuno che trova "assurda" la relatività di Einstein.